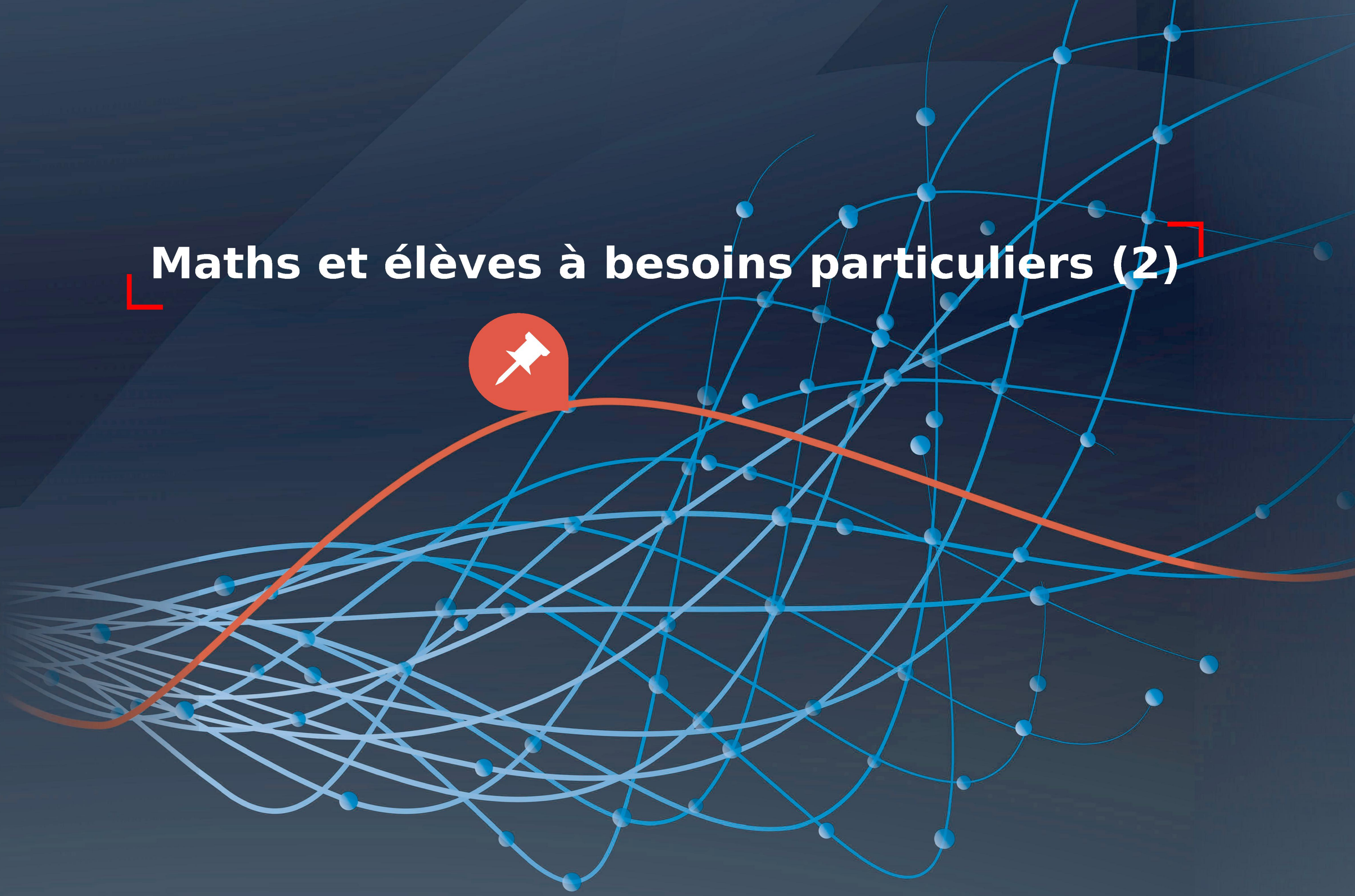
Le bulletin de l'APMEP - N° 546

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2022

Maths et élèves à besoins particuliers (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2022. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Écart à l'indépendance d'événements : un encadrement remarquable

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty souhaite rendre hommage à Paul-Louis Hennequin en nous proposant un article de mathématicien : dans cet article, il revisite et démontre un encadrement remarquable au sujet de l'indépendance de deux événements. Dans la version numérique, il généralise ce résultat en construisant et étudiant un nouvel indicateur de dépendance de plusieurs événements.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Cette note pédagogique est rédigée en hommage à Paul-Louis Hennequin récemment disparu. PLH, comme nous l'appelions familièrement, m'accueillit, avec d'autres de ses collègues, quand je commençais ma carrière d'enseignant-chercheur au département de mathématiques appliquées de l'université de Clermont-Ferrand. Nommé assistant agrégé, je venais de l'enseignement secondaire.

Bien que ne travaillant que partiellement dans des domaines « relevant du stochastique », PLH nous a toujours montré son soutien et son intérêt en assistant à tous les exposés de séminaires que je donnais ; d'ailleurs, c'était aussi le cas à l'endroit des autres conférenciers du département. J'ai eu l'honneur et le plaisir de l'avoir comme membre examinateur de ma thèse de doctorat ès Sciences Mathématiques.

Plus tard, lorsque j'étais professeur à l'université Paul Sabatier de Toulouse, PLH et moi avons continué à avoir des échanges épisodiques, parfois sur un livre que j'avais pu écrire, parfois sur des actions de popularisation mathématique, qu'il appréciait particulièrement. C'est d'ailleurs dans cet esprit que j'ai écrit ce texte.

Écart à l'indépendance, les débuts

« *$P(A \text{ et } B) = P(A)P(B)$ lorsque les événements A et B sont indépendants* » est l'une des premières choses que l'élève ou l'étudiant débutant apprend en cours de probabilités… C'est même la définition de « l'indépendance de deux événements A et B ». Lorsque A et B ne sont pas indépendants, la différence

$$e(A, B) = P(A \text{ et } B) - P(A)P(B)$$

n'est pas nulle…, mais évidemment comprise entre -1 et 1 puisque c'est la différence de deux nombres réels compris entre 0 et 1. On pourrait s'en tenir là et c'est d'ailleurs ce qu'on fait usuellement dans un cours de probabilités…

On pourrait donc penser que « l'écart à l'indépendance » $e(A, B)$ de deux événements A et B peut prendre n'importe quelle valeur entre -1 et 1… Or il n'en est rien : cet écart est toujours compris entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$! C'est en consultant un récent recueil d'exercices d'oraux de concours [1, Exercice 3.7] que j'ai été arrêté par ce résultat… Peut-être l'ai-je appris dans une vie antérieure, en tout cas je l'avais complètement oublié. Aussitôt surgissent les questions : comment le démontrer (si possible de plusieurs façons très différentes) ? Qui a publié le premier ce résultat ? Comment généraliser au cas de n événements ? C'est à cette tâche que nous allons nous atteler.

Cas de deux événements

Comme souvent en mathématiques, mais pas toujours, une fois qu'on sait ce qu'il faut démontrer, on peut s'attaquer à la démonstration… La démonstration dépend du niveau de connaissances préalables dans lequel on se place, ce qui sera le cas ici.

Après quelques recherches bibliographiques et la consultation de collègues, probabilistes ou pas, j'ai pu détecter la première occurrence de ce résultat : l'encadrement et une paire de démonstrations sont dus à Mme Édith Kosmanek en 1996 [2] ; ils sont repris comme exercice dans un livre d'enseignement des probabilités en université la même année [3, p. 66, exercice 18]. Ensuite c'est dans les exercices d'oraux de concours que j'ai vu apparaître ce résultat.

Voici donc le résultat et quelques-unes des démonstrations possibles.

Théorème 1 (É. Kosmanek)

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Alors, l'écart à l'indépendance de A et B, à savoir $e(A, B) = P(A \text{ et } B) - P(A)P(B)$, est encadré comme suit :

$$-\frac{1}{4} \leqslant e(A, B) \leqslant \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Notons que l'on a bien réduit l'encadrement trivial par -1 et 1 signalé au début. De plus, on ne pourra pas faire mieux que (1) : en effet, pour un événement A dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, nous avons $e(A, A) = \frac{1}{4}$ tandis que $e(A, A^c) = -\frac{1}{4}$ (A^c désigne ici et dans la suite l'événement contraire de A).

Passons aux démonstrations de (1).

Nous commençons par la démonstration qui nous paraît la plus simple, de niveau lycée (mais, bien sûr, c'est un avis subjectif).

Démonstration faisant intervenir des probabilités conditionnelles

Niveau lycée, avec l'apport de P. Lassère.

Nous avons

$$\begin{aligned} e(A, B) &= P(A \text{ et } B) - P(A)P(B) \\ &= P(A|B)P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)\big[P(A|B) - P(A)\big]. \qquad (2) \end{aligned}$$

Or $\quad \begin{aligned} P(A) &= P(A \text{ et } B) + P(A \text{ et } B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c). \end{aligned}$

Injectons ceci dans (2), de manière à obtenir :

$$\begin{aligned} e(A, B) &= P(B)\big[P(A|B) - P(A|B)P(B) \\ &\qquad - P(A|B^c)P(B^c)\big] \\ &= P(B)\big[P(A|B)(1 - P(B)) - P(A|B^c)P(B^c)\big] \\ &= P(B)\big[P(A|B)P(B^c) - P(A|B^c)P(B^c)\big]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$e(A, B) = P(B)P(B^c)\left[P(A|B) - P(A|B^c)\right]. \qquad (3)$$

Alors : $P(A|B)$ et $P(A|B^c)$ sont deux nombres réels compris entre 0 et 1, donc

$$\big|P(A|B) - P(A|B^c)\big| \leqslant 1 \,;$$

$P(B)P(B^c)$ est de la forme $x(1-x)$ avec x compris entre 0 et 1, donc majoré par $\max\limits_{x \in [0\,;1]} x(1-x) = \frac{1}{4}$.

L'inégalité $\big|e(A, B)\big| \leqslant \frac{1}{4}$ est bien démontrée.

Remarque

L'expression (3) est, bien sûr, « symétrisable » de manière à aboutir à

$$\begin{aligned} e(A, B) &= e(B, A) \\ &= P(A)P(A^c)\big[P(B|A) - P(B|A^c)\big]. \qquad (4) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il vient immédiatement de (3) que $e(A, B^c) = -e(A, B)$. Cela milite en faveur du fait que la borne supérieure et la borne inférieure dans (1) doivent être opposées ; ce ne sera pas le cas pour plus de trois événements (voir la version numérique de l'article ▶).

Toujours en tirant sur le même fil : A et B sont indépendants (c'est-à-dire $e(A, B) = 0$) si et seulement si A et B^c sont indépendants $\big($puisque $e(A, B^c) = -e(A, B)\big)$.

Vous trouverez deux autres démonstrations niveau licence de ce théorème 1, ainsi qu'un encadrement de l'indicateur pour n événements (théorème 2 et sa démonstration) dans la version numérique de l'article ▶.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Mathématiques*. Vol. 6. 2022.

[2] É. Kosmanek. « Mini-contribution à l'étude de la dépendance probabiliste ». In : *L'ouvert* nº 83 (1996), p. 16-18.

[3] D. Foata et A. Fuchs. *Calcul des probabilités. Cours et exercices corrigés*. Éditions Masson, 1996.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (alias JBHU) est professeur émérite à l'université Paul Sabatier de Toulouse, spécialiste en optimisation. Il est impliqué dans la diffusion des sciences et des mathématiques, en particulier au travers de l'association Fermat Science.

jbhu@math.univ-toulouse.fr

*

* *

Les maths et moi

Sommaire du nº 546

Maths et élèves à besoins particuliers (2)

Éditorial 1

Opinions 3

- L'âme vive de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthe et le bureau national de l'APMEP 3
- Difficultés d'apprentissage en mathématiques ou dyscalculie ? — Marie-Line Gardes 5
- Pour des élèves à HPI, comment soutenir le goût d'apprendre en mathématiques ? — Line Massé, Marie-France Nadeau & Claudia Verret 12

Avec les élèves 19

- La résolution de problèmes au cœur des apprentissages — Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Marie-Françoise Van Troeye & Isabelle Wettendorff (CREM) 19
- Soutenons l'utilisation des doigts en mathématiques — Benoît Bonnet, Nathalie Bonneton-Botté, Hélène Hili, Sonia Jarry, Claire Labesse, Fanny Ollivier, Nolwenn Quelaudren & Nadège Saliot 28
- Une séquence sur les angles en ULIS-collège — Claire Chantreuil 39
- Zelliges pythagoriciens — Sébastien Reb 45

Ouvertures 49

- Géométrie et élèves dyspraxiques — Ludivine Hanssen 49
- Preuves visuelles — François Boucher 54
- Écart à l'indépendance d'événements : un encadrement remarquable — Jean-Baptiste Hiriart-Urruty 59
- Paradoxe de Simpson et estimateurs biaisés — Pierre Carriquiry 62

Récréations 66

- Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 66
- *JEUX-Écollège 5*, une pépite de géométrie — Sophie Roubin 69

Au fil du temps 72

- Charlotte Angas Scott — Roger Mansuy 72
- Des décimaux avant les décimaux ? — Michel Sarrouy 76
- Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 86
- Une ressource pour l'option mathématiques complémentaires — Charlotte Derouet 88
- Matériaux pour une documentation 91

Courrier des lecteurs 95

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr