Le bulletin de l'APMEP - N° 543

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2022

Dites-le avec des images !

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2022. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

APMEP

Manipulations incarnées avec des réglettes

On a tous entendu parler des réglettes Cuisenaire *et pour cause : elles permettent aux élèves de comprendre des concepts abstraits pas toujours faciles à illustrer. Dans cet article, Olivier Le Dantec nous présente ce formidable outil pouvant être utilisé tout au long des cycles 2 et 3, voire même du cycle 4. Il en profitera pour exposer sa réflexion sur l'interprétation bien souvent erronée du concept de manipulation en classe.*

Olivier Le Dantec

Connaissez-vous les réglettes *Cuisenaire* ou *« Nombres en couleur »*, un outil peu onéreux qui peut être utilisé tout au long du cycle 2 et du cycle 3 ? Même si vous ne les utilisez pas en classe, sans doute en avez-vous entendu parler. En effet, on trouve de plus en plus de ressources reconnues qui évoquent leurs intérêts. Par exemple, le rapport Villani-Torossian [1] ou la conférence de consensus sur *les nombres et le calcul* [2] encouragent les manipulations et notamment l'usage des réglettes.

Je partage depuis longtemps cet intérêt pour le matériel dédié et plus particulièrement pour les réglettes *Cuisenaire*. Il y a quelques années, quand mon métier de formateur m'amenait dans les classes, j'étais surpris de constater que ces outils avaient presque disparu. Je l'étais d'autant plus que les réglettes n'avaient pas été remplacées par un autre matériel, plus performant ou du moins différent. La pratique de la manipulation semblait avoir été négligée… Les réglettes avaient été remisées dans les placards !

Je ne ferai pas dans cet article l'histoire de l'engouement pour les réglettes puis de leur disparition avant leur renaissance aujourd'hui. Je vous propose juste de découvrir cet outil et de réfléchir, à cette occasion, à la signification de la manipulation en classe.

L'outil

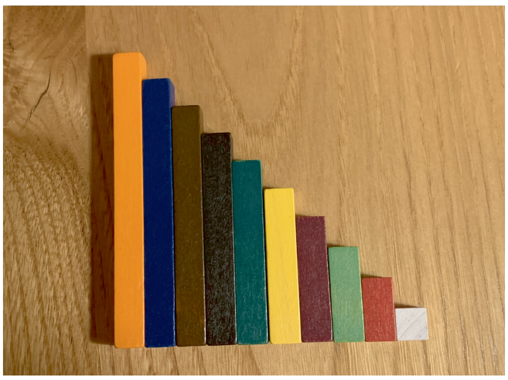


Figure 1. *Réglettes en bois.*

Inventées en 1950 par un instituteur belge, George Cuisenaire, elles avaient pourtant eu le vent en poupe dans les années soixante. On trouve encore des travaux de recherche, des reportages [3] qui témoignent de l'intérêt suscité par ces nouveautés. Piaget lui-même a trouvé un grand potentiel aux réglettes au moment de leur apparition [4].

Il existe dix réglettes[1], en bois ou en plastique, qui peuvent être associées aux nombres de 1 à 10. Le nombre 1 est un cube de 1 cm de côté, le nombre 2 est un pavé droit avec une section carrée de 1 cm^2 et une hauteur de 2 cm… Le code des couleurs est très

1. Où les trouver ? Un peu partout ! En ligne, on préférera les marques Goula ou Viga pour la qualité des couleurs et le fait qu'elles ne sont pas striées. Ainsi, elles peuvent désigner un nombre mais elles peuvent aussi être choisies comme unité.

important. Les doubles et moitiés sont dans des couleurs que nous associons ordinairement : le rouge et le rose pour le 2 et le 4, le vert clair et le vert foncé pour le 3 et le 6, le jaune et le orange pour le 5 et le 10. Le 1, qui est un diviseur universel, est blanc et le 7, qui n'est pas diviseur ou divisé, est noir. Ces considérations permettent aux adultes de mémoriser rapidement l'association nombre-couleur. Cette association est, en général, très vite maîtrisée par les enfants.

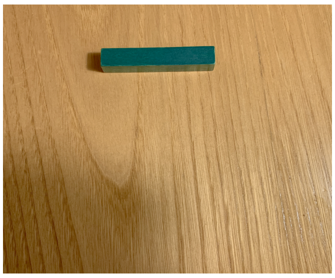
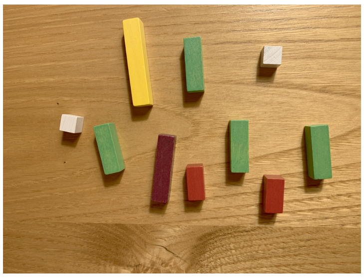
Les réglettes *Cuisenaire* en bois sont différentes des réglettes en plastique. En effet, deux informations supplémentaires sont disponibles sur ces dernières : elles sont, d'une part, marquées de stries qui reportent l'unité et d'autre part, le nombre qu'elles désignent est écrit explicitement dessus. La réglette bleue (figure 2) est donc marquée 8 fois et le nombre 9 apparaît explicitement. Pour certains, ce marquage est un avantage. Pour moi, c'est un défaut car la réglette unité ne sera pas toujours la réglette blanche. Pour les activités de mesure de longueur, chaque réglette pourra être choisie tour à tour. On retrouvera le même changement de paradigme quand il s'agira de découvrir les fractions.

Figure 2. *Réglettes en plastique.*

Mais surtout ces réglettes permettent de dépasser les stratégies pauvres de comptage. Les stries n'invitent pas à le faire. Pour s'en convaincre, examinons une première activité de recherche des décompositions additives au début du cycle 2 ou en fin de maternelle.

Les décompositions additives

L'élève possède des réglettes qu'il a appris précédemment à associer à des nombres. L'enseignant lui demande de donner les décompositions additives d'un nombre, ici le nombre 6. Il dispose donc de la réglette vert foncé qui représente le 6 et d'une série de réglettes. En dessous de cette réglette, il vient poser des doublets de réglettes dont la longueur totale est identique [2].

		
État initial		Recherche des décompositions

Il écrit (ou il énonce) le sens de ce qu'il a représenté avec les réglettes : $6 = 4 + 2 = 5 + 1 = 2 + 4$.

Sur cet exemple très simple, on comprend la signification des mouvements des objets : mettre bout à bout, c'est additionner ; mettre en dessous des objets de même longueur permet d'expliciter une égalité. Cette signification est d'ailleurs très vite assimilée par les élèves. S'il faut un peu de temps pour qu'ils mémorisent l'association des réglettes et des nombres, ils comprennent presque immédiatement les

2. Des réglettes *Cuisenaire* numériques sont disponibles sur le site `n'richmath`. Ce site propose de nombreuses ressources pour faire des mathématiques ; ces ressources émanent de la faculté d'éducation de l'université de Cambridge.

relations qu'elles permettent d'établir entre les nombres entiers. Cette recherche des décompositions d'un nombre est centrale pour être ensuite capable d'effectuer des additions simples.

Prenons par exemple l'addition 7 + 8. Cette addition sera représentée par la réglette noire et la réglette marron.

Dans un premier temps, les élèves prennent ces deux réglettes et les posent sur la table bout à bout. Ils cherchent alors le résultat en tâtonnant. Ils placent d'abord la réglette orange qui correspond au 10 puis ils complètent, éventuellement après plusieurs essais, avec la réglette jaune.

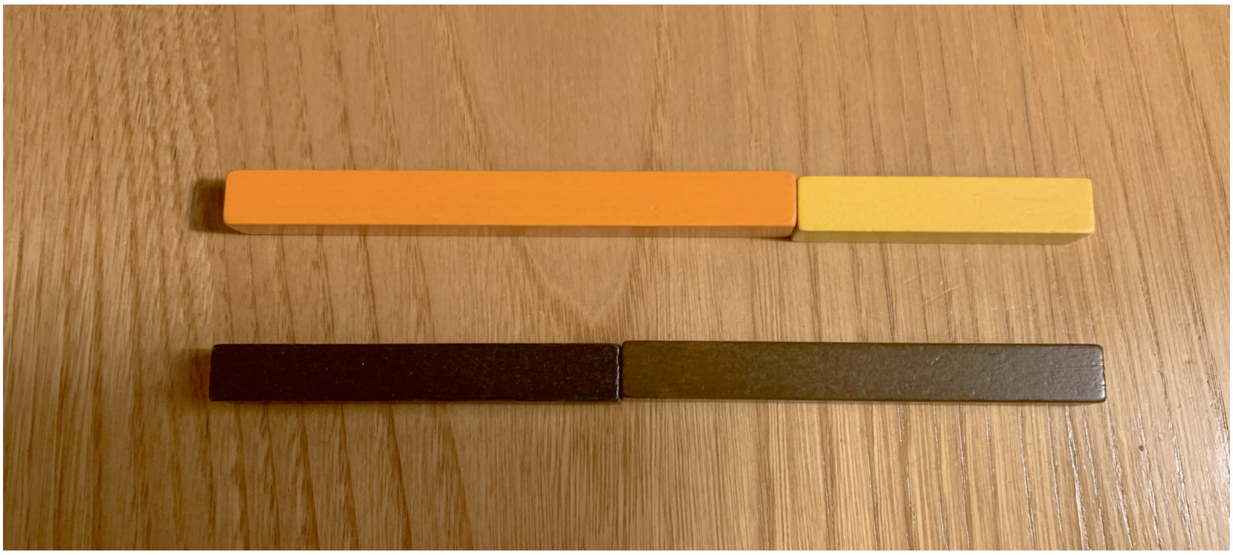


Figure 3. *7 + 8, c'est encore 10 + 5.*

Avec les réglettes orange et jaune, le résultat apparaît de façon évidente : 10 + 5 = 15. La question qui se pose alors est de savoir comment on est passé de 7 + 8 à 10 + 5. Là encore, les réglettes vont les aider.

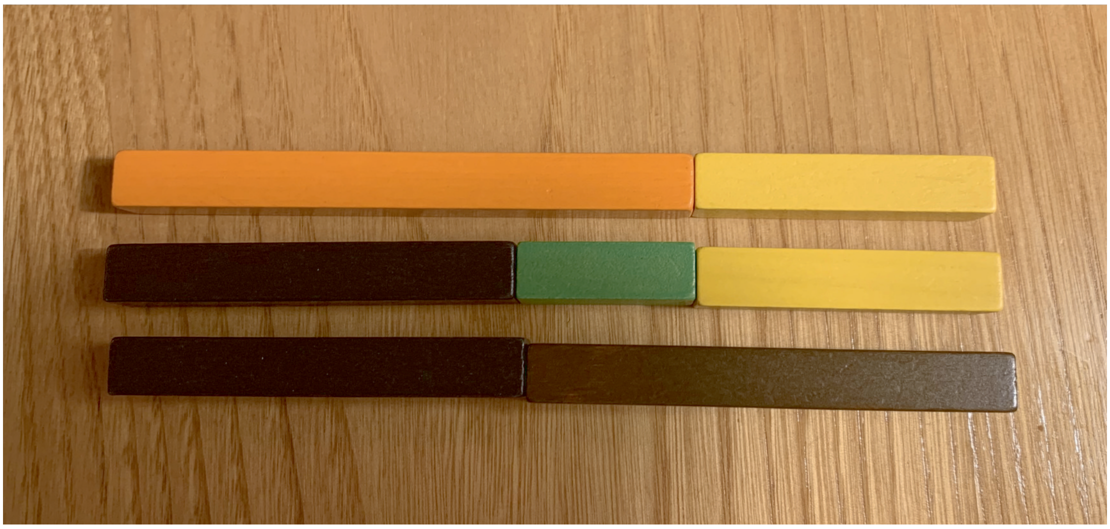


Figure 4. *7 + 8, c'est 7 + 3 + 5, ou encore 10 + 5.*

La ligne intermédiaire permet d'observer qu'on a complété 7 pour aller à 10 avec 3 et elle permet simultanément de comprendre que la décomposition de 8 est 3 + 5.

On voit que cette activité accompagne les élèves dans le dépassement de stratégies « pauvres ». Dans notre exemple, il s'agit de la stratégie dite de « surcomptage » qui consiste à énumérer la comptine au-dessus de 7 en levant 8 doigts : 8 (l'élève lève un doigt), 9 (l'élève lève un deuxième doigt), …, 15.

Manipulations incarnées *vs* manipulations catalysatrices

Dans les deux exemples ci-dessus, les mouvements sont en lien avec les concepts. J'appellerai ces manipulations des manipulations « incarnées »[3] pour souligner ce lien.

Pourtant, beaucoup de manipulations présentes dans les classes n'ont pas de lien de ce type. Elles fonctionnent par associations d'idées qui se font dans l'esprit des élèves sans être présentes dans les objets déplacés.

Prenons l'exemple d'un jeu de cartes avec deux faces : sur l'une une addition, sur l'autre le résultat de cette addition. L'élève doit choisir une carte, lire l'addition, calculer le résultat de cette addition avant de retourner la carte pour vérifier si son calcul est exact.

$4+2$	$\underline{6}$

Figure 5. *« Carte de jeu », recto et verso.*

Lors de cette manipulation, il y a bien un mouvement d'objets physiques (la carte est retournée), mais le lien entre ce mouvement et les concepts en jeu est indépendant de la somme en question. Le mouvement serait identique avec $4+3$ au recto et 7 au verso. Ces manipulations sont distinctes des précédentes : leur objectif est de déclencher l'activité mentale de l'élève, peu importe que ce soit sa mémoire, un calcul ou un raisonnement qui produise l'association attendue. On pourrait appeler ces manipulations, « manipulations désincarnées », mais cela serait un terme trop péjoratif et ne rendrait pas compte de leur utilité. Choisissons plutôt, le terme de manipulations « catalysatrices », pour décrire leur fonction d'accélération d'une réaction mentale qui se joue ailleurs.

S'il est nécessaire de s'appesantir sur cette distinction apparemment simple et évidente, c'est qu'elle n'est pas vraiment partagée, et que les observations en classe ou dans les manuels montrent que l'on appelle indifféremment manipulations, des activités qui sont finalement très différentes pour les apprentissages.

Une simple recherche sur l'internet montre ce que les enseignants plébiscitent quand il s'agit de manipulations. Quand on entre dans un moteur de recherche les termes « mathématiques + CM2 + manipulations », le résultat est sans appel : les manipulations proposées sont presque uniquement des manipulations « catalysatrices ». Et parmi celles-ci, on observe une prépondérance de leçons à manipuler.

3. Cette incarnation est à rapprocher de la notion de congruence en didactique. On aurait ainsi pu qualifier ces manipulations de « manipulations congruentes ».

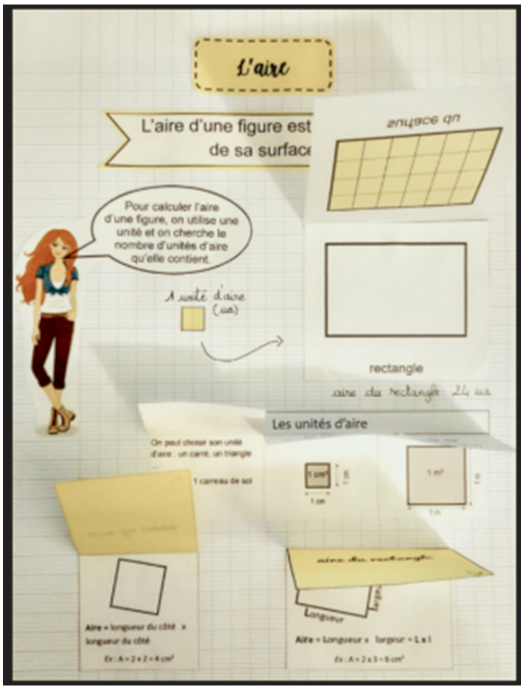


Figure 6. *Exemple de leçon à manipuler sur les aires : il faut ouvrir une fenêtre pour lire la réponse* .

Figure 7. *Exemple de jeu sur les fractions* .

Dans la suite de ces réflexions, on évoquera toujours — à moins d'une mention explicitement contraire — les manipulations incarnées.

De la manipulation à l'abstraction

La manipulation est l'occasion d'une réflexion sur l'abstraction : les objets matériels sont présentés comme concrets, et les symboles comme abstraits. C'est, à mon avis, un raccourci malheureux qui a des implications didactiques importantes, notamment dans la résolution de problèmes.

On retrouve ce raccourci dans la présentation des enjeux de manipulations que l'on trouve dans le manuel qui s'inspire de *la méthode de Singapour*. Citons un groupe d'enseignants[4] qui présente cette méthode :

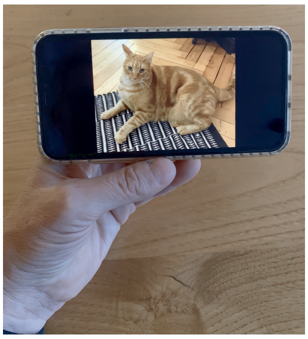
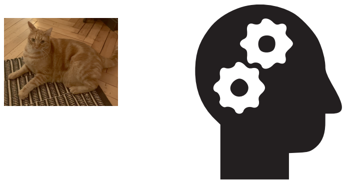
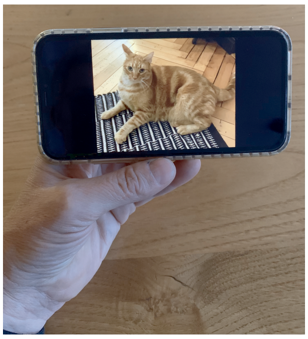
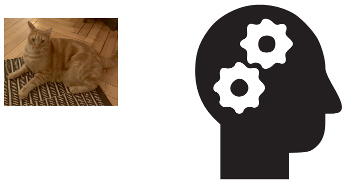
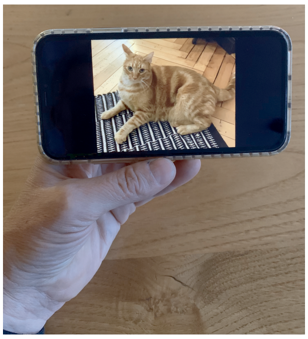
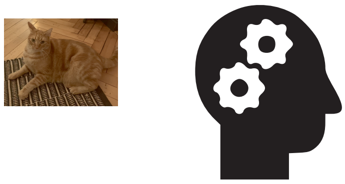
> ***L'approche « concrète-imagée-abstraite »*** *: chaque notion est abordée sous un angle concret à l'aide de situations de la vie courante, de cubes, de bâtons, de jetons… Les élèves manipulent* ***(étape concrète)****, puis schématisent à l'aide de ronds et de barres* ***(étape imagée)****. Ils utilisent enfin la représentation par des symboles* ***(étape abstraite)***[5].

Si je partage l'intention pédagogique de ces enseignants comme de cette méthode, notamment la volonté de commencer par des manipulations avant d'aller trop rapidement vers des écritures symboliques, je m'en distingue par l'analyse de l'abstraction. À mon avis, il y a une confusion qui est faite entre l'abstraction et l'immatérialité.

Dans le tableau ci-dessous, on voit qu'il y a deux axes distincts et qu'un objet physique singulier peut être la rencontre avec un concept abstrait.

4. Citation tirée du site `rue des maths` .

5. On retrouve un propos identique dans [5] : « *L'abstraction prend appui sur trois étapes concomitantes essentielles, la manipulation, la représentation et la verbalisation qui permettent un passage progressif vers l'abstraction* ».

	Axe de la dématérialisation ⟶		
Axe de l'abstraction ⟶	Mon chat 	Une photo de mon chat 	Un souvenir de mon chat 
	Un chat 	Une photo de chat 	Un souvenir de chat 
	Un félin 	Une photo de félin 	Un souvenir de félin 

Ainsi une image ou un processus mental n'est pas nécessairement plus abstrait qu'un objet physique : tout dépend de ce qui est en jeu avec cette image ou ce processus mental. Ceci est important pour préciser le statut de la manipulation. Elle n'est pas le premier niveau du chemin vers l'abstraction. Il y a plus d'abstraction dans certaines manipulations que dans certaines images.

Ceci peut être illustré simplement dans la résolution d'un problème arithmétique :

> « J'ai 4 pommes rouges et 2 pommes vertes, combien ai-je de pommes en tout ? ».

Le problème peut être proposé en classe avec de vraies pommes.

Il peut aussi être présenté avec une image des pommes.

Ou enfin, avec des cubes qui ne sont pas nécessairement de la même couleur que les pommes.

Ou avec des réglettes !!!

Les deux dernières approches (par les cubes ou les réglettes) sont matérielles mais elles sont des approches abstraites, car elles sont une reprise du problème en ne gardant que ce qui est important : le nombre. Dans ces approches, on a fait abstraction de la nature du fruit ou de sa couleur. Un autre problème avec des poupées ou des chapeaux se résoudrait de manière identique. En revanche, l'image des 4 pommes rouges et des 2 pommes vertes est encore une représentation très proche de la singularité du problème. Elle n'est pas du tout abstraite, même si elle est moins matérielle que les cubes ou les réglettes.

Bref, on peut penser qu'il sera plus facile pour l'élève de passer de cette étape matérielle-abstraite donnée par les cubes à une représentation symbolique que de l'image vers la représentation symbolique.

Dématérialisation sans abstraction →

Abstraction matérialisée ↓

Transition difficile ↓

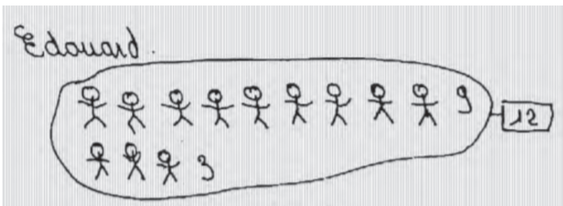
Transition facile →

$4 + 2$

La manipulation n'est pas un obstacle vers l'abstraction mais au contraire une mise en scène des nombres en jeu et de leurs relations. En revanche un dessin, même schématique, peut garder plusieurs déterminations non essentielles et il est souvent très long à réaliser par un élève. Dans la solution du problème que propose Édouard (source CRPE), la représentation proposée est trop incarnée pour être efficace. Le même problème avec 120 nageurs mettrait en difficulté Édouard.

Problème 1

À la piscine, il y a 12 nageurs. 3 de ces nageurs sont dans le petit bain et les autres sont dans le grand bain. Combien de nageurs y a-t-il dans le grand bain ?



Réglettes en résolution de problème en CM1/CM2

Afin de mieux illustrer la puissance de ces abstractions matérialisées, explorons une utilisation possible des réglettes *Cuisenaire* en résolution de problème [6].

On donne le problème suivant à des élèves connaissant déjà les réglettes pour les avoir utilisées en numération et en résolution de problème. Pendant que l'enseignant lit l'énoncé, étape par étape, repérées par les lettres de A à F, les élèves modélisent la situation avec leurs réglettes.

6. Merci à Ginette Bien-Delajoux pour avoir partagé ces observations dans le cadre de son travail de référente mathématiques de circonscription (RMC).

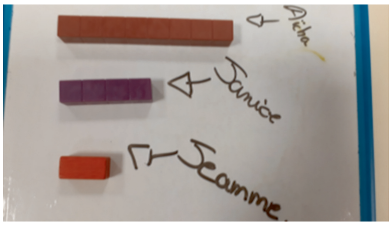
A. Janice a parcouru … km à vélo.

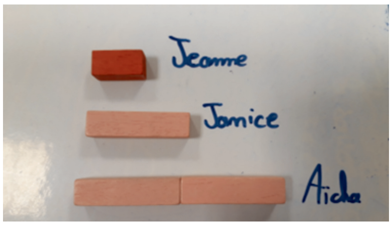
Le premier point qui interpelle est que les élèves ne sont pas gênés par le manque de valeur. Ils vont choisir une réglette pour représenter la distance parcourue par Janice. Tous ne choisissent pas la même.

B. Aïcha a parcouru le double.

Les élèves posent les réglettes qui expriment la relation entre les nombres.

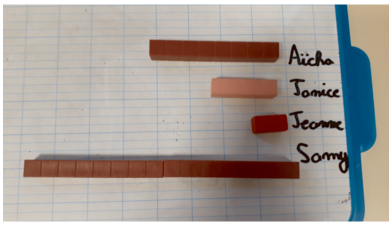
C. Et Jeanne la moitié.





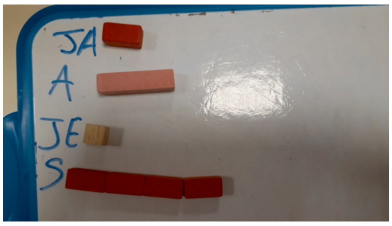
Ils continuent de poser des réglettes.

D. Quant à Samy il a fait le quadruple de la distance de Janice.



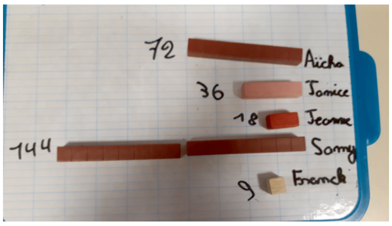
Toujours pas de valeur numérique. Les élèves continuent avec les réglettes.

E. Alors que Franck a parcouru le quart de la distance de Janice.



À ce moment de l'énoncé, certains choix de réglettes pour Janice ne conviennent plus. Les élèves concernés ont alors changé la réglette représentant la distance parcourue par Janice et ont recommencé depuis le début pour faire correspondre à cette nouvelle réglette celles représentant les distances parcourues par les autres.

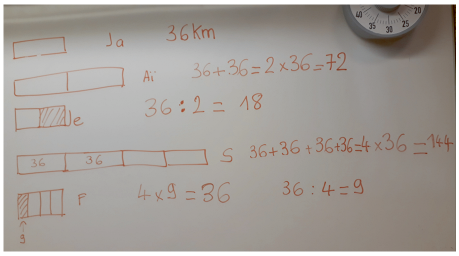
F. Janice a parcouru 36 kilomètres.



La recherche des valeurs ne dépend plus, à ce stade, de la capacité à résoudre un problème, mais des connaissances en calcul mental.

Le passage au tableau est schématisé avec des barres puisque :

- les élèves ont utilisé des réglettes différentes pour une résolution correcte ;
- la couleur, de ce fait, n'importe pas.



Cette résolution de problèmes illustre la puissance du modèle en barres [7], et l'efficacité de l'utilisation des réglettes pour décrire les relations entre les longueurs. Cette représentation permet la réussite des élèves.

C'est bien le prolongement d'un travail qui aura été fait sur les fractions.

7. Voir également l'article de Richard Cabassut *Les représentations en barres :* « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité » paru dans le nº 537 d'*Au fil des maths*.

Les fractions

Pour compléter, voici, présentées dans l'ordre où elles apparaissent, quelques activités sur les fractions à mener avec les réglettes *Cuisenaire*. Elles sont tirées du livre *Manipuler pour comprendre au cycle 3* [6].

Une première série d'activités consiste à associer le vocabulaire relatif aux fractions, comme « le tiers », « le quart », « le cinquième », « le dixième », etc., avec des représentations produites avec des barres. Pendant cette première série, la notation des fractions est volontairement mise de côté. La question est alors de trouver la réglette qui correspond à la fraction énoncée (*exemple 1*).

Exemple 1

Question

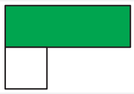
Pour chaque exercice, colorie la réglette dessinée de la bonne couleur. Cherche une réglette qui correspond à la demande. Trace-la et colorie-la.

1. Avec la réglette vert clair – Une réglette qui correspond au tiers.

Réponse attendue de l'élève

1. Avec la réglette vert clair – Une réglette qui correspond au tiers.

Le tiers de la réglette vert clair est la réglette blanche.



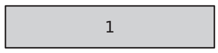
Ce travail se poursuit avec l'introduction de l'écriture fractionnaire (*exemple 2*).

Exemple 2

Question

Pour chaque exercice, colorie la réglette dessinée de la bonne couleur. Représente en dessous la fraction demandée. Puis donne son écriture fractionnaire et complète la phrase.

1. Unité : réglette jaune – Fraction deux cinquièmes.

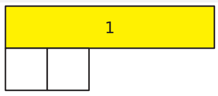


J'écris : . . . . . . Le numérateur est . . . . . . ;

le dénominateur est . . . . . .

Réponse attendue de l'élève

1. Unité : réglette jaune – Fraction deux cinquièmes.



J'écris : . . $\frac{2}{5}$ . . Le numérateur est . . . **2** . . ;

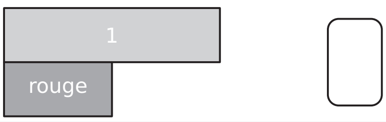
le dénominateur est . . **5** . . .

Puis on peut alors alterner les demandes : trouver la réglette qui correspond à une fraction ou, inversement trouver une fraction qui correspond à une réglette posée sous l'unité (*exemple 3*).

Exemple 3

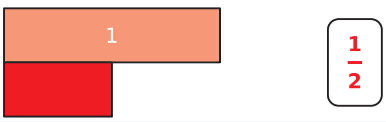
Question

1. Unité : réglette rose.



Réponse attendue de l'élève

1. Unité : réglette rose.



Les manipulations peuvent se poursuivre avec les différentes compétences sur les fractions attendues en fin de cycle 3. Les réglettes permettent d'illustrer les compléments à l'unité d'une fraction, elles aident à repérer une fraction sur une droite graduée. Elles permettent également d'encadrer une fraction par deux entiers consécutifs…

Elles permettront enfin de travailler l'écriture décimale. Pour cela, il sera utile de se fabriquer une réglette d'un mètre et de la définir comme unité. La réglette orange et la réglette blanche représenteront alors le dixième et le centième de l'unité.

Pour conclure

Ce dernier exemple a permis de se rendre compte que les réglettes permettent des manipulations pertinentes et incarnées pour le cycle 3 et même pour les élèves du cycle 4. D'ailleurs de nombreux professeurs de collèges adoptent spontanément les réglettes quand elles leur sont présentées. C'est un outil riche et les quelques exemples présentés ici n'en épuisent pas les possibilités.

Le matériel dédié est un matériel conçu pour faire comprendre les concepts mathématiques. Maria Montessori [7] définissait ce matériel comme une « abstraction matérialisée » : des outils qui font abstraction de toutes autres déterminations. Mais surtout, ce matériel est conçu pour être manipulé, de telle sorte que les déplacements opérés soient en correspondance avec des idées mathématiques, ce que j'ai appelé *manipulations incarnées*.

Références

[1] Charles Torossian et Cédric Villani. « Partie 5.2, les ressources matérielles ». In : *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. , p. 57-58.

[2] CNESCO. *Conférence de consensus : nombres et calcul au primaire, recommandations*.

[3] Paul Siegrist. *L'as des réglettes*. Film . 1962.

[4] Jean Piaget. *Psychologie et pédagogie*. Disponible également en Folio essai. Denoël, 1969.

[5] Ministère de l'Éducation nationale. *Guide pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. .

[6] Olivier Le Dantec, Laurent Giauffret et Dylan Hurblain. *Manipuler pour comprendre, Cycle 3*. Nathan, 2019.

[7] Maria Montessori. *La découverte de l'enfant : Pédagogie scientifique*. Desclée De Brouwer, 2016.

Olivier Le Dantec est formateur de mathématiques à l'INSPÉ de Nice. Il a écrit et dirigé, chez Nathan, les deux ouvrages *Manipuler pour comprendre au cycle 2* et *Manipuler pour comprendre au cycle 3*.

olivier.le-dantec@unice.fr

Sommaire du nº 543

Dites-le avec des images !

APMEP

www.apmep.fr