

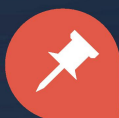
Le bulletin de l'APMEP - N° 546

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2022

Maths et élèves à besoins particuliers (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet **Au fil des maths** (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'**Au fil des maths** ou bien proposer un article, écrivez à
aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Cédric GROLLEAU, Louise GROLLEAU, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à **Au fil des maths.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Décembre 2022. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Des décimaux avant les décimaux ?

Les nombres décimaux ont été l'objet de bien des tâtonnements dans l'histoire des mathématiques. Michel Sarrouy nous expose, sans ordre chronologique, des démarches historiques utilisées au cours des tout débuts des décimaux.

Michel Sarrouy

L'organisation du texte qui suit peut surprendre voire choquer puisqu'il s'agit d'une petite étude historique qui ne respecte pas l'ordre chronologique.

Al-Uqlīdisī, une introduction ?

Au milieu du x^e siècle, Al-Uqlīdisī a écrit un livre d'arithmétique [1] clair et bien détaillé. En s'appuyant sur des propriétés opératoires de la numération sexagésimale, il débouche naturellement sur des propriétés analogues en numération décimale qui atteignent ce que nous appelons maintenant les nombres décimaux. Nous nous attacherons ici à deux aspects particuliers de cette démarche : la question de la médiation et quelques opérations.

Médiation en trois étapes

L'opération de médiation, qui avait une grande importance dans les travaux mathématiques du monde musulman du Moyen Âge, est tout simplement la division par 2.

Après avoir doublé 1 treize fois et obtenu 8 192, Al-Uqlīdisī passe à la médiation du résultat. Suivons l'exposé d'Ahmad Salim Saidan : la médiation commence par le début du nombre, lequel est le chiffre 2.

8 192	La moitié de deux est un	on remplace le 2 des unités par 1		8 191
8 191	La moitié de neuf est quatre et demi	4 remplace 9 et le demi qui est 5 est ajouté au 1 du rang des unités	parce qu'un demi à n'importe quel rang est cinq au rang précédent	8 146
8 146	La moitié de un est un demi	on remplace ce 1 par 0 et on ajoute 5 au 4	pour la même raison	8 096
8 096	La moitié de huit est quatre	d'où le résultat : 4 096.		4 096

Pour notre propos, l'élément important se trouve dans le passage de un demi à cinq au rang précédent. La justification l'accompagne, s'appuyant sur le fait que ce 1 représente 10 par rapport au rang précédent. Comme le raisonnement est tenu de façon abstraite, pour un rang quelconque, il s'applique à n'importe quel rang. Il révèle une excellente maîtrise du système décimal de numération de position.

Plus loin, dans le livre II, la reprise de la médiation touche aussi des nombres impairs. Il est cette fois-ci indiqué que la médiation peut être commencée par le dernier rang, c'est-à-dire par le rang le plus élevé.

Ainsi, pour 1 111 111, en désignant chaque rang par l'exposant de 10 qui lui correspond, la médiation du 1 du sixième rang donne 5 au cinquième rang, la médiation du 1 du cinquième rang donne 5 au

quatrième... jusqu'à la médiation du 1 du rang 0 qui donne un demi. Le résultat, 555 555 et demi, est écrit 555555.

1

2

L'opération de médiation est reprise dans le livre IV pour aller plus loin : selon le même principe, la moitié de 13 est 6, qui, en poursuivant la média-

1

2

tion, donne 3 puisque, est-il indiqué, il faut aussi

1

4

doubler le 2. La suite des médiations de 13 donne

1 0 0 0 0 .

5 13 13 13 13

8 16 32 64 128

La disposition et la forme des résultats changent à l'étape suivante : 6 3 1 0 0 .

1 1 1 1 1 1 1

2 4 8 2 16 4 2 32 8 4

Pour ce même exemple numérique de médiations successives de 13, le passage à la numération sexagésimale qui suit conduit aux deux formes des résultats :

- 13 6 puis 6 3 et 1, cette dernière réponse
30 30 15 37
30

est obtenue en divisant 3 par 2 ce qui donne le 1 du haut et 30 à la ligne intermédiaire puis, en divisant 15 par 2 ce qui conduit à 7, à ajouter aux 30 de la ligne du milieu, et aux 30 de la ligne du bas. Elle correspond à

$$\text{l'égalité } \frac{3 + \frac{15}{60}}{2} = 1 + \frac{37}{60} + \frac{30}{60^2} \text{ soit aussi } \frac{3^{\circ}15'}{2} = 1^{\circ}37'30''.$$

- 13 6 3 1 0 0 0 0 .
30 15 37 48 24 12 6
30 45 22 11 5
30 15 37
30

Au retour au système décimal, une nouvelle méthode nous ramène à notre propos.

La suite de médiations de 13 donne : 1 3 .

6 5

3 2 5

1 6 2 5

0 8 1 2 5

Nous y lisons la suite 13; 6,5; 3,25; 1,625; 0,8125.

Cette suite est accompagnée d'explications et d'un complément. Il est en effet prescrit de « mettre un signe au-dessus de trois¹ », en quelque sorte, l'équivalent de notre virgule de délimitation de la partie entière. Ce signe n'apparaît pas dans le texte à cet endroit, un manque qu'Ahmad Salim Saidan attribue au copiste dans la mesure où le signe apparaît parfois. Il marque le rang des unités. Ensuite, la médiation de 13 se décompose en celle de 12 qui donne les 6 et la division de 1 par 2 qui, elle, donne le « cinq avant le six ». Le fait rencontré plus haut qu'« un demi à n'importe quel rang est cinq au rang précédent » est ici appliqué au rang des unités du nombre et le cinq se trouve donc à celui des dixièmes. Et ce travail est poursuivi aux trois médiations suivantes, toujours avec la même justification.

Nous assistons ainsi à l'introduction de véritables nombres décimaux.

Quelques calculs

Une autre question est de savoir s'ils servent à quelque chose d'autre. Sont-ils utilisés ? Une première réponse vient immédiatement puisqu'une suite de duplications prolonge cette suite de médiations. Le doublement de « 08125 » doit être commencé au rang le plus bas : « 5 et 5, 10 à ajouter au double de deux » qui doit être interprété en précisant que seul le 1 de 10 est à ajouter au double de deux. Précision que l'auteur n'a pas jugé indispensable sans doute parce que,

1. Le trois de 13.

au fond, que l'on soit au rang des cent millièmes ou ailleurs, rien ne change, cette propriété de la numération décimale de position vaut certes pour les entiers mais aussi pour les nombres décimaux.

Dans cet ordre d'idées, dès le livre II, il avait été proposé d'ajouter son dixième à un nombre entier. Pour se faire, il convient de commencer par écrire le nombre normalement puis d'en placer une copie en dessous en la décalant d'un rang parce que, alors, on « sait que c'est son dixième ». Pour recommencer avec le dixième du résultat, on procède de la même manière. Ici déjà, il était recommandé de mettre un signe au rang des unités. L'exemple traité, accroître 135 de son dixième, est sans surprise.

Le retrait d'un dixième est abordé quelques pages plus loin : pour soustraire son dixième de 13, on multiplie 13 par 10, on écrit le résultat, 130, et on place 13 en dessous, et cette fois-ci sans décalage puisque le décalage est acquis grâce à la multiplication par 10 ; 117, le résultat, représente autant de parties de 10, nos dixièmes.

Bien que peu nombreux, ces calculs montrent que, au-delà de leur introduction, les décimaux sont opératoires.

Fibonacci, des nombres presque décimaux

Au début du XIII^e siècle, Leonardo Pisano, plus connu sous le nom de Fibonacci, a écrit un gros ouvrage d'arithmétique et d'algèbre, le *Liber abaci* [2], publié en 1202 et réédité en 1228. Le système sexagésimal a laissé place au décimal dont il vante les mérites dès l'introduction.

Utilisation sans introduction

Au travers d'un grand nombre de situations variées, il arrive que des divisions par des puissances simples de 10 conduisent à des fractions décimales.

Au cours du chapitre 8 [2, p. 85], le problème

Un cantar est vendu 13 livres, combien valent 27 rotoles ?

sachant qu'un cantar fait 100 rotoles, conduit à la division de 13×27 , soit 351, par 100. Sa réponse est $3 \frac{5}{10} \frac{1}{10}$ sur lesquels on lit nos 3,51 et qui représentent parfaitement 3 unités, 5 dixièmes et 1 centième. La notation $3 \frac{5}{10} \frac{1}{10}$ qu'il a introduite et beaucoup utilisée signifie en effet $3 + \frac{5}{10} + \frac{1}{10 \times 10}$.

Dans le cours du chapitre 12 [2, p. 313], le problème

Une personne [qui] avait 100 besants est passée par XII villes et il devait donner le dixième des besants qu'il avait avec lui dans chaque ville. Tu voulais connaître ce qu'il donne ou ce qui lui sera resté de ville en ville.

voit se répéter l'opération $a - a \div 10$ pour un nombre a que nous dirions décimal et qui est ici un nombre, c'est-à-dire un entier, accompagné d'une fraction. La procédure consiste à diviser a par 10 puis à retrancher le résultat de a . Première ville, il s'agit de calculer $100 - 100 \div 10$, rien à dire. Deuxième ville, de même avec $90 - 90 \div 10$. Troisième ville, la procédure est identique mais avec $81 - 81 \div 10$ qui est évalué en deux temps : $81 \div 10$ fait 8 et un dixième, ce qu'il écrit $8 \frac{1}{10}$ dans lequel on reconnaît nos 8,1 ; ceci est suivi de son retrait de 81 qui donne $\frac{9}{10} 72$. Quatrième ville, en deux temps, le dixième de $\frac{9}{10} 72$ est $\frac{9}{10} \frac{2}{10} 7$ dans lequel on reconnaît 7,29 puis son retrait de $\frac{9}{10} 72$. Pour ce faire, *La méthode [...] consiste à multiplier 7 par sa fraction⁴, ce seront 729 centièmes, à multiplier ensuite 72 par sa fraction, ce seront 729 dixièmes, qui, multipliés par 10 pour avoir des centièmes comme le sont ceux que tu devras soustraire après, font 7290 centièmes. Retranches-en 729 centièmes, il reste 6561 centièmes. Divise-les par 100 [...] il viendra $\frac{1}{10} \frac{6}{10} 65$ pour ce reste*

2. Écrire à gauche, la fraction doit être ajoutée, il en est de même dans la suite.

3. Le texte ne renferme aucun symbolisme, le signe $-$ de la soustraction et le signe $\div$ de la division ne sont utilisés ici que pour faciliter la lecture.

4. Ceci signifie « réduite au même dénominateur ».

expression que nous lisons 65,61. Fibonacci détaille aussi l'étape suivante, ce n'est pas indispensable ici.

Ces deux exemples montrent que des nombres que nous qualifierions de décimaux sont bien présents et participent à des calculs arithmétiques avec des notations proches des nôtres.

Non utilisation

Le recours à ces nombres non catégorisés dans l'ouvrage n'est toutefois pas systématique. Aux côtés d'autres préoccupations, le chapitre 14 traite du calcul de racines carrées et, en particulier, de la recherche de valeurs approchées de racines carrées de nombres non carrés. Comme bien d'autres avant lui depuis longtemps, Fibonacci augmente la précision de la réponse en multipliant le nombre dont il cherche la racine carrée par le carré d'un entier simple. La formule $\sqrt{N} = \sqrt{N \times k^2} \div k$ donne une bonne image de la procédure suivie. Le calcul de $\sqrt{7234}$ [2, p. 355] est par exemple remplacé par celui de $\sqrt{72340000}$ qu'il faudra diviser ensuite par 100. Il trouve que $\sqrt{72340000}$ est à peu près $\frac{4975}{17010}8505$.

Pour terminer la procédure, divise 4975 par 17010, ce qui vient est proche d'un quart. Pour la racine de 72340000, tu as donc $\frac{1}{4}8505$. Divise les par 100, il viendra $\frac{1}{400}\frac{1}{20}85$ pour la racine de 7234.

Autant le premier résultat aurait facilement pu conduire à une expression décimale de la valeur cherchée, autant la fin de la procédure prend une autre direction.

Al-Kashi

Un chercheur allemand, Paul Luckey, a étudié les travaux d'Al-Kashi et les a comparés avec ceux de certains de ses prédécesseurs et de quelques successeurs. Ce qui suit est basé sur son ouvrage [3] *Die Rechenkunst bei Ġamšīd B. Mas'ūd al-Kāšī*⁵ qui repose lui-même largement sur la

Clé de l'arithmétique (Miftāh al-hisāb) écrite en 1427 et dont une grande partie est consacrée au système sexagésimal. À aucun moment Al-Kashi ne présente ce qu'il expose comme ses propres résultats.

Dans le système sexagésimal de numération

Depuis son introduction, plusieurs millénaires auparavant, ce système n'a cessé de se perfectionner. Au passage du XIII^e au XIV^e siècle, il était encore couramment utilisé pour les calculs et plus particulièrement en astronomie.

Al-Kashi utilise le mot grade, 360^e partie de la circonférence d'un cercle, pour son unité. Ce mot lui sert toutefois aussi à désigner l'unité pour des nombres « ordinaires », établissant ainsi un lien avec les entiers. Depuis longtemps, toutes sortes d'opérations étaient faites dans le système sexagésimal, additions, soustractions, certaines multiplications et certaines divisions dans le cadre d'arcs de cercle ou d'angles, et les multiplications, divisions et extractions de racines lorsqu'il s'agissait de nombres. Al-Kashi souligne que le système sexagésimal peut conduire à la mise en place de deux suites :

- la suite descendante illimitée constituée des fractions, les minutes, secondes, tierces...
- la suite ascendante illimitée formée des grades augmentés une fois, deux fois, trois fois...

Mis à part pour l'addition et la soustraction, les procédures de calcul recouraient très souvent à la conversion des nombres en jeu du système sexagésimal au système décimal puis la conversion du résultat obtenu dans le système sexagésimal. Une rupture déjà présente avant lui, venue petit à petit depuis l'introduction du système décimal indien de numération, est marquée par Al-Kashi dans la mesure où il mène des calculs intégralement dans le système sexagésimal. Le calcul du produit de 24 15 40 38 tierces par 13 9 51 20 minutes requiert l'utilisation d'une vaste table de multiplication (de 2 à 59) ; il

5. Les citations de ce paragraphe en sont issues.

présente le calcul entre autre sous la forme plus tard appelée *per gelosia* :

Les produits partiels sont lus sur la table qui donne par exemple $51 \times 24 = 20\ 24$ (table) parce que $51 \times 24 = 1\ 224 = 20 \times 60 + 24$ (calcul fait pour élaborer la table). Les autres exemples, multiplications, divisions et extractions de racines, ne sont ni plus difficiles ni immédiats pour nous qui calculons peu en base 60.

Les multiplications et les divisions amènent à des considérations sur les rangs, c'est-à-dire sur les exposants de 60. Elles ne s'attachent pas qu'aux exposants positifs malgré la difficulté supplémentaire de la non-reconnaissance de nombres négatifs et, donc, de l'impossibilité d'en parler autrement qu'avec les noms des rangs, minutes, secondes, etc. et conduisent à des tableaux à double entrée pour en résumer les principaux éléments. On peut les réduire aux formules $a^n \times a^p = a^{n+p}$ et $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ pour tous nombres relatifs n et p et pour tout entier naturel non nul a . De ce fait, des calculs sont effectués en deux temps : d'abord un calcul sur les nombres sans trace d'unité puis la détermination des rangs du résultat.

Comparaison avec le système décimal

Comme lors d'un calcul avec les chiffres indiens dans lequel le passage d'un rang au suivant vers la gauche correspond à une élévation de 10, le passage d'un rang au suivant vers la droite correspond ici à une élévation de 60 [...] et tandis que, dans le premier, la suite des positions est unique, elle est ici constituée de deux suites, l'une du côté des augmentations et l'autre de celui des diminutions, dont les grades occupent la place centrale entre les deux.

Les fractions décimales

De celle-là, nous faisons aussi deux.

Tournant crucial où, selon Al-Kashi, pour faire le pendant des propriétés de la numération sexagésimale, il convient de compléter la suite ascendante des puissances de 10 du système décimal par une suite descendante. De façon analogue à ce qui se pratique dans le calcul des astronomes, il introduit donc une suite de fractions dont les dénominateurs commencent à 10 et se suivent en multipliant le précédent par 10. Ce sont nos dixièmes, centièmes, millièmes... ici appelés dixièmes, deuxièmes de dixième, troisièmes de dixième, etc. Les dixièmes sont obtenus en partageant l'unité en 10 et on poursuit de la même manière avec le passage des dixièmes aux centièmes... Les dixièmes sont à écrire à droite des entiers, les deuxièmes de dixième à droite des dixièmes et ainsi de suite.

Les calculs se font ensuite exactement de la même façon que dans le système sexagésimal à ceci près qu'au lieu de puissances de 60, il ne se trouve ici que des puissances de 10.

Exemples de calcul avec les fractions décimales

- Pour le calcul de l'aire d'un hexagone régulier dont le côté mesure 20 aunes et demie,

ce qui est écrit

entiers	fractions
20	5

, le carré du côté est

entiers	fractions
420	25

. Il faudrait le

multiplier par $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ qu'Al-Kashi remplace par la

valeur approchée

entiers	fractions
2	598076

 . L'aire

cherchée est donc

entiers	fractions
1091	841439

 .

Ce résultat est lu 1 091 et 841 439 sixièmes de dixième dans la lignée de 4 et 861 secondes, lecture de $4^{\circ}14'21''$.

- Autre exemple, $14 \frac{3}{10} \times 25 \frac{7}{100} = 358 \frac{501}{1000}$ qui utilise la méthode *per gelosia*⁶, le résultat

est noté $\begin{array}{r} 358 \\ 501 \\ \hline 1000 \end{array}$:

		2	5	0	7	
1		2	5		7	
4		8	2	0	0	2
3		6	1	5	0	2
3	5	8	5	0	1	

Quelques données concernant la Chine ancienne

Les contextes

Les contextes numérique et métrique sont très favorables à l'émergence de décimaux. Le système de numération et les unités de mesure de longueur sont en effet décimaux depuis longtemps. Dans ce dernier domaine, au III^e siècle, on a :

- 1 *zhang* (toise) = 10 *chi* (pieds)
- 1 *chi* = 10 *cun* (pouces)
- 1 *cun* = 10 *fen* (parts)
- 1 *fen* = 10 *bau*
- 1 *bau* = 10 *hao*
- 1 *hao* = 10 *miao*
- 1 *miao* = 10 *hu*

Tableau 1.

Il n'est pas question d'exposer ici tous les détails du système décimal de numération chinois, aussi le tableau 2 se limitera-t-il aux myriades et

il ne sera pas question du zéro ni *a fortiori* de son rôle. Nettement plus ancien que les données concernant les unités de mesure de longueurs (tableau 1), sous sa forme classique, le système de numération utilise neuf idéogrammes pour les nombres à un chiffre, 0 exclu, et d'autres idéogrammes pour les premières puissances de 10 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	二	三	四	五	六	七	八	九
10	100	1 000	10 000					
十	百	千	万					

Tableau 2.

Leur utilisation

Au contraire de ce que nous faisons dans notre système de numération, il ne suffit pas d'écrire une suite ordonnée de chiffres pour exprimer un nombre. Ainsi, le nombre 24 397 s'écrit-il 二万四千三百九十七 soit (deux) (dix mille) (quatre) (mille) (trois) (cent) (neuf) (dix) (sept). C'est dire que, à l'exception de celui des unités, le rang de chaque chiffre suit ce chiffre. La forme (deux) (dizaines de milliers) (quatre) (milliers) (trois) (centaines) (neuf) (dizaines) (sept) le rend plus compréhensible à notre oreille sans trahir sa nature.

L'expression des mesures de longueur ne fait pas exception puisque les *Neuf chapitres* [4] (III^e siècle), au problème 9.21

Supposons qu'on ait un arbre à une distance inconnue d'une personne, et qu'elle érige quatre gnomons respectivement distants l'un de l'autre de 1 *zhang*. Supposons que les deux gnomons de gauche et ce qu'elle vise soient tous trois alignés. Si elle le (l'arbre) vise à partir du gnomon arrière droit, il pénètre (l'espace entre les deux gnomons avant) à 3 *cun* du gnomon avant droit. On demande combien vaut la distance de l'arbre à la personne.

donnent la mesure 33 *zhang* 3 *chi* 3 *cun* et un tiers de *cun* comme nous pourrions dire 2 mètres 3 décimètres 5 centimètres pour 2,35 m,

6. La figure reproduit fidèlement l'original; celui-ci est probablement fautif car il manque un 0 dans le triangle inférieur droit de l'intersection de la colonne 0 et de la ligne 1, alors qu'il y a un 0 superflu dans le triangle supérieur gauche de l'intersection de la colonne 0 et de la ligne 4.

et comme nous le faisons couramment pour les durées. Les mesures d'autres grandeurs sont exprimées de façon analogue.

Et les décimaux ?

Ce qui précède montre que si le système décimal de numération et le caractère décimal des mesures de longueur semblaient *a priori* présenter un avantage pour arriver simplement à des nombres décimaux, ce n'est pas le cas. Peut-être le fait d'intercaler un mot entre chaque chiffre en numération ou entre chaque nombre pour les mesures de longueur a-t-il limité le caractère favorable de ces systèmes et retardé l'introduction de nombres décimaux.

J.-C. Martzloff [5] signale l'utilisation de sous-unités de mesures de longueur pour des montants monétaires exprimés en sapèques comme 5 889,216 sapèques sous la forme 五貫八百八十九文二分一釐六毫 dans le *Classique arithmétique de Xiahou Yang* (vers le ^ve siècle). Dans cette expression, qui se décompose en (cinq) (ligatures, pour 1 000 sapèques) (huit) (centaines) (huit) (dizaines) (neuf) (sapèques) (deux) (parts) (un) (*li*) (six) (*hao*), c'est le mot sapèque (文) qui tient le rôle de virgule séparatrice de la partie entière 5 889 des chiffres significatifs 2, 1, 6 de la partie décimale. Cette manière d'exprimer des nombres décimaux se retrouve également dans d'autres domaines et conduit parfois à introduire d'autres sous-multiples lorsque la partie décimale est plus longue.

L'extraction de racines carrées conduit au moins dès le ⁱⁱⁱe siècle à une avancée en direction d'une partie décimale. Le commentateur des *Neuf chapitres* Liu Hui mentionne en effet ([4, p. 365]) :

Si on ne « nomme pas (le nombre-produit) avec côté », on ajoute au diviseur déterminé comme avant, pour chercher sa partie décimale (*weishu*). Dans la partie décimale (*weishu*), les (*chiffres*) qui n'ont pas de nom, on les prend comme numérateur : si on rétrograde une fois,

on prend 10 comme dénominateur, si on rétrograde deux fois, on prend 100. Plus on rétrograde vers les place inférieures, plus ces parts sont fines...

La première phrase évoque le cas où l'extraction de la racine carrée (le côté) d'un nombre, le *nombre-produit*, ne donne pas un entier, qu'il y a un reste et que l'extraction, rattachée à la division dans les *Neuf chapitres*, peut être poursuivie. Les chiffres qui n'ont pas de nom sont ceux de la partie décimale, ils n'ont pas de nom comme ceux de la partie entière dénommés dizaines, centaines, etc. La suite est plus facile à suivre : si l'extraction est poursuivie avec l'introduction d'un seul chiffre, ce chiffre sera mis au numérateur d'une fraction de dénominateur 10, ce qui peut par exemple conduire à $1\frac{4}{10}$ comme valeur approchée de $\sqrt{2}$; si on continue avec un chiffre de plus, il en sera de même avec 100 pour dénominateur et ainsi de suite.

À nos yeux, les nombres ainsi obtenus sont bien des décimaux, mais est-ce à dire qu'ils ont le statut particulier que nous leur attribuons et ne sont pas simplement des fraction particulières, comme si l'on prenait $3 + \frac{5}{16}$ pour valeur approchée de $\sqrt{11}$? Rien ne le prouve.

Plus tard, en 1247, Qin Jiushao donne le résultat 寸 $\bigcirc \equiv \top \perp \top \equiv \equiv \equiv$ pour 0,966 44 *cun*. Le zéro est marqué et c'est à nouveau l'unité, le *cun* écrit au-dessus, qui indique la fin de la partie entière du nombre. À noter que les chiffres sont ici tirés alternativement de l'une et de l'autre des deux séries

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

En 1262, Yang Hui incite à transformer les données chiffrées des unités de masse en nombres décimaux. Non décimales, deux de ces unités sont liées par l'égalité 1 *jin* (livre) = 16 *liang* (onces)

ce qui conduit par exemple à « 1 *liang* 6 *li* 2 *hao* et demi » ainsi que « 2 *liang* 1 *fen* 2 *li* et demi » [5, p. 184]. Chacune de ces deux expressions est une égalité. La première signifie que 1 *liang* vaut 0,062 5 *jin* et la seconde que 2 *liang* valent 0,125 *jin* ce qui ne fait aucun doute puisque $1 \text{ liang} = \frac{1}{16} \text{ jin}$ et $2 \text{ liang} = \frac{1}{8} \text{ jin}$. On aura remarqué qu'ici encore les sous-unités utilisées sont celles des mesures de longueur.

Juschkewitsch [6, p. 22] indique que Yang Hui effectue ensuite les calculs avec les nombres transformés.

Un manuscrit d'Immanuel ben Jacob Bonfils (vers 1350)

De cet astronome et mathématicien de Tarascon et de ses environs, seuls quelques tables astronomiques et un court manuscrit dans lequel il introduit les fractions décimales nous sont parvenus. Il commence par celles-ci [7] :

Sache que l'unité est partagée en dix parties [égales] qu'on appelle premiers et que chaque premier est partagé en dix parties [égales] qui sont appelées deuxièmes et ainsi de suite à l'infini.

Sans le moindre exemple, on ne saurait être à la fois plus clair et plus concis. Il enchaîne directement avec les entiers, attirant l'attention du lecteur sur le fait qu'il nomme premiers entiers ceux des dizaines (à partir de 10), deuxièmes entiers ceux de centaines et ainsi de suite à l'infini. À ce stade, la classification en deux catégories de degrés exclut les entiers de la première dizaine, les entiers à un chiffre, dont on ne sait s'ils comprennent 0. Pour les adjoindre, il précise qu'il nomme ces derniers « unités ». Dernière précision : pour les fractions, l'ordre des degrés est croissant, ce qui signifie par exemple que le degré des troisièmes est supérieur à celui des deuxièmes.

Tout ceci revient donc à travailler avec la valeur absolue des exposants de 10 en excluant l'exposant nul.

L'exposé se poursuit avec l'énoncé de règles gé-

nérales d'addition ou de soustraction des degrés lors de la multiplication ou de la division des entiers et des fractions décimales établissant un lien manifeste de type logarithmique entre ces opérations. L'absence de nombres négatifs l'oblige bien évidemment à préciser le sens dans lequel une soustraction doit être faite lors d'une multiplication ou d'une division. Toutes ces propriétés peuvent ici aussi être réduites aux formules $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ et $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ pour tous relatifs non nuls n et p tels que $n + p \neq 0$ et $n - p \neq 0$ respectivement. Ces deux derniers cas où l'on « tombe sur des unités » sont traités à part.

Aucun exemple, ni sur des puissances de 10, ni avec des opérations entre entiers ou entre entiers et fractions décimales, ne vient illustrer ces énoncés généraux.

Sans connaissance d'autres écrits d'Immanuel Bonfils dans ce domaine, force est de constater qu'il n'y a là qu'une ébauche d'un travail sur les nombres décimaux.

En guise de conclusion

Évidemment volontaire, le parti pris de ne pas suivre l'ordre chronologique voulait contrecarrer l'idée selon laquelle les idées et la pensée aient pu suivre ce cheminement de l'un à l'autre des mathématiciens choisis et établir ainsi une progression dans l'histoire des nombres décimaux. Il est en effet bien peu probable que ces textes aient donné lieu à des tirages importants et aient suffisamment circulé pour être connus d'un grand nombre de mathématiciens postérieurs. La présente étude vise donc essentiellement à laisser entrevoir que des préoccupations mathématiques se rejoignent et à montrer une constance dans la réflexion à leur sujet. Ceci amène tout naturellement à la question de *l'air du temps*. Notion bien difficile à cerner, il s'agit ici des questions qui traversent l'esprit de mathématiciens du Moyen Âge qu'ils s'en préoccupent ensuite ou non, qu'ils fassent des recherches directes ou connexes ou non. Il semble que ce soit le cas avec les travaux dont il vient d'être ques-

tion. Leur but n'est pas d'élaborer une théorie mais, soit d'utiliser ces nombres, soit de chercher comment les appréhender, soit de voir à quoi ils pourraient servir.

Cet *air du temps* recouvre deux réalités, l'une concrète, l'autre plus théorique. La première est celle qui a été évoquée à propos du système de mesure de longueur en Chine, la seconde est à rechercher dans les nécessités intrinsèques des calculs auxquels sont confrontés les mathématiciens. La première repose sur une nécessité de calcul élémentaire dans les échanges commerciaux. Mis à part le cas de la Chine, elle est peu présente dans les rapports d'unités de mesure médiévales où, par exemple, une livre (monnaie) vaut vingt sols et chaque sol douze deniers ou bien une livre (masse) fait douze onces, chaque once vingt-cinq deniers de cantar... La seconde se trouve par exemple dans la recherche d'amélioration de la précision dans le calcul de la racine carrée d'un nombre non carré comme le font Fibonacci et Al-Kashi et comme l'ont fait bien d'autres avant eux. Ici, le caractère décimal du système de numération et la simplicité relative des calculs dans ce système conduisent à des nombres décimaux.

Le bilan sur les nombres décimaux non entiers est toutefois mitigé. Il en existe ; ils ne sont pas identifiés comme tels mais sont utilisés et y recourir n'est pas incontournable. Chez Fibonacci, au passage de $\frac{1}{4}$ 8 505 à $\frac{21}{400}$ 85, c'est-à-dire lors de la division de 8 505,25 par 100, est préférée l'écriture fractionnaire $\frac{1}{400} \frac{1}{21}$ 85 alors que, avec ses notations, $\frac{5}{10} \frac{2}{10} \frac{5}{10} \frac{0}{10}$ 85 conviendrait tout aussi bien.

Il reste une étape importante, pointant chez Al-Kashi, celle de faire des décimaux un outil opératoire comme c'est le cas pour les autres catégories de nombres, entiers et fractions.

Pour aller plus loin, sait-on si Simon Stevin, que l'on s'accorde fréquemment à considérer comme l'inventeur des décimaux, avait connaissance

des avancées que nous venons de survoler ? Sa définition (*La disme*, 1585, [8, p. 140])

DÉFINITION III

Et chascue dixiesme partie de l'vnité de commencement⁷ nous la nommons PRIME, son signe est tel ^① ; & chascue dixiesme partie de l'vnité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ^②. Et ainsi des autres chascue dixiesme partie, de l'vnité de son signe precedent, toujours en l'ordre un d'avantage.

interroge tant ses termes sont voisins de ceux d'Immanuel Bonfils et d'Al-Kashi. Cette définition est suivie d'une

EXPLICATION

Comme $3^{\textcircled{1}}7^{\textcircled{2}}5^{\textcircled{3}}9^{\textcircled{4}}$, c'est à dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces 9 Quartes ; & ainsi se pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon ceste definition, lesdicts nombres sont $\frac{3}{10} \frac{7}{100} \frac{5}{1000} \frac{9}{10000}$ ensemble $\frac{3759}{10000}$.

où l'histoire continue à avancer...

Références

- [1] Ahmad Salim Saidan. *The arithmetic of al-Uqlidisi. The story of Hindu-Arabic Arithmetic as told in Kitab al-fusul fial-hisab al-Hindi by Abu al-Hasan Ahmad ibn Ibrahim al-Uqlidisi written in Damascus in the year 341 (A.D. 952/3)*. Dordrecht-Boston : D. Reidel Publishing Company, 1978.
- [2] Fibonacci. *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano*. Pubblicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C.I., 2616, Badia Fiorentina, n° 73 da Baldassarre Boncompagni. Rome, 1857.
- [3] Paul Luckey. *Die Rechenkunst bei Ġamšīd B. Mas'ūd al-Kāšī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens*. Wiesbaden : Deutsche Morgenländische Gesellschaft, Kommissionsverlag Franz Steiner GmbH., 1951.
- [4] Karine Chemla et Guo Shuchun. *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod, 2004.

7. L'unité de la partie entière.

- [5] Jean-Claude Martzloff. *Histoire des mathématiques chinoises*. Paris : Masson, 1987.
- [6] Adolf Pavlovitch Juschkevitch. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Pfalz-Verlag Basel : Edition Leipzig, 1964.
- [7] Solomon Gandz et Sarton George. « The invention of the decimal fractions and the application of the exponential calculus by Immanuel Bonfils of Tarascon (c. 1350) ». In : *Isis* 25 n° 1 (mai 1935). The University of Chicago Press, Chicago, p. 18-45.

- [8] Simon Stevin. *La Disme*. Leyde, 1585.

Michel Sarrouy, retraité, était professeur de mathématiques à l'UFM de l'académie de Montpellier.

ad@mlozere.eu

© APMEP Septembre 2022

*
* *



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2023 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) :

Adresse :

Code Postal : Ville : Pays :

Téléphone : Adresse courriel :

Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) :

Adresse de livraison :

Adresse de facturation :

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1^{er} degré ☐ 2^e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : contactrgpd@apmep.fr.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque

☐ par mandat administratif

☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur *Chorus.pro* ; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :

Date : Signature : Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS
secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552



Sommaire du n° 546



Maths et élèves à besoins particuliers (2)

Éditorial	1	Ouvertures	49
Opinions	3	✦ Géométrie et élèves dyspraxiques — Ludivine Hanssen	49
L'âme vive de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthé et le bureau national de l'APMEP	3	Preuves visuelles — François Boucher	54
✦ Difficultés d'apprentissage en mathématiques ou dyscalculie ? — Marie-Line Gardes	5	Écart à l'indépendance d'événements : un encadrement remarquable — Jean-Baptiste Hiriart-Urruty	59
✦ Pour des élèves à HPI, comment soutenir le goût d'apprendre en mathématiques ? — Line Massé, Marie-France Nadeau & Claudia Verret	12	Paradoxe de Simpson et estimateurs biaisés — Pierre Carriquiry	62
Avec les élèves	19	Récréations	66
La résolution de problèmes au cœur des apprentissages — Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Marie-Françoise Van Troeye & Isabelle Wettendorff (CREM)	19	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	66
✦ Soutenons l'utilisation des doigts en mathématiques — Benoît Bonnet, Nathalie Bonneton-Botté, Hélène Hili, Sonia Jarry, Claire Labesse, Fanny Ollivier, Nolwenn Quelaudren & Nadège Saliot	28	JEUX-Écollège 5, une pépite de géométrie — Sophie Roubin	69
✦ Une séquence sur les angles en ULIS-collège — Claire Chantreuil	39	Au fil du temps	72
Zelliges pythagoriciens — Sébastien Reb	45	Charlotte Angas Scott — Roger Mansuy	72
		Des décimaux avant les décimaux ? — Michel Sarrouy	76
		Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	86
		Une ressource pour l'option mathématiques complémentaires — Charlotte Derouet	88
		Matériaux pour une documentation	91
		Courrier des lecteurs	95



CultureMATH

