

Le bulletin de l'APMEP - N° 543

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2022

Dites-le avec des images !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2022. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

L'algorithme du sapeur



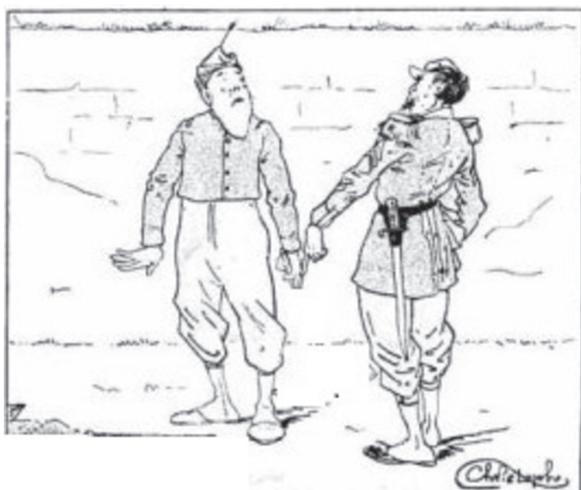
Sur les traces du sapeur Camember, Robert March nous invite à étudier les empilements de boulets et la réunion de tels empilements.

Robert March

Considérations sur la façon de ranger des boulets de canon



La perplexité du sapeur Camember



Le sergent Bitur, ne sachant pas comment occuper ses conscrits, a mis en demeure le sapeur Camember¹ de ranger les boulets de canon stockés dans la cour de la caserne. Ils forment deux tas complets mais le sergent n'en démord pas.

1. *Les facéties du sapeur Camember* est l'œuvre de Georges Colomb, alias Christophe, aussi facétieux qu'éminent scientifique (1856–1945). On le verra ici, et quoi qu'on ait pu en dire, Camember n'a rien d'un simple d'esprit. On doit également à cet auteur *L'idée fixe du savant Cosinus*.

« Sapeur, rangez-moi ces boulets : je ne veux voir qu'un seul tas ! et complet ! »

Avant de s'atteler à la tâche, vu que chaque boulet ne pèse pas moins de 4 livres, notre brave sapeur préférerait s'assurer que c'est possible de réunir ces deux tas en un seul. Le premier tas a 5 étages et 5 boulets en ligne au sommet ; le second 4 et 4.

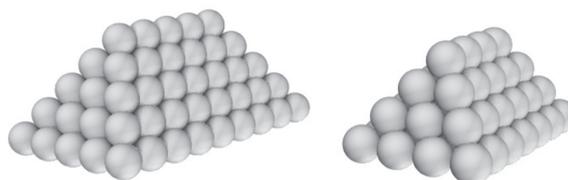


Figure 1. Les deux tas à réunir en un seul.

« Voyons tout d'abord ce qu'il en est des pyramides à base carrée, se dit-il : celle à deux étages



L'algorithme du sapeur

comporte $1 + 2 \times 2 = 5$ boulets ; celle à trois étages $5 + 3 \times 3 = 14$ boulets ; celle qui est à quatre étages contient $14 + 4 \times 4 = 30$ boulets et celle à cinq étages $30 + 5 \times 5 = 55$ boulets. Pour la suivante, il faut encore ajouter 6×6 à 55, ce qui donne 91 boulets. »

Précisons ici que notre sapeur n'est pas allé plus loin dans sa scolarité que l'école primaire, mais il connaît ses tables (!) et sait faire des multiplications et des divisions simples (sans virgule, précise-t-il...).

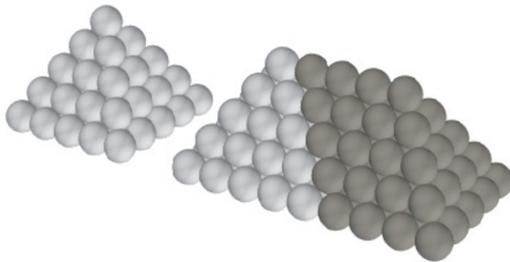


Figure 2. On passe de la pyramide carrée de 5 étages, composée de 55 boulets, au tas de 5 étages et 5 boulets en ligne au sommet, en ajoutant 4 triangles de 15 boulets.

« Je vais maintenant calculer le nombre de boulets de chaque tas. »

Pour le premier, Camember part de la pyramide à 5 étages, de 55 boulets et rajoute sur un côté 4 triangles de $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ boulets.

Il fait ses comptes : $55 + 4 \times 15 = 115$ boulets.

Pour le deuxième, il complète la pyramide à 4 étages avec 3 fois 10 boulets ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$) pour un total de $30 + 3 \times 10 = 60$ boulets. Soit, au total, 175 boulets.

Il s'agit maintenant de réorganiser ces 175 boulets en un seul tas. Il cherche donc s'il existe un tas de 175 boulets à 5 ou 6 étages. La pyramide à 5 étages comptant 55 boulets, il divise $175 - 55 = 120$ par 15, il trouve 8 et ça tombe juste ! Donc, avec 5 étages et 9 boulets au sommet, l'affaire est bouclée ! Pour autant, notre sapeur ne s'arrête pas en si bon chemin. Avec 6 étages, en divisant $175 - 91 = 84$ par 21, il trouve 4 et ça marche aussi ! Il y a donc une deuxième solution à 6 étages et 5 boulets au sommet.

Camember, soucieux de s'économiser, après avoir fait le compte du nombre de boulets à soulever pour chaque étage, choisit la première solution :

1^{re} solution : 16 boulets à monter au 2^e étage ; 12 au 3^e ; 8 au 4^e et 4 au 5^e.

$$16 \times 1 + 12 \times 2 + 8 \times 3 + 4 \times 4 = 80.$$

2^e solution : 13 au 2^e ; 11 au 3^e ; 9 au 4^e ; 7 au 5^e et 5 au 6^e : $13 \times 1 + 11 \times 2 + 9 \times 3 + 7 \times 4 + 5 \times 5 = 115$.

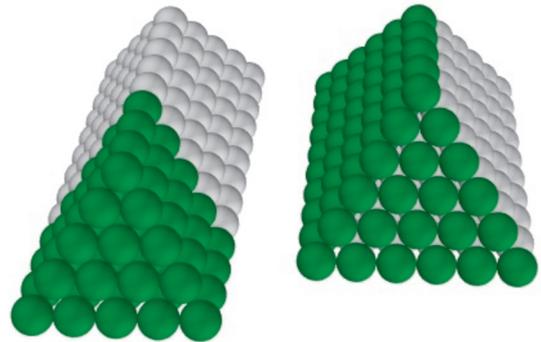


Figure 3. Les deux tas de 175 boulets (en vert, les 60 boulets déplacés dans chaque cas).

L'algorithme du sapeur

Suivons la démarche de Camember.

Soit $B(n, p)$ le nombre de boulets d'un tas donné :

n = nombre d'étages du tas ;

p = nombre de boulets alignés au sommet.

Calcul de $B(n, p)$

Par récurrence sur p

Calculons d'abord $B(n, 1)$, le nombre de boulets d'une pyramide à n étages :

$$B(n, 1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

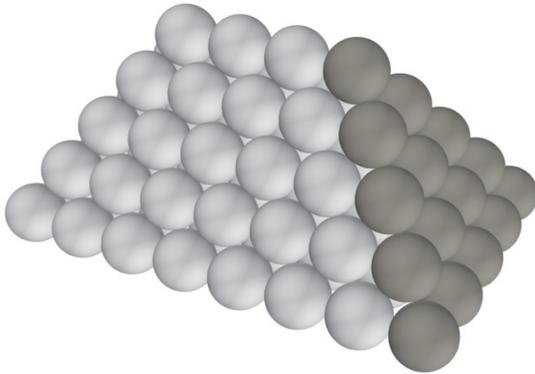


Figure 4. On passe d'un tas ($n = 5$, $p = 3$) à un tas ($n = 5$, $p = 4$) en ajoutant un triangle de 15 boulets.

On passe de $B(n, 1)$ à $B(n, 2)$, de $B(n, 2)$ à $B(n, 3)$, ..., de $B(n, k)$ à $B(n, k + 1)$ en ajoutant r boulets, avec

$$r = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il s'agit donc d'une suite arithmétique de 1^{er} terme $B(n, 1)$ et de raison r .

$$\begin{aligned} B(n, p) &= \sum_{k=1}^n k^2 + (p-1) \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (p-1) \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Et finalement :

$$B(n, p) = \frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{6}.$$

Par récurrence sur n

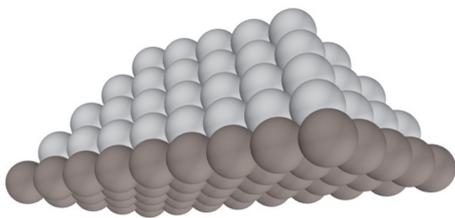


Figure 5. On passe de $B(4, 5)$ à $B(5, 5)$ en ajoutant 45 boulets.

On passe de $B(1, p)$ à $B(2, p)$ en ajoutant $2(p+1)$ boulets; puis de $B(2, p)$ à $B(3, p)$ en ajoutant $3(p+2)$ boulets; et de $B(k-1, p)$ à $B(k, p)$ en ajoutant $k(k+p-1)$ boulets.

$$\begin{aligned} B(n, p) &= \sum_{k=1}^n k(k+p-1) \\ &= \sum_{k=1}^n [k^2 + (p-1)k] \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 + (p-1) \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

On retrouve bien la même formule.

La réunion de deux tas en un seul

Il s'agit de déterminer si un nombre N est une valeur possible de $B(n, p)$ et, le cas échéant, les valeurs correspondantes de n et p . L'équation $B(n, p) = N$ est une équation à deux inconnues, n et p , entiers naturels certes, mais du 3^e degré en n , ce qui ne facilite pas son étude. On va donc s'en remettre à l'algorithme de notre sapeur, en décidant d'écartier les valeurs trop triviales $n = 1$ et $n = 2$, parce qu'il faut quand même que ça ait l'air d'un tas de boulets!

Algorithme du sapeur

On saisit la valeur de N , ici 280.

Algorithme du sapeur

```
def Sapeur(N):
    def CalculB(n):
        return n*(n+1)*(2*n+1)//6
        # // est le quotient entier
    n = 3
    solution = [N] # initialisation plus simple
    B = CalculB(n)
    while (B < N):
        D = N - B
        m = n*(n+1)//2
        if D % m == 0:
            p = D//m + 1 # pas besoin de int
            solution = solution+[[n,p]]
            # utilisation de la concaténation des
            # listes plutôt que de la méthode
            # append
            # liste [n,p] au lieu du tuple (n,p)
            # (hors-programme)
        n = n+1
        B = CalculB(n)
    return solution
```



À propos d'une observation du sapeur Camember

Prévoyant, le sapeur dresse un tableau du nombre de boulets composant chaque tas en faisant varier n (le nombre d'étages) de 3 à 10 et p de 1 à 10.

$p \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	14	30	55	91	140	204	285	385
2	20	40	70	112	168	240	330	440
3	26	50	85	133	196	276	375	495
4	32	60	100	154	224	312	420	550
5	38	70	115	175	252	348	465	605
6	44	80	130	196	280	384	510	660
7	50	90	145	217	308	420	555	715
8	56	100	160	238	336	456	600	770
9	62	110	175	259	364	492	645	825
10	68	120	190	280	392	528	690	880

Dans ce tableau, certains nombres n'apparaissent pas, d'autres une ou deux fois. Notre sapeur considère dans le tableau les nombres qui apparaissent deux fois : 50, 70, 100, 175, 196, 280 et 420.

Il remarque qu'il s'agit dans chaque cas de deux tas qui n'ont qu'un étage de différence. Serait-ce toujours le cas? Cherchons les solutions de l'équation : $B(n, p) = B(n + 1, p')$.

$$\frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+3p'-2)}{6}$$

soit

$$\begin{aligned} n(2n+3p-2) &= (n+2)(2n+3p') \\ 2n^2+3pn-2n &= 2n^2+4n+3p'n+6p' \\ 3(p-p'-2)n &= 6p' \\ p &= \frac{2p'}{n} + p' + 2 \end{aligned}$$

Pour n donné, tout p' multiple de n convient (ou multiple de $\frac{n}{2}$ quand n est pair). On a donc une infinité de solutions pour tout n , certaines pouvant être quadruples, quintuples, etc.





Par exemple :

280 : (4, 26), (5, 16), (6, 10), (7, 6);

1 120 : (4, 110), (5, 72), (6, 50), (7, 36), (14, 2).

Pour tout observateur curieux, les conjectures ne manquent pas.

Ces considérations n'étaient certes pas à la portée du sapeur Camember mais elles auraient certainement pu distraire de son idée

fixe le savant Cosinus, polytechnicien de son état, autre création du facétieux et brillant scientifique Georges Colomb.

.....◆.....
 Robert March est maître de conférences retraité et a enseigné en sciences et techniques pour l'architecture.

robermarch@gmail.com

© APMEP Mars 2022



Sommaire du n° 543

 Dites-le avec des images !

Éditorial

Opinions

Mathématiques et esprit critique — Éliane Vandembroucq

De la modélisation... et de l'innovation pédagogique — François Boucher

Avec les élèves

Manipulations incarnées avec des réglettes — Olivier Le Dantec

 Le château de cartes — Claire Lommé & Olivier Longuet

 Des « vidéos-erreurs » pour aiguiser l'esprit critique — Arnaud Durand

 Résoudre... sans consigne ? — Élodie Lalande & Fabienne Mousseau

 Des chryzodes au collège — Mickaël Malinge

À bas Euclide ? — Henrique Vilas-Boas

Ouvertures

 Qu'est-ce que je vois ? — Valerio Vassallo

1  Les mathématiques comme inspiratrices de la forme : un petit panorama — Olivier Longuet 55

3  Haïkus — Richard Cauche 63

3  Ces images nous trompent ? — Régionale de Lorraine 66

5 **Récréations** 68

13 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 68

L'algorithme du sapeur — Robert March 71

13  Géométries finies & jeux FANO — André Deledicq 76

23 **Au fil du temps** 80

Pour nos classes... et pour nous : le site hist-maths.fr — Bernard Parzysz 80

 Maths & BD — Pol Le Gall 82

33 Archimède et la mesure du cercle — Martine Bühler 84

41 Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 88

48 Matériaux pour une documentation 90

48 **Courrier des lecteurs** 95



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr