

Le bulletin de l'APMEP - N° 542

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2021

Maths et citoyenneté (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Décembre 2021. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Au fil des problèmes



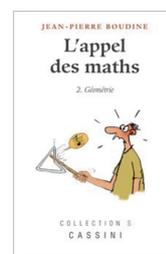
Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
frederic.deligt2@gmail.com
ou par courrier à :
Frédéric de Ligt
3 rue de la Pierrière
17270 MONTGUYON
Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

Frédéric de Ligt

542-1 Le triangle de Bottema

D'après une remarque de Jean-Pierre Boudine dans son dernier ouvrage *L'appel des maths-2-Géométrie* p. 160 aux éditions Cassini paru en 2020 :

Soit ABC un triangle tel que la bissectrice extérieure de \widehat{B} coupe la droite (AC) en D et la bissectrice extérieure de \widehat{A} coupe la droite (BC) en E. Si $BD = AE = AB$, que valent alors les angles \widehat{A} et \widehat{B} ?



542-2 Une inégalité genre olympiades

Prouver que, pour tous réels strictement positifs x , y et z , on a :

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \geq (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

542-3 La onzième médiété

Origine de la question : une médiété est une suite constituée de trois termes positifs, distincts deux à deux, telle qu'avec deux d'entre eux et deux de leurs différences on peut obtenir deux rapports égaux. Pappus d'Alexandrie (IV^e siècle après J.-C.), dans son *Synagoge*, recense à un moment les différentes médiétés possibles et en compte au total dix (la Décade sacrée des pythagoriciens !). Mais en épuisant les différentes combinaisons et en ne retenant que celles qui sont pertinentes, on en trouve en fait onze.

Voici la médiété que Pappus a ignorée (volontairement ?) :

avec $0 < a < b < c$ on doit avoir $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$.

Comme exemple d'une telle médiété on peut donner 6, 8, 9.

On tire de cette égalité que $c = \frac{a^2}{2a-b}$.

La question : on considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, récurrente d'ordre 2, définie par $u_{n+2} = \frac{u_n^2}{2u_n - u_{n+1}}$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = a$.

Pour quelles valeurs de a la suite converge-t-elle vers une limite strictement positive ?





542-4 Tiré d'un vieux numéro du Journal de mathématiques élémentaires (Alain Bougeard - Les Lilas)

Un triangle isocèle ABC étant donné, trouver sur sa base [BC] deux points D, E, et sur les côtés [AB] et [AC] deux points F, G, tels que le pentagone AFDEG ait ses côtés égaux.

À propos des problèmes parus précédemment

540-1 Un défi niveau Terminale

Les réponses reçues proviennent de Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives), Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Daniel Vacaru (Corbeni, Roumanie). Tous trois utilisent la valeur des nombres dérivés en 0 des fonctions exponentielle et sinus et obtiennent que $f(0) = \frac{\pi^2}{8}$.

540-2 Une double représentation

Toutes les contributions observent, par un argument de parité, que le plus petit nombre premier doit être 2 ; ce qui élimine une inconnue dans l'équation $A = B$. Marc Roux (Nîmes) et Daniel Vacaru (Corbeni, Roumanie) prennent l'outil de la divisibilité pour parvenir à une étude de cas. Ils aboutissent ainsi à deux solutions (2, 3, 7) et (2, 5, 7). Finalement, en tenant compte de la contrainte A et B premiers, il ne reste que l'unique solution (2, 5, 7). Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), à un changement de variable près, procède de même façon.

Ludovic Jany (Bolquère), de son côté, considère la fonction de l'entier q définie à partir de 3 par $f(q) = \frac{5+5q}{q-2}$ et cherche les entiers premiers qui ont une image entière par f . Après avoir remarqué qu'au-delà de 17, $f(q)$ est strictement compris entre 5 et 6, il passe en revue tous les nombres premiers impairs entre 3 et 17 et retient 3 et 5, puis revenant à l'équation initiale, élimine la valeur 3 pour q .

540-3 Curiosité numérique

Michel Lafond (†2020) et Ludovic Jany (Bolquère) expliquent cette curiosité en utilisant les égalités
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{1000^i} = \frac{1}{\left(\frac{999}{1000}\right)^2} = \frac{1000}{998001}$$
 et en remarquant que, dans la série, les termes de rang 999 et 1000 ajoutés au terme de rang 998 donnent 999 pour numérateur au terme de rang 998. D'où la disparition de cette suite de trois chiffres dans le développement décimal.

540-4 Crescendo

1. **Les triangles rectangles.** Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) passe par la géométrie analytique et Ludovic Jany (Bolquère) par les angles pour montrer simplement que le seul triangle solution est le demi triangle équilatéral.
2. **Les triangles en général.** Les mêmes auteurs proposent aussi leur solution pour la seconde question qui était plus ardue. Cette fois ils se placent tous deux dans un repère orthonormé. Le premier raisonne avec des intersections de droites alors que le second égale des aires de triangles. Pierre Renfer parvient à la conclusion que si l'angle trisécté est supérieur ou égal à l'angle droit, les triangles solutions ont des côtés proportionnels à $1, 2 \cos(\alpha), \sqrt{-16 \cos^4(\alpha) + 16 \cos^2(\alpha) + 1}$ alors que



si cet angle est strictement inférieur à l'angle droit, une seconde famille de triangles est possible qui ont tous leurs côtés proportionnels à 1, $\cos(3\alpha)$, $\sin(3\alpha)$.

Ludovic Jany obtient, quant à lui, un côté de l'angle trisecté étant fixé, un paramétrage du troisième sommet et conclut que ce sommet appartient à un limaçon trisecteur.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse :  (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

© APMEP Décembre 2021

*
* *

Appel à articles pour *Au fil des maths*

Chères et chers collègues,

Ce sont vos expériences et vos idées qui font l'intérêt de notre revue. Alors n'hésitez pas à nous écrire ! Comme toujours dans un esprit de mutualisation, nous accueillerons avec plaisir vos propositions d'articles, de la maternelle à l'université, **sur tous les sujets liés à l'enseignement des mathématiques.**

Côté fils rouges :

N° 544 : Mathématiques durables

Le développement durable, sujet d'actualité, est plusieurs fois mentionné dans les programmes. Comment utiliser les mathématiques pour résoudre des problèmes liés au développement durable ? Comment faire des mathématiques à partir de supports, de situations, de données issus du développement durable ? La parole est à vous !

Date limite d'envoi des articles : le 16 janvier 2022.

N° 545 : Mathématiques pour élèves à besoins particuliers

Comment accueillir dans les classes des élèves à besoins éducatifs particuliers et les faire progresser en mathématiques ? Quelles adaptations pédagogiques et didactiques envisager ? Quelles ressources utiliser ?

Date limite d'envoi des articles : le 1^{er} mars 2022.

Vous trouverez les consignes d'écriture sur le site de l'APMEP :

<https://www.apmep.fr/Au-fil-des-maths-Le-bulletin-de-l,7877>



Au plaisir de vous lire et de travailler ensemble !

L'équipe de rédaction d'*Au fil des maths*





Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2022 à *Au fil des maths* - le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) :

Adresse :

Code Postal : Ville : Pays :

Téléphone : Adresse courriel :

Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) :

Adresse de livraison :

Adresse de facturation :

Catégorie professionnelle : étudiant stagiaire 1^{er} degré 2^e degré
 service partiel contractuel enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : contactrgpd@apmep.fr.

Abonnement à *Au fil des maths* - le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

60 € TTC pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,

56,87 € TTC pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,

65 € TTC pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),

64 € TTC pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

par chèque

par mandat administratif

par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur Chorus.pro; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :

Date : Signature : Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr

SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552



Hors-série n° 1

Spécial « Premier degré »

Accès libre et gratuit

<https://www.apmep.fr/Au-Fil-des-Maths-le-bulletin-de-l-1,8848>



- Des articles parus précédemment
- De nouveaux articles du cycle 1 au cycle 3
- Des témoignages de collègues
- Des sources d'inspiration possible
- Des idées pour enseigner les mathématiques

Trois sommaires : général, thématique, par cycle

Sommaire du n° 542

Maths et citoyenneté (2)

Éditorial

1 Enseigner la géométrie en collège : un petit tour chez Euclide? — Michel Henry 50

Opinions

✦ Le débat scientifique — Marc Legrand, Thomas Lecorre, Liouba Leroux & Anne Parreau

3 ✦ Utiliser ou démontrer une implication — Zoé Mesnil 58

✦ Débat mathématique, débat démocratique — Georges Mounier

3 Trois formes d'analogie guidant la résolution de problèmes — Catherine Rivier & Emmanuel Sander 65

Avec les élèves

✦ Apprendre à débattre et à animer un débat mathématique — Thérèse Gilbert

17 **Récréations** 73

✦ Faire un crédit en Quatrième — Alexane Lucas

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 73

Comprendre la dérive génétique à l'aide de la simulation — Jean-Louis Marcia

17 ✦ Codes mathématiques de notre quotidien — Dominique Souder 76

✦ Qui va l'emporter? — Fabien Aoustin

32 **Au fil du temps** 81

Ouvertures

Petite enquête sur l'existence en mathématiques — François Boucher

40 Quand l'analyse cherchait ses mots — Pierre Legrand 81

44 Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 87

44 Matériaux pour une documentation 89



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr