

Le bulletin de l'APMEP - N° 544

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Avril, Mai, Juin 2022

Mathématiques durables



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro sont joints le BGV n° 224
spécial « Journées Nationales » et l'affiche de ces Journées

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Juin 2022. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à : frederic.deligt2@gmail.com
ou par courrier à :
Frédéric de Ligt
3 rue de la Pierrière
17270 MONTGUYON
Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.*

Frédéric de Ligt

544-1 Problème de dénombrement et takuzu (Patrick David - Cergy)¹

Le takuzu, jeu de la famille du sudoku auquel on peut jouer en ligne sur l'internet, se joue dans un carré de dimension paire ($2n$, $n \in \mathbb{N}^*$) dans lequel figurent déjà dans quelques cases des 0 ou des 1. Le but du jeu est de remplir ce carré en ajoutant des 0 et des 1 et en respectant les trois règles suivantes.

1. Sur toute ligne ou colonne, il doit y avoir autant de 0 que de 1.
2. Il ne peut y avoir plus de deux 0 (ou 1) consécutifs sur les lignes ou les colonnes.
3. Les lignes doivent être toutes différentes, ainsi que les colonnes (cette dernière règle n'est nécessaire que dans les grilles assez difficiles).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a		0						0		1
b				0	0		1		0	
c	0	0		1						
d		0								0
e								1		
f						1				1
g			1							
h		1						1	1	
i	0			0						
j					1	1				

Exemple de takuzu. La solution de cette grille est dans la revue numérique

En principe, les 0 et 1 placés initialement permettent de trouver une solution unique. Cela amène à se poser les questions suivantes.

1. Sur une ligne de takazu de longueur $2n$, combien y a-t-il de dispositions différentes valides, c'est-à-dire vérifiant les règles 1 et 2 ?
2. Si v_n est le nombre de lignes valides pour une ligne de longueur $2n$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{2^{2n}} = 0$.
3. Donner une majoration au plus proche de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

544-2 Pour les amateurs de second degré

Trouver le trinôme du second degré $x^2 + px + q$ (p et q étant réels) pour lequel $\max_{x \in [-1; 1]} |x^2 + px + q|$ est minimum.

¹. Ce problème est un prolongement du problème 535-1 sur le binero.

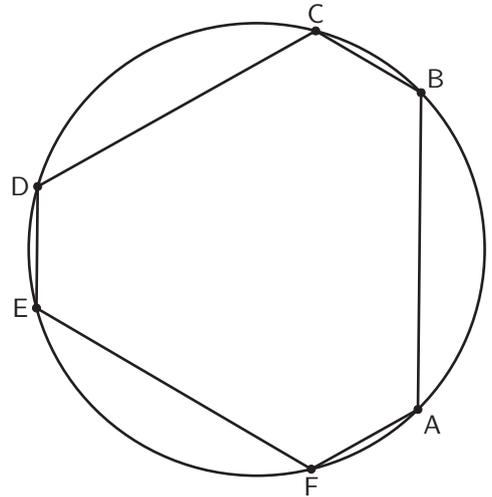




544-3 Un hexagone inscrit (Michel Sarrouy - Mende)

Soit, sur un cercle de rayon 1, un point fixe A et un point variable B tel que $AB < \sqrt{3}$. Appelons direct le sens de rotation de A vers B sur le petit arc de cercle \widehat{AB} .

- L'image de la droite (AB) par la rotation de centre B et d'angle 120° dans le sens indirect recoupe le cercle en C.
 - L'image de la droite (BC) par la rotation de centre C et d'angle 120° dans le sens indirect recoupe le cercle en D.
 - L'image de la droite (CD) par la rotation de centre D et d'angle 120° dans le sens indirect recoupe le cercle en E.
 - L'image de la droite (DE) par la rotation de centre E et d'angle 120° dans le sens indirect recoupe le cercle en F.
- On joint F et A.



Montrer que :

1. les points C et E sont fixes ;
2. le segment [FA] a même longueur que les segments [DE] et [BC] ;
3. les angles en F et en A de l'hexagone ABCDEF valent 120° .

544-4 Le problème de Hadwiger-Nelson sous contrainte

« Combien de couleurs sont nécessaires au minimum pour que deux points du plan, séparés par une distance égale à 1, soient toujours de couleurs différentes ? » est une question encore non complètement résolue ; même si, depuis 2018, grâce à Aubrey de Grey, on sait que ce nombre est compris entre 5 et 7.

Plus modestement, on peut se demander ce qu'il advient de la question si on se restreint à un carré unité, intérieur et frontière comprise, au lieu de considérer le plan.



Figure 1. Aubrey David Nicholas de Grey.

À propos des problèmes parus précédemment

542-1 Le triangle de Bottema

Deux cas étaient à considérer selon que les points D et E étaient ou non de part et d'autre de la droite (AB). Dans un cas on trouvait que les angles en A et en B valaient tous deux 36° , solution trouvée par Alain Bougeard (Les Lilas) et Ludovic Jany (Bolquère), et dans l'autre qu'ils valaient 12° et 132° , solution trouvée par Jacques Vieulet (Ibos), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Stéphane Carvalho (Le Perreux-sur-Marne) et Hervé Chastand (Saint-Aubin-de-Lanquais). Dans tous les cas, leur travail



portait uniquement sur les angles à partir d'une figure illustrant un des cas. Pierre Renfer en abordant le sujet par les coordonnées barycentriques, a pu obtenir les deux solutions.

542-2 Une inégalité genre olympiades

Pour établir cette inégalité, Stéphane Carvalho (Le Perreux-sur-Marne) utilise deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; Jean-Christophe Laugier (Rochefort) passe une seule fois par l'inégalité de Cauchy-Schwarz mais aussi par l'inégalité arithmético-géométrique ; Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) reste uniquement sur la comparaison des moyennes arithmétiques, géométriques et quadratiques. Patrick David (Cergy) et Jacques Vieulet (Ibos) se ramènent à l'étude d'une fonction de deux variables sur le carré $[0; 1]^2$ à valeurs dans \mathbb{R} . Ils concluent en prouvant que le minimum absolu en $(1; 1)$ vaut 0. Par ailleurs Patrick David montre à l'aide de contre-exemples que toute généralisation de cette inégalité au-delà de trois variables est vaine.

542-3 La onzième médiété

Seul Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) a répondu complètement à cette question en considérant la suite auxiliaire $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Il examine dix cas selon les valeurs possibles de u_1 et obtient finalement que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive quand u_1 est compris strictement entre $\frac{1}{\varphi^2}$ et φ où φ désigne le nombre d'or.

542-4 Tiré d'un vieux numéro du Journal de mathématiques élémentaires

L'énoncé demandait la construction d'un pentagone équilatéral inscrit dans un triangle isocèle ABC de sommet principal A. Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) aborde le problème par les longueurs tandis que Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) utilise, comme à son habitude, les coordonnées barycentriques. Il ressort trois cas de leurs deux études. Si la base BC est inférieure à la moitié de AB ou de AC, il n'existe pas de pentagone équilatéral inscrit ; en revanche, si la base BC est strictement comprise entre la moitié et le double de AB ou AC, alors il est possible de construire un tel pentagone ; de plus, celui-ci sera unique si le triangle n'est pas équilatéral. Alain Bougeard (Les Lilas), Jacques Vieulet (Ibos) et Hervé Chastand (Saint-Aubin-de-Lanquais), quant à eux, proposent la même construction que celle présentée le 15 mars 1886 dans le *Journal des Mathématiques Élémentaires* dont est issu le problème. Cela consiste, à partir des côtés [AB] et [AC], à construire un pentagone équilatéral puis à le réduire par une homothétie convenable. Alain Bougeard et Hervé Chastand vont plus loin et examinent l'existence de pentagones équilatéraux croisés. Alain Bougeard a observé, à l'aide de GeoGebra, que le problème, à partir d'un triangle quelconque, engendre une discussion sur un grand nombre de possibilités.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse :  (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

© APMEP Juin 2022

Sommaire du n° 544

Mathématiques durables

Éditorial

1

Mais qui a tué Alan Turing? — Stéphane Mouez & Katia Vergnaud 51

Opinions

L'enseignement des mathématiques dans le nouveau lycée général — Bureau national de l'APMEP 3

Changement de regard sur l'enseignement de la géométrie — Christine Mangiante-Orsola 7

Avec les élèves

Le développement durable à partir de tâches complexes — Stéphanie Thinet 17

Enjeux environnementaux — Sylvain Etienne 20

Bain ou douche? — Claude Fahrer 27

« Eau et hygiène » en classe de Cinquième — Sabine Gougeon & Isabelle Lefèbre 32

Manipulations incarnées avec le matériel de base ou le géoplan — Olivier Le Dantec 38

Quand la géométrie se met en « œuvres »... — Cristine Géobard 46

Un tour de magie en CM2 — Sarah Leleu Maati & Mathilde Scandolari 59

Ouvertures

Petite enquête sur la logique dans la scolarité — François Boucher 65

Éléments théoriques sur l'implication — Zoé Mesnil 71

Mathématiques et épidémie — Pierre Carriquiry 77

Récréations

Célébrons de façon durable nos années qui passent... — Dominique Souder 82

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 85

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 88

Matériaux pour une documentation 90



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr