Le bulletin de l'APMEP - Nº 543

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2022

Dites-le avec des images !

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

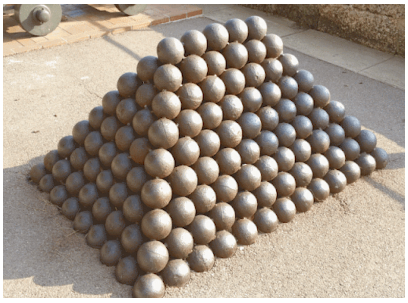
Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2022. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

L’algorithme du sapeur

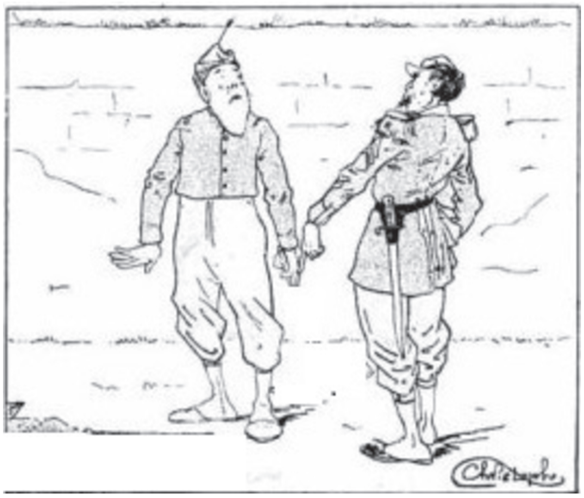
Sur les traces du sapeur Camember, Robert March nous invite à étudier les empilements de boulets et la réunion de tels empilements.

Robert March

Considérations sur la façon de ranger des boulets de canon



La perplexité du sapeur Camember



Le sergent Bitur, ne sachant pas comment occuper ses conscrits, a mis en demeure le sapeur Camember[1] de ranger les boulets de canon stockés dans la cour de la caserne. Ils forment deux tas complets mais le sergent n’en démord pas.

« Sapeur, rangez-moi ces boulets : je ne veux voir qu’un seul tas ! et complet ! »

Avant de s’atteler à la tâche, vu que chaque boulet ne pèse pas moins de 4 livres, notre brave sapeur préférerait s’assurer que c’est possible de réunir ces deux tas en un seul. Le premier tas a 5 étages et 5 boulets en ligne au sommet ; le second 4 et 4.

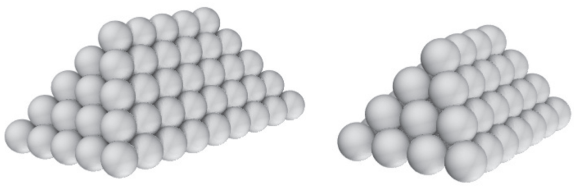


Figure 1. *Les deux tas à réunir en un seul.*

« Voyons tout d’abord ce qu’il en est des pyramides à base carrée, se dit-il : *celle à deux étages*

1. *Les facéties du sapeur Camember* est l’œuvre de Georges Colomb, alias Christophe, aussi facétieux qu’éminent scientifique (1856–1945). On le verra ici, et quoi qu’on ait pu en dire, Camember n’a rien d’un simple d’esprit. On doit également à cet auteur *L’idée fixe du savant Cosinus*.

comporte $1+2\times 2=5$ *boulets ; celle à trois étages* $5+3\times 3=14$ *boulets ; celle qui est à quatre étages contient* $14+4\times 4=30$ *boulets et celle à cinq étages* $30+5\times 5=55$ *boulets. Pour la suivante, il faut encore ajouter* 6×6 *à* 55*, ce qui donne 91 boulets. »*

Précisons ici que notre sapeur n'est pas allé plus loin dans sa scolarité que l'école primaire, mais il connaît ses tables (!) et sait faire des multiplications et des divisions simples (sans virgule, précise-t-il…).

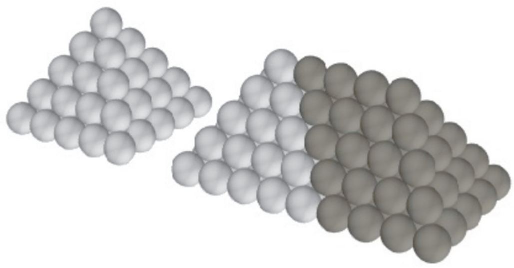


Figure 2. *On passe de la pyramide carrée de 5 étages, composée de 55 boulets, au tas de 5 étages et 5 boulets en ligne au sommet, en ajoutant 4 triangles de 15 boulets.*

« Je vais maintenant calculer le nombre de boulets de chaque tas. »

Pour le premier, Camember part de la pyramide à 5 étages, de 55 boulets et rajoute sur un côté 4 triangles de $5+4+3+2+1=15$ boulets.

Il fait ses comptes : $55+4\times 15=115$ boulets.

Pour le deuxième, il complète la pyramide à 4 étages avec 3 fois 10 boulets ($1+2+3+4=10$) pour un total de $30+3\times 10=60$ boulets. Soit, au total, 175 boulets.

Il s'agit maintenant de réorganiser ces 175 boulets en un seul tas. Il cherche donc s'il existe un tas de 175 boulets à 5 ou 6 étages. La pyramide à 5 étages comptant 55 boulets, il divise $175-55=120$ par 15, il trouve 8 et ça tombe juste ! Donc, avec 5 étages et 9 boulets au sommet, l'affaire est bouclée ! Pour autant, notre sapeur ne s'arrête pas en si bon chemin. Avec 6 étages, en divisant $175-91=84$ par 21, il trouve 4 et ça marche aussi ! Il y a donc une deuxième solution à 6 étages et 5 boulets au sommet.

Camember, soucieux de s'économiser, après avoir fait le compte du nombre de boulets à soulever pour chaque étage, choisit la première solution :

1re solution : 16 boulets à monter au 2e étage ; 12 au 3e ; 8 au 4e et 4 au 5e.

$16\times 1+12\times 2+8\times 3+4\times 4=80.$

2e solution : 13 au 2e ; 11 au 3e ; 9 au 4e ; 7 au 5e et 5 au 6e : $13\times 1+11\times 2+9\times 3+7\times 4+5\times 5=115.$

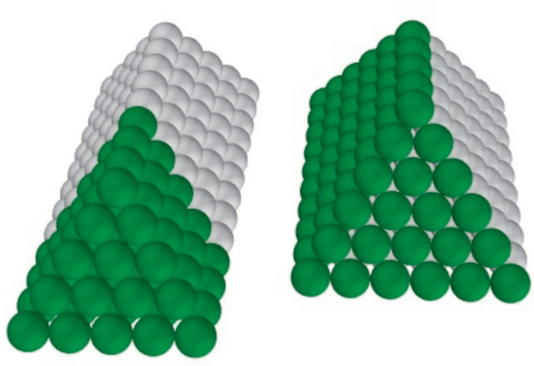


Figure 3. *Les deux tas de 175 boulets (en vert, les 60 boulets déplacés dans chaque cas).*

L'algorithme du sapeur

Suivons la démarche de Camember.
Soit $B(n,p)$ le nombre de boulets d'un tas donné :

n = nombre d'étages du tas ;
p = nombre de boulets alignés au sommet.

Calcul de $B(n,p)$

Par récurrence sur p

Calculons d'abord $B(n,1)$, le nombre de boulets d'une pyramide à n étages :

$$B(n,1)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

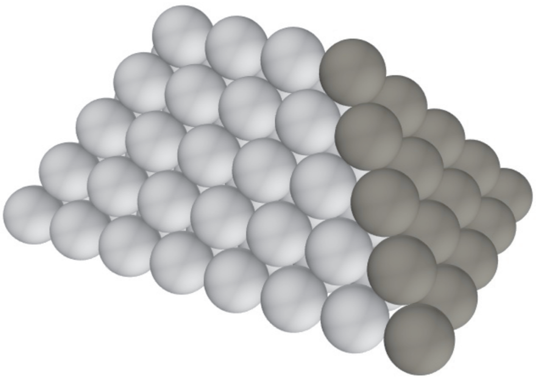


Figure 4. *On passe d'un tas ($n = 5$, $p = 3$) à un tas ($n = 5$, $p = 4$) en ajoutant un triangle de 15 boulets.*

On passe de $B(n,1)$ à $B(n,2)$, de $B(n,2)$ à $B(n,3)$, …, de $B(n,k)$ à $B(n,k+1)$ en ajoutant r boulets, avec

$$r = 1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il s'agit donc d'une suite arithmétique de 1^{er} terme $B(n,1)$ et de raison r.

$$\begin{aligned} B(n,p) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (p-1)\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (p-1)\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Et finalement :

$$B(n,p) = \frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{6}.$$

Par récurrence sur n

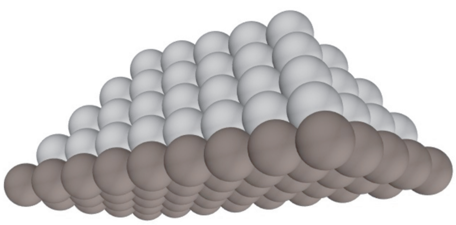


Figure 5. *On passe de $B(4,5)$ à $B(5,5)$ en ajoutant 45 boulets.*

On passe de $B(1,p)$ à $B(2,p)$ en ajoutant $2(p+1)$ boulets ; puis de $B(2,p)$ à $B(3,p)$ en ajoutant $3(p+2)$ boulets ; et de $B(k-1,p)$ à $B(k,p)$ en ajoutant $k(k+p-1)$ boulets.

$$\begin{aligned} B(n,p) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+p-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[k^2 + (p-1)k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (p-1)\sum_{k=1}^{n} k \end{aligned}$$

On retrouve bien la même formule.

La réunion de deux tas en un seul

Il s'agit de déterminer si un nombre N est une valeur possible de $B(n,p)$ et, le cas échéant, les valeurs correspondantes de n et p. L'équation $B(n,p) = N$ est une équation à deux inconnues, n et p, entiers naturels certes, mais du 3^e degré en n, ce qui ne facilite pas son étude. On va donc s'en remettre à l'algorithme de notre sapeur, en décidant d'écarter les valeurs trop triviales $n = 1$ et $n = 2$, parce qu'il faut quand même que ça ait l'air d'un tas de boulets !

Algorithme du sapeur

On saisit la valeur de N, ici 280.

Algorithme du sapeur

```
def Sapeur(N):
    def CalculB(n):
        return n*(n+1)*(2*n+1)//6
        # // est le quotient entier
    n = 3
    solution = [N]  # initialisation plus simple
    B = CalculB(n)
    while (B < N):
        D = N - B
        m = n*(n+1)//2
        if D % m == 0:
            p = D//m + 1  # pas besoin de int
            solution = solution+[[n,p]]
            # utilisation de la concaténation des
            # listes plutôt que de la méthode
            # append
            # liste [n,p] au lieu du tuple (n,p)
            # (hors-programme)
        n = n+1
        B = CalculB(n)
    return solution
```

À propos d'une observation du sapeur Camember

Prévoyant, le sapeur dresse un tableau du nombre de boulets composant chaque tas en faisant varier n (le nombre d'étages) de 3 à 10 et p de 1 à 10.

p \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
1	14	30	55	91	140	204	285	385
2	20	40	70	112	168	240	330	440
3	26	50	85	133	196	276	375	495
4	32	60	100	154	224	312	420	550
5	38	70	115	175	252	348	465	605
6	44	80	130	196	280	384	510	660
7	50	90	145	217	308	420	555	715
8	56	100	160	238	336	456	600	770
9	62	110	175	259	364	492	645	825
10	68	120	190	280	392	528	690	880

Dans ce tableau, certains nombres n'apparaissent pas, d'autres une ou deux fois. Notre sapeur considère dans le tableau les nombres qui apparaissent deux fois : 50, 70, 100, 175, 196, 280 et 420.

Il remarque qu'il s'agit dans chaque cas de deux tas qui n'ont qu'un étage de différence. Serait-ce toujours le cas ? Cherchons les solutions de l'équation : $B(n,p) = B(n+1,p')$.

$$\frac{n(n+1)(2n+3p-2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+3p'-2\right)}{6}$$

soit

$$\begin{aligned}
n(2n+3p-2) &= (n+2)(2n+3p') \\
2n^2+3pn-2n &= 2n^2+4n+3p'n+6p' \\
3(p-p'-2)n &= 6p' \\
p &= \frac{2p'}{n}+p'+2
\end{aligned}$$

Pour n donné, tout p' multiple de n convient (ou multiple de $\frac{n}{2}$ quand n est pair). On a donc une infinité de solutions pour tout n, certaines pouvant être quadruples, quintuples, etc.

Par exemple :

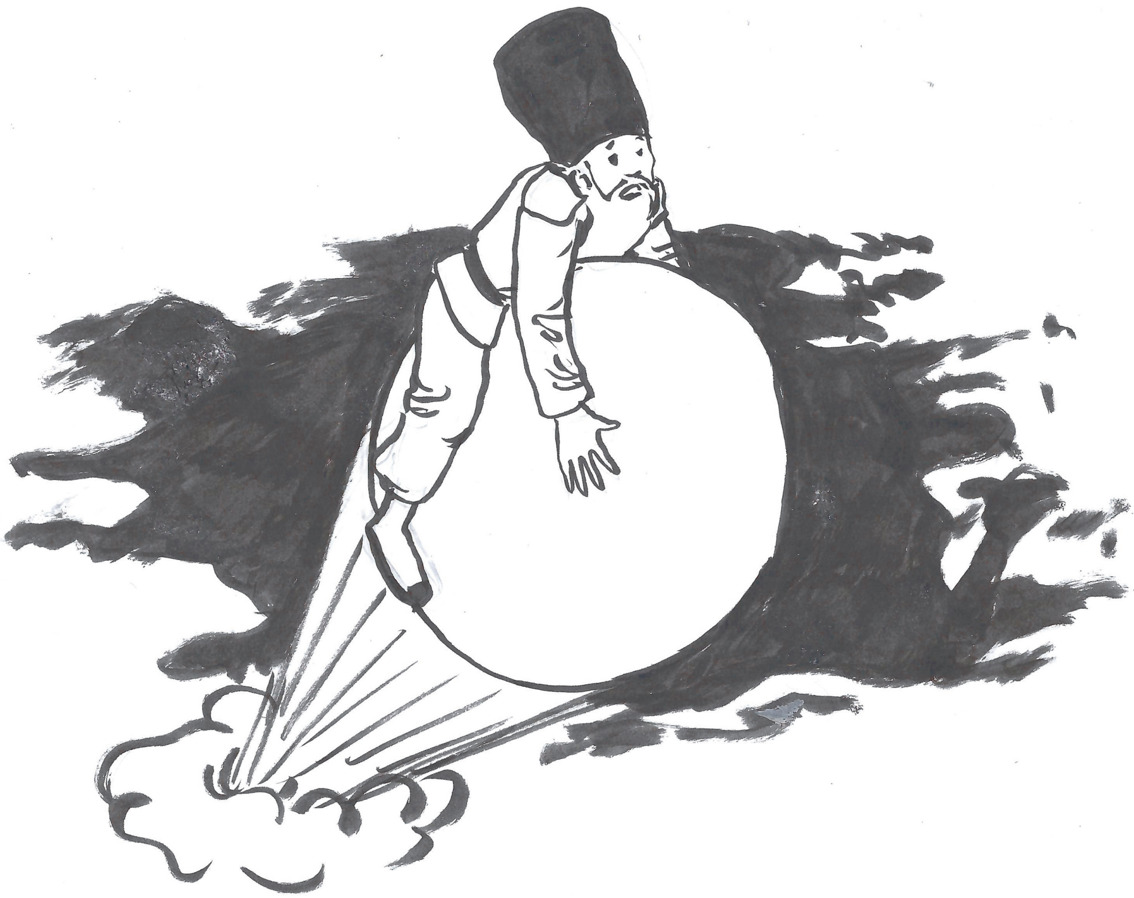
280 : (4, 26), (5, 16), (6, 10), (7, 6) ;
1 120 : (4, 110), (5, 72), (6, 50), (7, 36), (14, 2).

Pour tout observateur curieux, les conjectures ne manquent pas.

Ces considérations n'étaient certes pas à la portée du sapeur Camember mais elles auraient certainement pu distraire de son idée fixe le savant Cosinus, polytechnicien de son état, autre création du facétieux et brillant scientifique Georges Colomb.

Robert March est maître de conférences retraité et a enseigné en sciences et techniques pour l'architecture.

robermarch@gmail.com



Sommaire du nº 543

Dites-le avec des images !