Le bulletin de l'APMEP - N° 542

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2021

Maths et citoyenneté (2)

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

APMEP

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2021. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Petite enquête sur … l'existence en mathématiques

Dans cette petite enquête sur l'existence en mathématiques, nous abordons — fort superficiellement — d'une part la question de l'existence des entités mathématiques, question qui est sujet à débat, pour ne pas dire polémique, entre philosophes, logiciens, mathématiciens, historiens ou didacticiens… et, d'autre part, la question des preuves d'existence, en particulier celles qu'on aborde ou pas, qu'on accepte ou pas dans la scolarité, mathématiques scolaires qui restent notre cible.

François Boucher

Il est des terrains sur lesquels il peut être risqué de s'aventurer : le procès en incompétence guette le non professionnel. Soyons donc honnête en assumant le caractère assez superficiel des lignes qui suivent.

Un peu d'épistémologie

Pour quelles raisons l'existence des objets mathématiques usuels peut-elle poser problème ? Ne prenons que quelques exemples :

- la droite géométrique, celle qui est dite « illimitée dans les deux sens » ; illimitée effectivement ou non limitable ? Et peut-on vraiment la penser comme ensemble de points ?
- pris individuellement l'existence des entiers ne pose pas de problème ; mais leur ensemble $\mathbb{N}$, si familier, peut-il être pensé comme totalité ?
- une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et bornée sur aucun intervalle (ouvert) est-elle imaginable ?
- le lecteur qui s'est frotté à l'analyse non-standard, popularisée naguère par André Deledicq, y a rencontré des objets troublants pour l'esprit car privés de représentation : les infiniment petits et leurs inverses, infiniment grands. Leur existence ne relève-t-elle que des vertus de l'axiomatique sous-jacente ?

Concernant cette question, et sans aucune prétention à l'exhaustivité, on peut pointer trois courants de pensée :

- celui des « platoniciens » qui préfèrent, parfois, se qualifier eux-mêmes de « réalistes », éventuellement « modérés ». Ils revendiquent pour les objets mathématiques une existence « en soi », indépendante du mathématicien qui les traque, les découvre, puis les fréquente et en explore les propriétés. La réalité ainsi affirmée ne serait localisée ni dans le temps ni dans l'espace : la référence à un « ciel platonicien » et à un « dieu omniscient » est alors facile, avec une pointe de mépris, surtout sous la plume des critiques. Une majorité de mathématiciens professionnels, dont bon nombre de médaillés Fields tels Alexandre Grothendieck ou Alain Connes, se sont déclarés, à divers degrés, platoniciens.
- celui des « formalistes » auquel on rattache David Hilbert, et typiquement le mathématicien polycéphale N. Bourbaki et ses émules. Les formalistes sont le produit historique de ce qu'on a appelé la « crise des fondements » : les paradoxes générés par la théorie (naïve) des ensembles de Georg Cantor, les antinomies issues de la théorie russellienne voulant

faire des mathématiques une partie de la logique, ont conduit Gottlob Frege puis Giuseppe Peano à imaginer un langage formel d'écriture des mathématiques, dépouillé des ambiguïtés du langage courant ; David Hilbert est sans doute le porte-drapeau de la méthode axiomatico-déductive en mathématiques qui réduit la question de l'existence à celle de la non-contradiction.

- celui des constructivistes, héritiers des idées de Leopold Kronecker et de l'intuitionnisme du mathématicien hollandais Luitzen Brouwer. « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme » déclarait Kronecker. Pour un constructiviste, ne peuvent accéder à l'existence que les objets — en particulier les preuves — effectivement construits selon des procédures pouvant être réalisées par un humain, ce qui complique les conceptions de l'infini. Il s'agit bien d'une philosophie des mathématiques, théorisée par Brouwer, s'appuyant sur une logique non classique, qui refuse par exemple l'emploi du tiers-exclu. En France, Raymond Poincaré, Émile Borel, Henri Lebesgue font figure de précurseurs de l'intuitionnisme. Les idées intuitionnistes ont trouvé dans l'informatique théorique un extraordinaire terrain d'applications [1].

Précisons que les enseignants ordinaires ont naturellement confiance dans la cohérence de leur discipline et que la non-contradiction des définitions est une condition suffisante d'existence.

Quels modes d'existence ?

Jean-Paul Delahaye a proposé *aux mathématiciens* de classer les questions d'existence en quatre catégories selon le degré d'engagement ontologique [2] qu'elles exigent. Cette classification dépend du mathématicien qui y réfléchit et de sa philosophie qu'elle soit implicite ou dûment élaborée. La majeure partie des mathématiques enseignées relève des deux premiers niveaux.

Prenons la question : « $n = 2^{1\,000\,000\,000} - 7$ est-il premier ? ». Nul ne doute que l'objet ainsi dénoté existe — un petit giga de mémoire suffit à enregistrer les chiffres de son écriture décimale —, nul ne doute que la question a un sens et comment douter que la réponse est soit « oui » soit « non ». Mais il n'est pas exclu que la réponse soit à jamais inaccessible à l'espèce humaine dira un constructiviste qui pourra contester l'assertion « n est premier ou n n'est pas premier ».

En revanche, la question : « existe-t-il un ensemble infini qui ne peut être mis en bijection ni avec un élément de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, ni avec un de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, ni avec un de etc. » sera sans doute déclarée comme dépourvue de sens par beaucoup sauf par quelques spécialistes de la théorie des grands cardinaux ; déjà, que se cache-t-il derrière le « etc. » ?

Existence par exhibition

Une méthode probante pour démontrer l'existence d'un objet possédant certaines propriétés est certainement d'en exhiber un ; mais que signifie « exhiber » en mathématiques ?

Sans préjuger de sa difficulté effective, voilà un problème clairement du plus bas niveau ;

> Existe-t-il une puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par 2021 ?

Personne ne doute qu'elle possède une réponse : oui ou non. Une réponse positive peut *possiblement* être fournie par un programme travaillant avec des entiers non bornés. La traduction dans le langage utilisé du « commence par 2021 » méritera certes réflexion. Il s'avère que la recherche peut aboutir en un temps raisonnable et fournir $2^{1\,559}$ (nombre de 470 chiffres) ; l'existence est ainsi dûment prouvée par exhibition.

Maintenant, en remplaçant 2021 par un numéro INSEE (13 chiffres), l'existence éventuelle validée par le même programme risque de se faire attendre longtemps ; et bien sûr, la

1. Pour le lecteur curieux, renvoyons à la publication *mathématiques constructives* de notre collègue Henri Lombardi disponible sur Publimath.
2. Ce qui est nécessaire pour accepter l'existence.

question demande nécessairement une toute autre approche si on remplace 2021 par un nombre entier arbitraire.

En géométrie plane, exhiber pourra signifier « construire avec des instruments précisés » :

> Étant donné un triangle ABC, existe-t-il trois cercles deux à deux tangents et centrés aux sommets ?

L'intuition de l'existence — éventuellement renforcée par quelque manipulation de géométrie dynamique — est forte. L'obtention d'une construction effective « règle et compas » demande de la pratique de ce type de problème via l'antique incantation : « supposons le problème résolu ».

Si l'exhibition n'est pas toujours possible, en contexte fini certains arguments sont incontestables.

Ainsi le principe des tiroirs — attribué à Gustav Dirichlet [3] — asserte sous sa forme la plus élémentaire que, si l'on range dix chaussettes dans neuf tiroirs, dans tous les cas, au moins un tiroir contiendra au moins deux chaussettes. Des élèves — brillants certes — de Quatrième, après avoir démontré qu'il existe nécessairement deux Parisiens ayant le même nombre de cheveux, ont réussi à formuler ce principe en toute généralité.

Il est intéressant de questionner élèves ou étudiants sur une démonstration de cette évidence ; l'idée d'une preuve par l'absurde — avec une belle négation à la clef — peut nécessiter quelque suggestion.

Ce « principe » et ses généralisations (qui peuvent aller très loin) ont une postérité assez prodigieuse ainsi que l'atteste la bibliographie sur ce sujet. Citons un exemple bien classique qui en illustre l'efficacité : toute l'ingéniosité est dans le choix des chaussettes et des tiroirs.

> Démontrer que le développement décimal d'un rationnel est périodique.

Non-existence : le rôle du raisonnement par l'absurde

L'existence des racines carrées est un grand problème de la scolarité.

Plaçons-nous dans le contexte d'un problème simple [4] :

> Existe-t-il un nombre dont le carré est, disons 10 ?

Formulation bien préférable à « montrons que $\sqrt{10}$ n'est pas rationnel » usuelle mais qui se trompe de cible. On ne précise pas à dessein quel type de nombre est envisagé : l'intention est de créer les conditions de questionnements dont celui de l'existence.

Ainsi l'égalité-calculatrice

$$3{,}162\,277\,660\,17^2 = 10{,}000\,000\,000\,0$$

pourra apparaître, être questionnée et conduire au problème de l'existence d'un décimal x tel que $x^2 = 10$. Celle d'un tel x rationnel suivra.

L'élaboration d'un algorithme compte-gouttes pour les décimales (appelé *décachotomie*) est difficile (même dans le supérieur) mais son fonctionnement peut être montré.

Le domaine géométrique offre un bon support pour la perception visuelle de l'existence de grandeurs « continues » vérifiant certaines conditions. Ainsi l'égalité $10 = 3^2 + 1^2$ pourra conduire à la construction sur quadrillage d'un carré de surface 10 sans qu'il soit nécessaire de connaître le théorème de Pythagore. Et en remplaçant 10 par 7, la question rebondit ; l'appel à la dissection : « découper un rectangle 7×1 et reconstituer un carré avec les morceaux » est une issue possible. Plus tard, Pythagore autorise une construction règle et compas d'un x tel que $x^2 = a$ pour un $a > 0$ quelconque.

3. Dans l'ouvrage *Récréation mathématique*, publié en 1624, figure le problème : « *qu'il est totalement nécessaire que deux hommes ayent autant de cheueux ou de pistolles lun que lautre.* »
4. Auquel une classe de CM2 a pu être confrontée à l'époque des premières calculatrices 4 opérations.

La source des problèmes : l'infini

L'infini est l'objet de questionnements millénaires. Avec ses paradoxes, Zénon pose le problème de la divisibilité à l'infini des grandeurs continues (temps et distance), Eudoxe élabore une théorie des rapports de grandeur évitant le recours à l'infini, Aristote distingue l'infini potentiel et l'infini actuel, excluant le second de sa philosophie et Euclide place l'axiome *« le tout est plus grand que la partie »* dans ses *Éléments*.

L'actualisation de l'infini va prendre vingt-quatre siècles, sera réalisée par Cantor et débouchera sur la fameuse crise des fondements comme aiment à l'appeler les philosophes. Les constructivistes rejettent totalement l'infini actuel.

La récurrence

Le « principe » de récurrence est connu pour être un des axiomes de Peano. Ce principe est souvent implicitement invoqué pour définir toutes sortes de suites, par exemple la suite de Syracuse :

$u_0 = 234$, $u_1 = \frac{u_0}{2} = 117$ car u_0 est pair, $u_2 = 3 \times u_1 + 1$ car u_1 est impair ; puis, via un « par itération », voire par un simple *et cætera*, la suite est considérée comme bien définie ; ce point de vue est conforme à l'esprit constructif qui n'accepte que l'infini potentiel, et ceci semble suffisant au lycée ; toutefois l'examen de la suite « définie » par $u_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}$ et $u_{n+1} = \ln(u_n)$ peut être instructif.

On dispose d'un théorème d'existence (et d'unicité) précieux : le théorème de la suite récurrente. La démonstration, non triviale, de Paul Lorenzen (1939), basée sur l'axiomatique ZF et la définition ensembliste d'une fonction, étant celle habituellement donnée aujourd'hui.

On trouve parfois une pseudo « preuve par récurrence » de cette existence basée sur la propriété « u_n est calculable ». La question : « mais que désigne u dans l'écriture u_n ? » devrait suffire à faire percevoir la pétition de principe.

Les nénuphars

Dans les années mil-neuf-cent-quatre-vingt circulait le déjà vieux problème suivant :

> Un nénuphar, bien seul dans son étang, se dédouble (en surface) en 24 heures ; y a-t-il un moment où les nénuphars recouvreront exactement la moitié de l'étang ?

Les ambiguïtés de l'énoncé — dont le manque apparent de données — font partie du problème. L'intention du problème n'est pas la même posé en Seconde ou en Terminale. Mais quelque soit le niveau, une fois amorcé, le débat se polarise autour de deux idées : l'évidence d'une réponse positive, liée à une intuition de type valeur intermédiaire, et le besoin de calcul qui butte sur la mise en correspondance de l'arithmétique et du géométrique. Il est rare que la question : « que se passe-t-il en 12 heures » se fasse jour spontanément dans les têtes.

Les grands théorèmes d'existence de l'analyse

L'existence d'une limite pour une suite croissante majorée de nombres réels est classiquement démontrée dans le post-bac à grand renfort de borne supérieure. Or, pensé avec des développements décimaux illimités, le théorème est très intuitif : les décimales des termes d'une suite croissante majorée se stabilisent nécessairement une à une… Un exemple et un ordinateur suffit à le faire saisir aux plus récalcitrants.

Depuis plusieurs décennies, la méthode dichotomique a la cote dans la scolarité, conséquence de l'option du « tout séquentiel » de 1981 ; on sait, d'une part, qu'elle permet de prouver tous les grands théorèmes de l'analyse élémentaire réelle, entre autres le théorème des valeurs intermédiaires, et que, d'autre part, conséquence de l'option récente du « tout algorithmique » l'institution n'a eu de cesse de mettre en avant l'algorithme dichotomique de calcul des valeurs approchées d'une équation $f(x) = 0$ (sous hypothèses *ad hoc*) en arguant de sa simplicité et de son caractère universel. Seulement, il y a un hic, probablement pointé par les constructivistes [5].

Soit $d_n = \text{PGCD}\left(n^{17}+9, (n+1)^{17}+9\right)$ et soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } d_n = 1 \\ 1 & \text{si } d_n \neq 1 \text{ et } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } d_n \neq 1 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

Pour toute valeur de n, d_n et donc a_n sont algorithmiquement calculables ; le lecteur observera que $a_n = 0$ aussi loin qu'un système accepte de calculer (en un temps raisonnable).

Posons alors $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$; a est mathématiquement bien défini (c'est-à-dire existe !) et cela même pour des constructivistes puisqu'on est capable de calculer une valeur approchée décimale de a à toute précision donnée (en un temps éventuellement pas raisonnable).

Soit ensuite f la fonction continue sur $[0;1]$ et affine par morceaux, telle que

$$f(0) = -1,\ f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = a \text{ et } f(1) = 1.$$

Le TVI s'applique : il existe (pour un candidat au baccalauréat) $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Or si on applique l'algorithme dichotomique à f sur l'intervalle $[0;1]$ avec la précision $\frac{1}{10}$, le premier test porte sur la condition $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ soit $a = 0$ qui s'avère être indécidable : $a = 0$ équivaut à $a_n = 0$ pour tout n. Ainsi donc l'algorithme dichotomique, censé prendre en entrée un intervalle $[a;b]$, une fonction continue calculable y changeant de signe et une précision ne fonctionne pas dans ce cas [6]. D'où l'utilité d'une version constructive du TVI.

On demande en spécialité mathématiques de la classe de Première d'admettre le théorème d'existence de la fonction exponentielle. Il est certain qu'aucune démonstration raisonnable n'est envisageable à ce niveau. Mais la méthode d'Euler, appliquée sur un intervalle quelconque, par exemple $[-1;1]$, et *montrée* avec un logiciel quelconque constitue à ce niveau une preuve d'existence acceptable.

Tératologie

Les fonctions posent de redoutables problèmes d'existence.

Voici une question inconcevable pour les mathématiciens du XIX^e^ siècle et encore aujourd'hui pour les constructivistes :

> Peut-on imaginer une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable ?

Un étudiant — plus intéressé par la programmation en assembleur (sur 8086, presque la préhistoire) de son logiciel de musique mais assez familier avec les signaux divers — fut accroché par la question. Son point de départ, excellent : une fonction périodique continue en dents de scie. Sa recherche a fini par aboutir à la représentation graphique d'une somme (finie) de fonctions en dents de scie, chaque terme doublant le nombre de dents de la précédente, *représentation* suffisante pour le convaincre que la chose était possible [7]…

Un autre objet « monstrueux » est historiquement célèbre :

> Il existe une courbe passant par tous les points du carré $[0;1]\times[0;1]$.

Peano, Lebesgue, Hilbert ont exhibé une telle courbe [8].

Revenons dans nos classes. L'existence de bijections entre les différents types d'intervalles, surtout entre ceux qui ne sont pas homéomorphes, est digne d'intérêt : $[-1;1]$ et $]-1;1]$ par exemple : l'infini est inévitable.

5. Et porté à notre attention par notre collègue Gérard Lavau.
6. Bien comprendre qu'il ne s'agit pas d'un problème lié à la représentation des nombres en machine.
7. En réalité, il reste beaucoup de travail ; mais une fois l'intérêt éteint, inutile d'insister.
8. Une construction est décrite sur le site `mathcurve`.

Terminons avec le résultat suivant pour lequel l'engagement ontologique requis est fort.

Étant donné une boule (de $\mathbb{R}^3$), il existe une partition de cette boule en un certain nombre de « morceaux » tels qu'avec ceux-ci, on puisse reconstituer deux boules *isométriques* à la boule donnée.

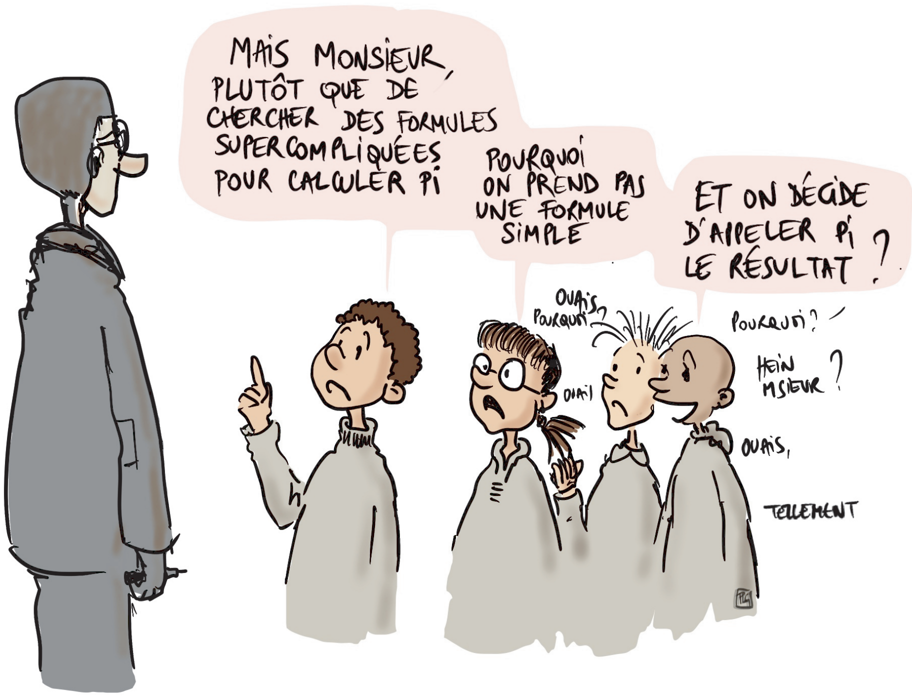
Autrement dit, en pensant volume, 2 = 1 ! Ce théorème paradoxal, dit de Banach-Tarski-Hausdorff, utilise l'axiome du choix indispensable pour obtenir des morceaux non mesurables, ce qui explique le paradoxe. Mais ce résultat est tellement contre-intuitif qu'il peut inciter à rejeter l'axiome du choix.

Conclusion

Même en mathématiques, certains débats sur l'existence des objets ont un fondement philosophique et les points de vue entre mathématiciens classiques et mathématiciens constructivistes sont irréconciliables. On observera que la plupart des problèmes d'existence qui jalonnent la scolarité sont esquivés et que la tendance des programmes au « tout algorithmique » — tendance assez constructiviste en soi — a bien du mal à être acceptée par de trop nombreux collègues.

L'auteur, à la retraite depuis quelques années, continue de s'intéresser aux mathématiques et à leur enseignement.

boucherf@free.fr



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2022 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur https://www.apmep.fr

NOM (établissement ou personne) : ....

Adresse : ....

Code Postal : .... *Ville :* .... *Pays :* ....

Téléphone : .... *Adresse courriel :* ....

Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : ....

Adresse de livraison : ....

Adresse de facturation : ....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1^er^ degré ☐ 2^e^ degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : `contactrgpd@apmep.fr`.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur https://www.apmep.fr.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur `Chorus.pro` *; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :* ....

Date : .... *Signature :* .... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du nº 542

Maths et citoyenneté (2)

APMEP

www.apmep.fr