

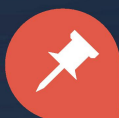
Le bulletin de l'APMEP - N° 544

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Avril, Mai, Juin 2022

Mathématiques durables



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro sont joints le BGV n° 224
spécial « Journées Nationales » et l'affiche de ces Journées

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Juin 2022. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Utiliser ou démontrer une implication

Partie 2 : éléments théoriques sur l'implication

Dans cet article une réflexion théorique autour de différents aspects de l'implication éclaire différentes notions comme les valeurs de vérités des propositions, la quantification universelle, la contraposée. Des points de vigilance pour l'enseignement sont signalés.

Zoé Mesnil

Dans une première partie de cet article publiée dans un numéro précédent de la revue [1] ont été indiquées trois activités autour de l'implication, qui peuvent être proposées à partir de la fin du collège et jusqu'au début de l'enseignement supérieur. Ces activités sont propices à de nombreuses discussions, lors desquelles différentes conceptions de l'implication [2], différents usages, corrects ou non, vont apparaître. Il est important d'identifier ces différents points de vue et bien sûr d'aider les élèves à abandonner des usages non corrects. Cette deuxième partie de l'article¹ a pour but d'apporter des connaissances théoriques sur l'implication, outil qu'en tant qu'enseignants de mathématiques nous manipulons le plus souvent de façon correcte, mais sans forcément avoir réfléchi à ce qui fonde ces usages, et objet que nous ne connaissons pas toujours bien.

Généralités sur l'implication

Beaucoup des énoncés que nous rencontrons en mathématiques sont de la forme « pour tout $x \in E$, si $A[x]$ alors $B[x]$ »², où $A[x]$ et $B[x]$ sont des propositions qui parlent de la variable x (on dit aussi que la variable x est libre dans ces propositions [3]). Un tel énoncé est formé d'une

quantification universelle portant sur la variable x et d'une implication construite à partir des deux propositions $A[x]$ et $B[x]$. On appelle souvent implication l'ensemble d'un tel énoncé, y compris la quantification universelle, notamment parce qu'elle est souvent implicite, nous y reviendrons. Dans cet article également, le mot « implication » désigne parfois une implication entre deux propositions, sans quantification universelle, parfois une implication universellement quantifiée.

Commençons par le point de vue propositionnel : à partir de deux propositions A et B , on peut former l'implication $A \Rightarrow B$. La proposition A est appelée prémisses de l'implication (il vaut vraiment mieux éviter le mot « hypothèse », on trouve aussi parfois « antécédent ») et la proposition B est appelée conclusion de l'implication. Le mot « conclusion » est le pendant de « hypothèse » et il aurait mieux valu pouvoir l'éviter, mais l'usage n'a pas consacré d'autre terme qui aurait été le pendant de « prémisses » (on trouve aussi parfois « conséquent » associé à « antécédent »).

Il est suggéré d'insister beaucoup auprès des élèves sur le fait que ce n'est pas parce qu'une implication est vraie que sa conclusion doit l'être !

1. Le contenu de cette deuxième partie reprend ce qui a été écrit pour la brochure *Logique au collège* publiée sur le site du groupe Logique de l'IREM de Paris , brochure finalisée par l'ensemble du groupe à partir de textes écrits par René Cori, maître de conférence en logique à l'Université Paris Diderot, aujourd'hui retraité.

2. Il y a bien sûr éventuellement plusieurs variables, et donc plusieurs quantificateurs universels.



Cela renvoie à la distinction entre « si... alors... » et « ..., donc... » que nous expliciterons plus loin.

Le connecteur IMPLIQUE est défini par la table de vérité suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cette table de vérité nous permet de vérifier que :

- la négation de $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalente à $(A \text{ ET NON } B)$. En effet, $A \Rightarrow B$ est fausse dans le seul cas où la prémisse A est vraie et où la conclusion B est fausse ;
- $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalente à $(\text{NON } A \text{ OU } B)$;
- $A \Rightarrow B$ n'est pas logiquement équivalente à $B \Rightarrow A$;
- le fait que $A \Rightarrow B$ soit vraie ne garantit ni que A est vraie, ni que B est vraie.

Les deux premières lignes de la table de vérité font l'unanimité. Tout le monde s'accorde à dire que la proposition $A \Rightarrow B$ est fausse lorsque la prémisse A est vraie et que la conclusion B est fausse, et que cette proposition est vraie lorsque la prémisse et la conclusion sont toutes les deux vraies.

Ce sont les deux dernières lignes qui provoquent le trouble. **L'idée que la proposition $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque sa prémisse est fausse, et ce quelle que soit la valeur de vérité de sa conclusion, est difficilement admise.** Une manière un peu brutale, mais assez efficace, de lever le doute, est d'examiner les tables de vérité correspondant aux trois autres configurations possibles pour ces deux dernières lignes :

A	B	$A ??? B$ (possibilité I)	$A ??? B$ (possibilité II)	$A ??? B$ (possibilité III)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Or ces trois tables nous sont familières. La table donnée en possibilité II est celle de l'équivalence $A \Leftrightarrow B$, la table donnée en possibilité III est celle de la conjonction $(A \text{ ET } B)$, et la table donnée en possibilité I est celle de la « deuxième projection », c'est-à-dire du connecteur qui à A et B associe B . De toute évidence, aucune d'elles ne peut convenir comme table de l'implication : la proposition $A \Rightarrow B$ n'est équivalente ni à B , ni à $A \Leftrightarrow B$, ni à $(A \text{ ET } B)$.

La cause est donc entendue ? « Pas si vite ! » disent certains, qui estiment qu'on peut très bien décider que, lorsque la prémisse est fausse, la proposition $A \Rightarrow B$ a une valeur indéterminée. Ceux-là se refusent à envisager le cas d'une implication (de la forme $A \Rightarrow B$) dont la prémisse serait fausse, prétendant qu'une telle situation ne se rencontre jamais en mathématiques. Une telle position n'est pas tenable : chacun conviendra par exemple que la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} (x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1)$$

est vraie.

Mais admettre cela oblige aussitôt à admettre que les trois propositions suivantes doivent être vraies :

$$3 \geq 1 \Rightarrow 3^2 \geq 1$$

$$0 \geq 1 \Rightarrow 0^2 \geq 1$$

$$-2 \geq 1 \Rightarrow (-2)^2 \geq 1$$

Or, si pour la première on est dans le cas inoffensif « VRAI $\Rightarrow$ VRAI », la deuxième correspond à « FAUX $\Rightarrow$ FAUX » et la troisième à « FAUX $\Rightarrow$ VRAI ». Les trois lignes de la table de vérité où le connecteur $\Rightarrow$ prend la valeur VRAI sont donc bel et bien mises en œuvre en pratique.

Une autre manière de convaincre les sceptiques est de leur demander dans quels cas une proposition de la forme $A \Rightarrow B$ est fausse, ou, ce qui revient essentiellement au même, de les inviter à examiner la négation de cette proposition. **Montrer que A est vraie et que B est fausse est la seule manière de convaincre que $A \Rightarrow B$ est fausse.**



Expression « Si... alors... » et quantification universelle implicite

En mathématiques en général et au collège particulièrement, nous utilisons l'expression « Si... alors... » plutôt que le symbole $\Rightarrow$ ou le terme « implique ». Par ailleurs, cette expression est utilisée entre deux propositions qui ont au moins une variable, par exemple « Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ ». Cette proposition est déclarée fausse par une grande majorité d'élèves, d'enseignants de mathématiques, et de chercheurs en mathématiques, preuve à l'appui : 2 est un contre-exemple. Mais elle laisse dans l'embarras quelques personnes qui hésitent à lui attribuer une valeur de vérité déterminée (et notamment des élèves de lycée[4]). Ont-elles complètement tort d'hésiter ? Pas tant que cela : regardons cette proposition comme une « simple » implication, c'est-à-dire comme la proposition

$$\langle (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1 \rangle,$$

dans laquelle la variable x est libre. Pour la valeur $x = 1$, cette proposition est évidemment vraie, comme pour la valeur $x = 3$ d'ailleurs. Pour la valeur $x = 2$, elle est fausse. Elle est donc bien vraie pour certaines valeurs prises par la variable et fausse pour d'autres, il y a bien là de quoi hésiter. Alors est-ce que tous les autres se trompent ? Pas vraiment non plus, ceux-là lisent cette proposition comme une implication universellement quantifiée, c'est-à-dire « Pour tout réel x , $(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1$ », qui est bien fausse, tout le monde s'accordera facilement là-dessus.

La pratique en mathématiques est effectivement de lire les implications (qu'elles soient formulées avec IMPLIQUE, la flèche, ou l'expression « Si... alors... ») comme étant universellement quantifiées sur toutes les variables libres. Il convient au minimum de mettre les élèves au courant de cette pratique, mais l'on peut aussi, pour éviter toute ambiguïté, expliciter cette quantification (ce qui aura l'avantage qu'elle ne soit pas oubliée si l'on est amené à formuler la négation).

Réciproque et contraposée

À partir de l'implication $A \Rightarrow B$, nous définissons :

- sa réciproque, $B \Rightarrow A$;
- sa contraposée, $\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A$.

Cette définition syntaxique de la réciproque peut donner l'impression que formuler une réciproque est un pur jeu de forme qui consiste à échanger prémisses et conclusion. Ce n'est pas si simple, car les implications sont souvent formulées sous la forme « si..., alors ... » où ce qui est à la place des pointillés n'est pas à strictement parler une proposition. Par exemple, regardons l'implication « si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle », nous voyons bien que « un quadrilatère a ses diagonales de même longueur », et « c'est un rectangle » ne sont pas des propositions qui peuvent être comprises de façon autonome. Nous ne proposerons donc pas pour réciproque « si c'est un rectangle alors un quadrilatère a ses diagonales de même longueur » (bien que ce soit grammaticalement correct), mais plutôt « si un quadrilatère est un rectangle, alors il a ses diagonales de même longueur ». La remarque vaut encore plus pour la contraposée, où l'apparition de la négation provoque une transformation supplémentaire de la structure des phrases utilisées initialement.

Notons que dans l'exemple choisi, il y a une quantification universelle implicite, qui est conservée dans la réciproque. Les termes « réciproque » et « contraposée » sont indifféremment utilisés pour des implications avec ou sans quantification universelle. Quand il y a quantification universelle, elle est conservée dans la réciproque et dans la contraposée. Dans l'écriture de la contraposée, une difficulté est de différencier le traitement de la quantification universelle qui porte sur l'implication, qui restera une quantification universelle, et d'une éventuelle quantification universelle présente dans la prémisses ou dans la conclusion, qui deviendra une quantification existentielle par passage à la négation.



Toute implication est logiquement équivalente à sa contraposée, c'est-à-dire qu'en toute circonstance, elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Une implication et sa réciproque ne sont pas nécessairement logiquement équivalentes ! Il est donc légitime, en présence d'une implication universellement quantifiée vraie, de la forme « pour tout x , $A[x] \Rightarrow B[x]$ », de se demander si la réciproque « pour tout x , $B[x] \Rightarrow A[x]$ » est également vraie.

« Si... alors... » et « ..., donc... »

Les deux phrases suivantes signifient-elles la même chose ?

$$\begin{aligned} \text{Si } (x - 1)(x - 2) = 0 ; \text{ alors } x = 1 \text{ ou } x = 2. \\ (x - 1)(x - 2) = 0 ; \text{ donc } x = 1 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Prenons deux phrases analogues de la vie courante, par exemple :

Si j'ai 40 °C de fièvre, alors je ne vais pas travailler.
J'ai 40 °C de fièvre, donc je ne vais pas travailler.

Nous voyons bien que la deuxième ne peut être prononcée que par une personne qui a 40 °C de fièvre et qui ne va pas travailler (ou par une personne qui ne dit pas la vérité !) alors que la première peut être prononcée par une personne qui n'a pas de fièvre. La seule chose que nous savons sur la première phrase c'est qu'elle ne peut pas être prononcée par une personne qui a 40 °C de fièvre et qui va quand même travailler (sauf encore une fois à considérer qu'elle ment).

De quelles informations disposons-nous si nous savons que la proposition « Si A alors B » est vraie ? Cela ne nous dit rien sur les valeurs de vérité de A et de B . La seule information que nous ayons c'est qu'il n'est pas possible que A soit vraie et qu'en même temps B soit fausse.

De quelles informations disposons-nous en affirmant « A , donc B » ? En fait il y en a trois :

- A est vraie ;
- B est vraie ;
- on a de bonnes raisons d'avoir déduit la deuxième information de la première (par exemple parce que l'on sait que la proposition « si A alors B » est vraie).

« Si A alors B » est une proposition alors que « A donc B » n'en est pas une puisqu'elle met en jeu un locuteur qui déduit la vérité de B à partir de celle de A (entre autres).

Utiliser une implication

Deux schémas de déduction décrivent les raisonnements corrects lorsque l'on sait qu'une implication est vraie :

- Le schéma du *modus ponens* (ou règle de détachement) est le suivant :

Si A alors B ,
or A ,
donc B .

Il peut être associé à la tautologie³ suivante :
 $((A \Rightarrow B) \text{ ET } A) \Rightarrow B$

Ce schéma de déduction est sans doute le plus fréquent en mathématiques et plus encore au collège. Notons que nous utilisons en fait le plus souvent une implication universellement quantifiée et que le schéma est alors plutôt le suivant, dans lequel a est une variable, une constante ou un nom d'objet plus complexe (une expression algébrique par exemple) :

Pour tout x , si $A[x]$ alors $B[x]$,
or $A[a]$,
donc $B[a]$.

- Le schéma du *modus tollens* est le suivant :

Si A alors B ,
or NON B ,
donc NON A .

Il peut être associé à la tautologie suivante :
 $((A \Rightarrow B) \text{ ET NON } B) \Rightarrow \text{NON } A$.

3. Une tautologie est une proposition toujours vraie construite à partir de propositions élémentaires en utilisant uniquement les connecteurs (« toujours » signifiant *quelles que soient les valeurs de vérité des propositions élémentaires*).



Une autre façon d'arriver à la conclusion NON A à partir de l'hypothèse NON B et de l'implication « Si A alors B » est d'appliquer le schéma du *modus ponens* à partir de la contraposée « Si NON B alors NON A ». Dans la classe, deux pratiques sont possibles :

1. lorsqu'un théorème de la forme « Si A alors B » est établi dans le cours, nous disposons immédiatement d'un autre théorème, « Si NON B alors NON A », qui est sa contraposée. Nous pouvons alors appliquer le *modus ponens* à l'un ou l'autre de ces deux théorèmes ;
2. lorsqu'un théorème de la forme « Si A alors B » est affirmé dans le cours, nous pouvons appliquer le *modus ponens* ou le *modus tollens*.

Quelle que soit la pratique choisie, il est important de souligner qu'une implication vraie permet de faire une déduction dans deux situations : celle où la prémisses est vraie, celle où la conclusion est fausse⁴. En dehors de ces deux cas, on ne peut rien conclure !

Par exemple à partir de la proposition vraie suivante : « pour tout entier naturel n , si n est un multiple de 4 alors n est pair » on peut faire les deux raisonnements corrects suivants :

- p est un multiple de 4 donc p est pair ;
- p n'est pas pair donc p n'est pas un multiple de 4.

En revanche, les deux raisonnements suivants ne sont pas corrects :

- p est pair donc p est un multiple de 4 ;
- p n'est pas un multiple de 4 donc p n'est pas pair.

Démontrer une implication

Pour démontrer qu'une implication « Si A alors B » est vraie, en nous référant à la table de vérité donnée au début de cet article, nous constatons qu'il suffit de vérifier que nous n'avons pas A vraie et B fausse. D'où la forme classique d'une telle démonstration : elle commence par « supposons A » et se conclut par « donc B ».

4. Et c'est bien d'abord en situation que les élèves sont invités à l'apprendre, il n'est pas nécessaire de décrire ces schémas, encore moins de les nommer.

Dans la pratique, nous sommes amenés à démontrer des implications universellement quantifiées « pour tout $x \in E$, si $A[x]$ alors $B[x]$ », et nous aurons alors :

- à introduire une variable « fraîche », c'est-à-dire une variable qui n'est pas déjà utilisée, qui désigne un élément de E sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse, appelé parfois « élément générique » ;
- à supposer que cet élément vérifie la propriété A ;
- à démontrer que cet élément vérifie la propriété B .

Souvent, les deux premières étapes sont faites en une seule phrase : « soit $x \in E$ tel que $A[x]$ ». Et il n'est pas nécessaire de faire une deuxième partie de la démonstration qui commencerait par « soit $x \in E$ tel que NON $A[x]$ », sous prétexte qu'il faudrait examiner ce qui se passe pour tous les éléments de E , puisque de toute façon, pour un élément $a \in E$ tel que NON $A[a]$, l'implication $A[a] \Rightarrow B[a]$ est vraie.

Ce tour d'horizon sur l'implication aura montré des multiples facettes de ce terme, qui peut désigner un connecteur (on parle de la table de vérité de l'implication), une proposition de la forme « $A \Rightarrow B$ », sans quantification, ou encore une proposition de la forme « pour tout $x \in E$, $A[x] \Rightarrow B[x]$ », comportant une quantification universelle.

Un énoncé tel que « si n est un multiple de 4 alors n est pair » sera lu comme une proposition universellement quantifiée, quand bien même la quantification n'apparaît pas explicitement. Encore une fois, cette pratique n'est pas spontanément partagée par certains élèves. Et même pour des personnes plus aguerries, l'implicite de cette quantification peut amener à oublier que la négation d'une telle proposition commence bien par « il existe un entier n tel que... ».



Regardons maintenant la réciproque, « si n est pair alors n est un multiple de 4 ». Plusieurs élèves proposeront un contre-exemple correct pour montrer qu'elle est fausse, à savoir un entier pair qui n'est pas un multiple de 4. Pourtant, nombreux sont les élèves qui proposeront également pour négation de cette réciproque une implication, par exemple « si n est pair alors n n'est pas un multiple de 4 », ou « si n n'est pas pair alors n n'est pas un multiple de 4 », ou même la contraposée, « si n n'est pas un multiple de 4 alors n n'est pas pair ». À nous alors d'expliciter le lien entre la production d'un contre-exemple et la négation : le contre-exemple montre que la proposition « il existe un entier n tel que n est pair et n n'est pas un multiple de 4 » est vraie, et cette proposition, dont la vérité permet de conclure à la fausseté de l'implication initiale, en est la négation.

Références

- [1] Z. Mesnil. « Utiliser ou démontrer une implication ». In : *Au fil des maths. APMEP* n° 542 (octobre-décembre 2021). , p. 58-64.
- [2] V. Deloustal-Jorrand. « L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs ». In : *Petit x* n° 55 (2000-2001). , p. 35-70.
- [3] F. Hérault et al. « À propos de quantification : quelques activités de logique dans nos classes ». In : *Petit x* n° 100 (2016). , p. 35-65.
- [4] C. Hache et E. Forgeux. « Vrai ou faux ? Parlons-en ! ». In : *Au fil des maths* n° 528 (avril-juin 2018). , p. 49-54.



Zoé Mesnil est maîtresse de conférences en mathématiques à l'université de Paris Cité ; elle est membre du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR).

zoe.mesnil@u-paris.fr

© APMEP Juin 2022

Sommaire du n° 544



Mathématiques durables

Éditorial

1

Mais qui a tué Alan Turing ? — Stéphane Mouez & Katia Vergnaud 51

Opinions

L'enseignement des mathématiques dans le nouveau lycée général — Bureau national de l'APMEP 3

Changement de regard sur l'enseignement de la géométrie — Christine Mangiante-Orsola 7

Avec les élèves

✦ Le développement durable à partir de tâches complexes — Stéphanie Thinet 17

✦ Enjeux environnementaux — Sylvain Etienne 20

✦ Bain ou douche ? — Claude Fahrer 27

✦ « Eau et hygiène » en classe de Cinquième — Sabine Gougeon & Isabelle Lefèbre 32

Manipulations incarnées avec le matériel de base ou le géoplan — Olivier Le Dantec 38

Quand la géométrie se met en « œuvres »... — Cristine Géobard 46

Ouvertures

Petite enquête sur la logique dans la scolarité — François Boucher 65

Éléments théoriques sur l'implication — Zoé Mesnil 71

Mathématiques et épidémie — Pierre Carriquiry 77

Récréations

✦ Célébrons de façon durable nos années qui passent... — Dominique Souder 82

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 85

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 88

Matériaux pour une documentation 90



CultureMATH

