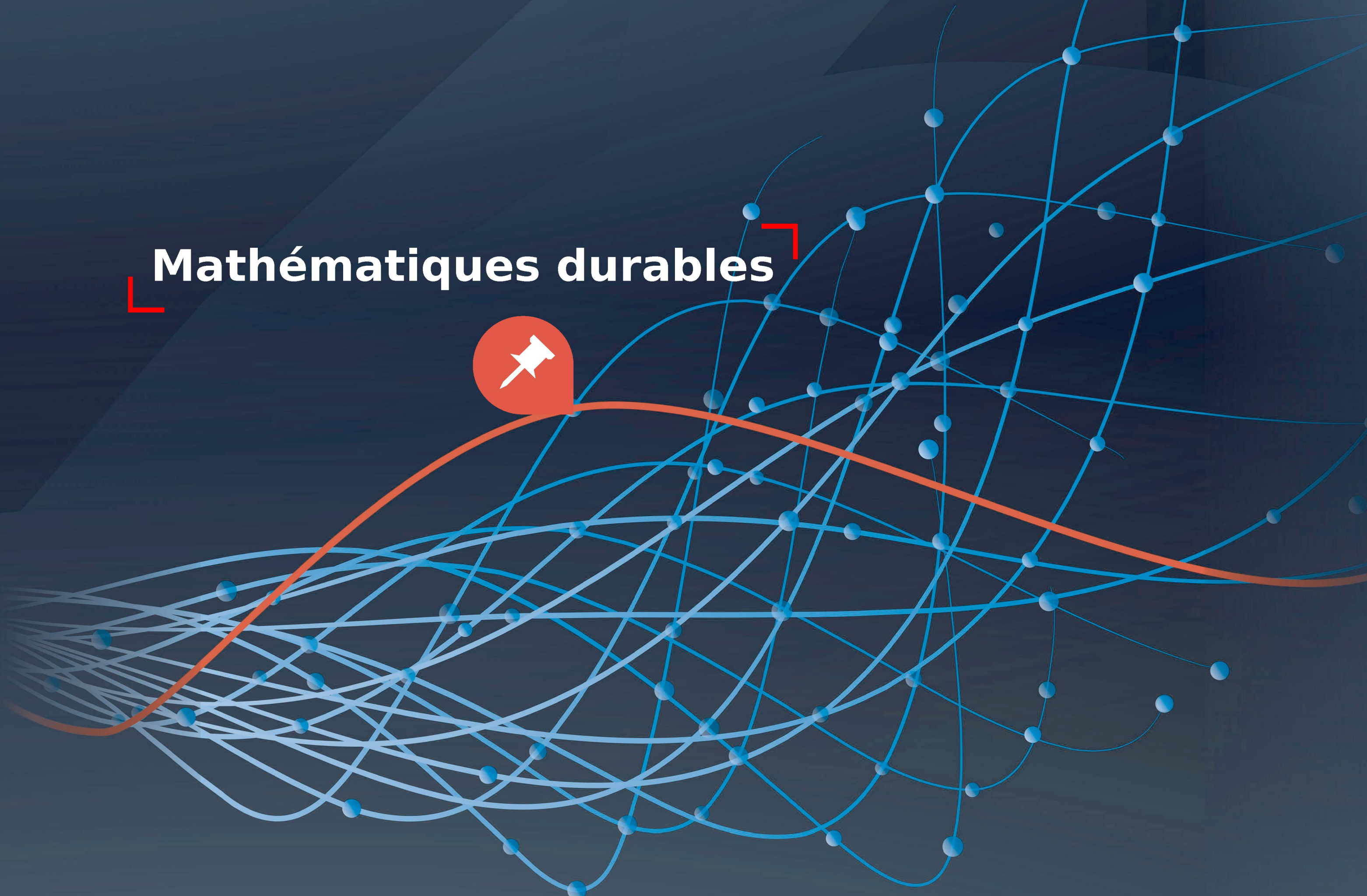
Le bulletin de l’APMEP - N° 544

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université

Édition Avril, Mai, Juin 2022

Mathématiques durables



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro sont joints le BGV nº 224
spécial « Journées Nationales » et l'affiche de ces Journées

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Juin 2022. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

AU FIL DES MATHS

Manipulations incarnées avec le matériel de base 10 ou le géoplan

Dans un précédent article [1], Olivier Le Dantec nous a proposé une réflexion autour de la manipulation, en distinguant manipulations incarnées et manipulations catalysatrices… Après les réglettes Cuisenaire, zoom sur le matériel de base 10 et le géoplan !

Olivier Le Dantec

D'autres outils permettent de faire des manipulations incarnées : le boulier, le géoplan, le matériel de base 10, les polydrons… Dans cet article, je vous propose de poursuivre la réflexion sur la manipulation en mathématiques avec deux autres outils qui ont été testés, en classe mais aussi auprès des étudiants dans le cadre de leur formation en master MEEF, le matériel de base 10 et le géoplan.

Après avoir parcouru quelques recommandations officielles sur la place du matériel en classe, nous examinerons son utilisation avec les élèves en difficulté. Enfin, nous questionnerons la relation temporelle entre les mathématiques et les manipulations. Comment dépasser ces manipulations ?

La place du matériel en classe

Le matériel dédié aux mathématiques a singulièrement disparu des préoccupations de beaucoup d'enseignants et de chercheurs pendant plus de 30 années. On observe récemment un regain d'intérêt pour ces outils. Une conférence de consensus organisée en 2015 par le CNESCO et l'IFE sur le thème « nombres et calcul au primaire » se clôt par des recommandations. La première de ces recommandations est ainsi formulée :

> *À l'école maternelle, la diversité des situations dans lesquelles les enfants ont à manipuler des objets doit être fréquente et suffisamment variée pour leur offrir différents chemins à emprunter pour construire la représentation des premiers nombres. Cette manipulation ne doit pas se limiter à l'école maternelle. À l'école élémentaire, manipuler des « fractions concrètes » (parties d'un disque en bois…) permet aux élèves de mieux appréhender le sens de ce concept difficile : par exemple, des recherches ont montré que la manipulation de ces « fractions en bois » permet aux élèves de diminuer les erreurs du type* $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{3}{7}$.

Plus récemment, le rapport Villani-Torossian pose un diagnostic sur les difficultés que rencontre l'enseignement des mathématiques en France. Il préconise aussi un retour à la manipulation en classe.

> *Il est alors important de développer la manipulation de matériels pédagogiques pour l'apprentissage du calcul, des opérations, des formules géométriques en 2D ou 3D, etc. (jetons, cubes emboîtables, matériel de base 10, bouliers, réglettes colorées, planches à clous avec élastiques ou géoplans, mosaïques de formes géométriques, tangrams, solides à remplir avec de l'eau ou du sable, etc.) (§ 5.3) [1].*

On voit que l'invitation à manipuler est importante et que l'argument du sens est central. Des chercheurs travaillent aussi sur le matériel. Récemment la revue *Grand* ℕ a publié un article sur une expérimentation

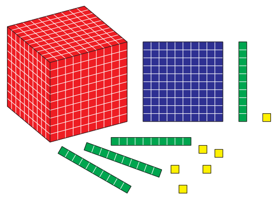
1. *Manipulations incarnées avec des réglettes*. Olivier Le Dantec. *Au fil des maths* nº 543. Mars 2022.

dans des écoles publiques par des enseignants qui s'inspirent du mouvement Montessori. La réflexion sur le matériel y joue un rôle prépondérant [2]. Il semblerait qu'une utilisation régulière du matériel soit un élément d'autoformation important. Je fais la même observation avec les étudiants de l'INSPÉ de Nice. Confrontés à des manipulations réelles, ils se posent des questions didactiques pertinentes, questions qui sont souvent plus difficiles d'accès sans ce support concret. C'est par exemple le cas quand il s'agit de synchroniser des manipulations du matériel de base 10 avec un calcul posé. La compréhension profonde de l'algorithme est nécessaire pour que les mouvements de ces objets accompagnent le calcul.

Le matériel de base 10

Le matériel de base 10 est constitué de cubes « unité », de barres « dizaine », de plaques « centaine » et de grands cubes « millier ». Souvent, la barre, la plaque ou le grand cube gardent la trace des cubes qui les constituent et sont présentés comme une agglomération de petits cubes. Ce matériel a été popularisé par Dienes, un mathématicien hongrois dans les années 60.

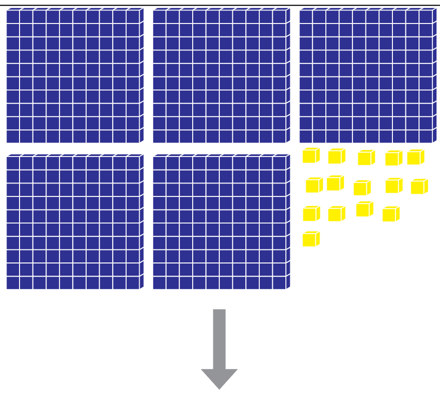
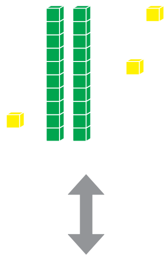
Ainsi, la barre de 10 montre encore les dix cubes qui la constituent, la plaque 100, les 100 cubes etc. Parfois ce matériel est multicolore, parfois il est constitué d'une seule couleur. Si ce matériel est multicolore, un conseil de bon sens est d'utiliser pour vos unités, dizaines, centaines et milliers les mêmes couleurs que celles du matériel de base 10. J'ai pu observer, plusieurs fois, qu'une négligence sur ce point pratique avait des effets importants.

	1146
Les différents éléments agglomérés	Le nombre correspondant écrit avec le même code de couleur

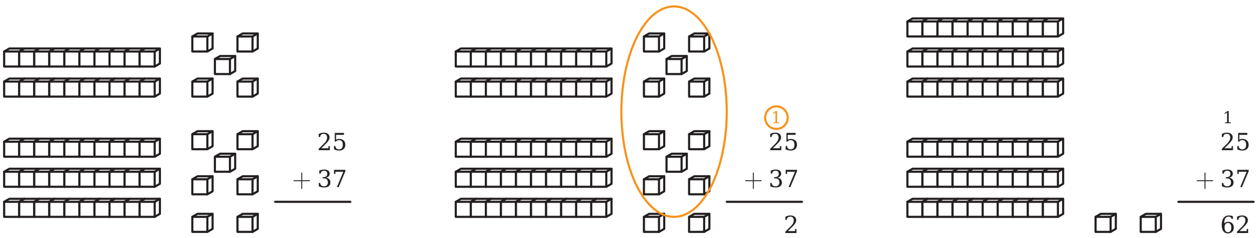
Ce matériel sera bien évidemment utilisé pour des groupements échanges (dix petits cubes pour une barrette « dizaine » par exemple, ou l'inverse, une barrette « dizaine » contre 10 petits cubes). Il faut noter que les séries vendues dans le commerce sont en général insuffisantes pour un travail en classe efficace. Certains lots, par exemple, ne contiennent que 10 barrettes de 10. Il faudra donc alors au moins deux lots pour un travail pertinent.

Avec le matériel de base 10, une activité très simple et fondamentale consiste à proposer des cartes recto-verso avec, d'un côté le matériel de base 10, de l'autre le nombre écrit en chiffres. Quand l'élève reçoit la carte côté matériel, il doit écrire le nombre correspondant, parfois après avoir fait des regroupements. Quand l'élève reçoit la carte côté nombre, il doit créer le nombre avec le matériel.

Cette activité a le mérite d'être autocorrective. Elle correspond très bien à un travail en ateliers ou à une activité autonome.

Carte qui ne peut être utilisée que dans le sens « matériel vers écriture chiffrée » car elle propose des groupements.	Carte qui peut être utilisée dans les deux sens : du matériel vers l'écriture chiffrée et inversement.
 515	 23

Le matériel de base 10 est aussi un bon support d'illustration des opérations posées. Il est possible de synchroniser les manipulations du matériel avec l'effectuation de l'algorithme. Dans la vidéo [2], on verra comment, dans une addition posée de 25 + 37, la signification de la retenue est illustrée par un groupement-échange qui se fait avec le matériel. On retrouve cette proposition d'illustration à la page 28 du *Guide pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*.



Explicitation de l'addition posée à l'aide d'un matériel de numération.

Comme le signale la recommandation de la conférence de consensus, la manipulation est souvent cantonnée aux classes maternelles. Comme si l'entrée dans l'écriture permettait de s'en passer. Avec les élèves plus grands, elle n'est proposée qu'aux élèves en difficulté. C'est une observation que j'ai souvent faite. L'appel à manipuler en mathématiques est entendu comme un appel à manipuler avec une seule catégorie d'élèves.

Manipulation et élèves en difficulté

Cette utilisation de la manipulation est un lieu commun, pourtant il y a là deux implicites qui méritent d'être questionnés.

Le premier implicite est que les élèves qui ne sont pas en difficulté ne tirent pas profit de la manipulation. Ils peuvent « s'en sortir » sans manipulation. Or j'ai pu observer que des élèves sans difficultés particulières, voire des élèves très avancés, prenaient plaisir à manipuler et qu'ils apprenaient plus vite et mieux les concepts en jeu quand ce type de support leur était proposé. Avec ces élèves, le passage entre le

2. Vidéo accompagnant le manuel *Manipuler pour comprendre au cycle 2* [3].

mouvement des objets matériels et la signification symbolique de ces mouvements se fait facilement. Ce passage a certes besoin d'être accompagné et explicité, mais il est vite compris. Les élèves se trouvent alors assez contents d'exprimer leurs idées mathématiques ou d'effectuer des calculs avec des supports originaux.

Le second implicite, souvent considéré comme une évidence, est l'efficacité des manipulations avec les élèves en grande difficulté. Une idée qu'interroge le livre d'André Tricot sur l'*Innovation pédagogique* [4]. Ce livre parcourt quelques lieux communs de l'éducation et il interroge en particulier l'efficacité de la manipulation. On trouve dans la synthèse, une idée essentielle pour notre problème :

« *Tous les travaux que je viens d'évoquer montrent qu'apprendre en faisant est parfois efficace et parfois non, mais ils présentent, me semble-t-il, un point commun : le principal facteur critique réside dans les connaissances préalables des élèves. Avec les élèves les plus avancés dans l'apprentissage, les apprentissages par l'action sont généralement efficaces ; avec les élèves les moins avancés, ce n'est pas souvent le cas. Selon la théorie de la charge cognitive (Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011) l'apprentissage par l'action représente un coût cognitif supplémentaire : les élèves doivent mobiliser leur attention sur ce qu'il y a à faire et sur ce qu'il y a à apprendre. Quand il y a peu à apprendre, parce que les élèves sont déjà bien avancés, alors le coût cognitif de l'activité est abordable.* » [4].

Dans la conférence inaugurale du colloque de la COPIRELEM à Blois en 2017, Teresa Assude aborde la même problématique. Elle décrit comment l'appel universel à manipuler est entendu dans diverses situations avec des élèves à besoins particuliers : classe ULIS, élèves handicapés et APC [3]. Sa conclusion est assez proche de celle d'André Tricot : « *Notre point de départ a été le fait que le recours au concret et à la manipulation est vu comme une priorité et un leitmotiv dans la justification du choix des situations proposées aux élèves handicapés ou en difficulté, situations qui sont souvent le plus simplifiées possibles. Or la manipulation ne suffit pas pour faire des mathématiques.* » [5].

Ainsi, il semblerait que les élèves en difficulté ne tirent pas toujours profit des manipulations. En tout cas, ces observations et ces résultats nous invitent à être prudents. La maîtrise didactique des outils de manipulation doit être plus grande avec les élèves en difficulté et il est sans doute déraisonnable de commencer des manipulations avec les seuls élèves qui risquent de ne pas en comprendre les enjeux.

Mon intuition est que les manipulations sont efficaces quand elles sont installées dans la classe sur le long terme, que tous les élèves sont familiers de ces outils. Dans ce cas, **reprendre des manipulations déjà vues avec des élèves en difficulté sera sans doute une aide conséquente.**

En revanche, si, comme on l'observe souvent, les manipulations ne sont proposées qu'aux seuls élèves en difficulté, qui doivent alors découvrir et les concepts mathématiques en jeu et les relations entre ces concepts et le matériel, il y a une forte probabilité que la surcharge cognitive rendra inutile ce temps d'accompagnement. D'autant que la manipulation n'est qu'une étape qui n'existe que pour être dépassée. On imagine mal un individu se déplacer avec son matériel de base 10 pour accompagner son addition posée. Si le matériel parait utile pour entrer dans la signification de l'écriture symbolique, comment faire en sorte que les élèves puissent s'en passer ? Ce dépassement est une étape didactique importante.

La manipulation et son dépassement

Compter en utilisant le matériel de base 10 comme instrument, pour comprendre ou effectuer des calculs, n'a évidemment qu'une portée limitée. Même si cet outil permet d'aller plus loin que les réglettes, il

3. Activités Pédagogiques Complémentaires.

devient vite limité à partir de 2 000 (il n'y a souvent qu'un seul grand cube rouge dans le matériel de base 10).

Mais il existe une raison plus fondamentale qui invite à se passer du matériel : on ne fait vraiment des mathématiques que lorsque l'on **dépasse** les manipulations. L'activité mathématique est une activité symbolique : mettre des galets dans un pot pour compter ses moutons permet effectivement de garder une mémoire de la collection. Mais ce n'est pas une activité mathématique.

Le dépassement de la manipulation peut d'ailleurs être mis en scène. Une fois les manipulations effectuées par les élèves, elles peuvent être désignées par une image ou évoquées par des mots. Ainsi, avant de basculer vers une écriture purement symbolique, une période de transition est possible, où les manipulations sont encore là, mais de manière moins directe.

Deux possibilités au moins s'offrent pour assurer ce dépassement.

Première possibilité : la manipulation et ses enjeux sont en place pour les élèves. L'enseignant peut alors assumer seul les manipulations mais derrière un paravent. Il renvoie alors vers des manipulations qui existent mais qui ne peuvent être vues. Ainsi, il déclenche l'activité mentale qui correspond aux manipulations que l'on appellera de manière générale **images mentales**. Cette expression n'est sans doute pas tout à fait adéquate car le terme « image » pourrait faire penser à une photographie alors qu'il s'agit plutôt d'un film, film où des processus, des déplacements sont à l'œuvre. Ce dépassement de la manipulation est déjà largement pratiqué en classe : c'est ce que tout enseignant de Grande Section ou de CP fait quand il met ou enlève des jetons dans un gobelet opaque avant de demander combien de jetons sont présents dans le gobelet.

L'enseignant met 4 jetons dans le gobelet. Puis il en enlève deux. Il demande alors combien de jetons sont présents dans le gobelet.

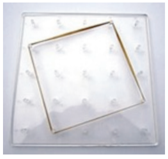
Seconde possibilité : la manipulation est toujours proposée à l'élève mais le résultat qui était énoncé après la manipulation doit maintenant être énoncé avant. Cette anticipation sur le résultat de la manipulation est encore une occasion de solliciter les **images mentales**. Dans le film *L'as des réglettes*, on voit un élève modifier le tapis du nombre 12, en enlevant une réglette à droite. Il énonce en même temps qu'il enlève l'opération qu'il illustre : 12 − 5 = 7 ; 12 − 8 = 4…. Cet élève lit la valeur des réglettes qui sont placées devant lui, son énoncé suit la manipulation. Puis son voisin est invité à remettre les réglettes manquantes. Cette fois, il annonce le résultat avant de placer la réglette en question.

L'élève annonce 12 − 5 font 7 et il enlève en même temps la réglette 5. Ici, il y a simultanéité de ce est dit et de ce qui est fait.

L'élève annonce 7 et 5 font 12 puis il va chercher la réglette 5 dans la boite pour compléter la réglette 7 déjà présente. Il peut alors vérifier les longueurs. La manipulation arrive après l'énoncé.

Mais la manipulation ne doit pas toujours être dépassée. C'est le cas par exemple quand on utilise le géoplan. Ce matériel très simple est un espace d'expression des idées géométriques. Ces idées géométriques ne s'exprimeraient pas mieux ailleurs (mentalement par exemple), puisque ce sont justement les contraintes spécifiques du géoplan qui font que les problèmes deviennent intéressants.

Le géoplan

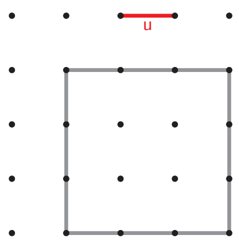
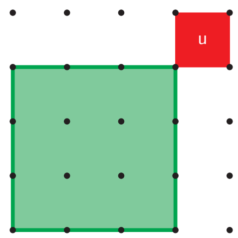
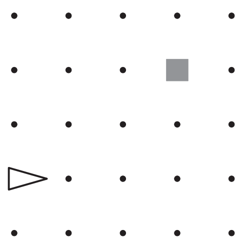
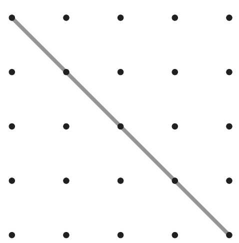
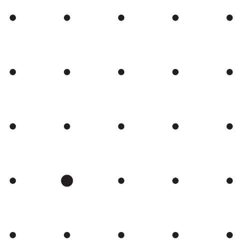
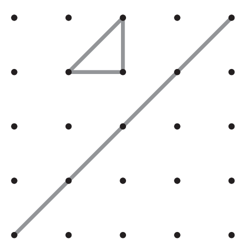


Le géoplan a été inventé par Caleb Gategno dans les années 1950. C'est, le plus souvent, un plateau de forme carré avec 25 clous répartis en 5 rangées. D'autres versions existent, avec plus ou moins de clous, mais le principe reste inchangé : on utilise un élastique pour matérialiser des figures géométriques.

Cet outil est immédiatement adopté par les élèves ; il n'est pas besoin, comme avec les réglettes *Cuisenaire*, d'une période de familiarisation. Il permet surtout d'installer naturellement la démarche d'essai-erreur, chaque tentative étant facilement reprise et modifiée.

C'est un espace de réflexion géométrique très riche et il permet de traiter presque toutes les notions du programme de l'école primaire.

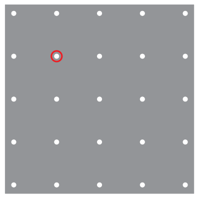
Quelques exemples

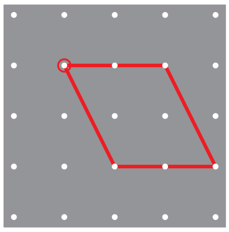
Créer un polygone de périmètre donné.	Créer un polygone d'aire donnée.	Coder ou décoder des déplacements.
Crée sur ton géoplan un carré de périmètre égal à 12 u. Dessine ta réponse. 	Crée sur ton géoplan un carré d'aire égale à 9 u. Dessine ta réponse. 	Le mobile doit atteindre le point d'arrivée. Crée le chemin le plus court sur ton géoplan. Reproduis-le sur la fiche. Puis, code le chemin à l'aide des instructions élémentaires. 
Tracer des droites parallèles ou des droites perpendiculaires à une droite donnée.	**Création de figures sous contraintes (ici des triangles rectangles ayant un sommet donné).**	**Créer une figure symétrique d'une figure donnée.**
Avec des élastiques, construis une droite parallèle et deux droites perpendiculaires à la droite. Reproduis ensuite sur ta fiche tes constructions. 	Sur ton géoplan, crée le plus possible de triangles rectangles à partir du sommet indiqué. Vérifie avec ton équerre. Puis reproduis-les sur ta fiche. 	Place deux élastiques comme sur le dessin. Place ensuite un troisième élastique pour représenter le triangle symétrique. 

Cet outil peut se fabriquer en classe, ou se commander : son coût est dérisoire (on trouve des lots de six géoplans à 12 €). Un géoplan est suffisant pour deux élèves. C'est bien sûr un outil qui s'adapte très bien au travail en autonomie ou à une organisation en ateliers.

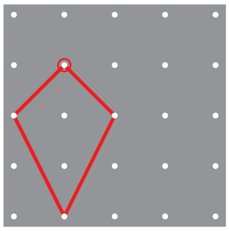
Le concept de losange et le géoplan

Prenons un exemple très simple de problème que l'on peut proposer avec le géoplan. Ce problème est énoncé ci-contre et vous êtes invités à le résoudre avant de lire ce qui suit.

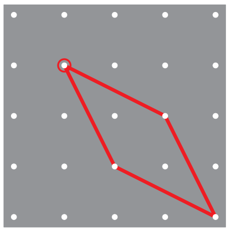
Problème : tracer tous les losanges non carrés dont un sommet est le sommet rouge.	



Les contraintes du géoplan — ici la nécessité de placer les sommets sur les « clous » — font l'intérêt du problème. Cette contrainte permet de différencier des polygones qui auront exactement les propriétés demandées et les polygones qui seront proches des polygones demandés. On observe souvent la proposition suivante : un parallélogramme est proposé parce que les longueurs de ces côtés adjacents sont proches.



Cette possibilité de création de figure permet aussi de s'apercevoir que certains concepts ne sont pas précisément connus. Le problème donne lieu à des productions de type « cerf-volant ». L'élève ne retient alors des propriétés du losange que les diagonales perpendiculaires et il en fait une définition personnelle du losange.



Ces solutions erronées sont aussi produites par des enseignants en formation. Si des adultes intelligents ayant des connaissances de géométrie commettent cette erreur, ce n'est pas parce qu'ils ignorent le losange. Mis en situation de tri de figures, où la consigne aurait été d'isoler les losanges d'une série de polygones, ils auraient sans doute exclu le cerf-volant. Mais la création de figure sous contrainte est une étape plus exigeante dans la maîtrise des concepts géométriques. Les figures fausses ainsi produites sont d'ailleurs une bonne occasion d'expliciter les propriétés géométriques des figures : le losange a quatre côtés de même longueur. Et il n'y a qu'un seul losange non carré qui peut être construit (voir la solution ci-contre).

Conclusion

Maria Montessori défendait l'utilisation du matériel en mathématiques, qu'elle définissait comme « abstraction matérialisée » [6]. Dans les écoles qui se réclament du courant Montessori, la pratique de la manipulation est ancienne et ancrée. Elle utilise des outils bien spécifiques. Comme les partisans de ce courant pédagogique, je suis convaincu de l'importance du matériel dédié en classe pour l'apprentissage des mathématiques. Si je me distingue (un peu) de cet usage du matériel, c'est que la tradition semble y jouer un rôle prépondérant, laissant peu de place à l'expérimentation et à l'innovation.

En écrivant ces lignes, j'espère au contraire avoir réussi à vous convaincre de l'importance du matériel en classe, et surtout de l'importance de tester ce matériel, de se l'approprier en formation comme en classe. Si vous pensez finalement qu'il faut utiliser d'autres outils que ceux que j'ai proposés, ou utiliser différemment ces outils, le but de cet article sera justement atteint : réintroduire le matériel disparu dans les classes du premier degré pour des manipulations incarnées et vivantes : explorées par des enseignants, découvertes en formations, partagées sur les réseaux….

Bref, cet article espère contribuer au rétablissement d'une culture de la manipulation en mathématiques.

Références

[1] Charles Torossian et Cédric Villani. *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. partie 5.2, les ressources matérielles. 12 février 2018, p. 57-58.

[2] Marie-Line Gardes et Philippine Courtier. « Quelle manipulation, représentation et communication dans les ateliers Montessori de première numération ? » In : *Grand* $\mathbb{N}$ nº 101 (2018).

[3] Olivier Le Dantec et al. *Manipuler pour comprendre au cycle 2*. 2019.

[4] André Tricot. *L'innovation pédagogique*. Collection Mythes et réalités. Retz, 2017.

[5] Teresa Assude. « Relations entre systèmes sémiotiques, milieux et techniques mathématiques : malentendus, hybridité, inventivité ». In : *44e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles*. Épinal, France (juin 2017).

[6] Maria Montessori. *La découverte de l'enfant : pédagogie scientifique*. Desclée De Brouwer, 2016.

[7] Caroline Poisard. « Les objets matériels, l'exemple du boulier chinois ». In : *Petit x* nº 68 (2005).

Versions en ligne des outils et quelques ressources pour ces outils

On trouve de nombreux outils en ligne dans le `Math Apps center`, notamment le géoplan et le matériel de base 10.

Ces outils sont intéressants pour un partage en classe des solutions trouvées par les élèves ou pour un moment de synthèse ou d'institutionnalisation. Mais ils ne sauraient remplacer les outils physiques auprès des élèves.

Olivier Le Dantec est formateur de mathématiques à l'INSPÉ de Nice. Il a écrit et dirigé chez Nathan les deux ouvrages *Manipuler pour comprendre au cycle 2* et *Manipuler pour comprendre au cycle 3*.

olivier.le-dantec@univ-cotedazur.fr

Sommaire du nº 544

Mathématiques durables

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr