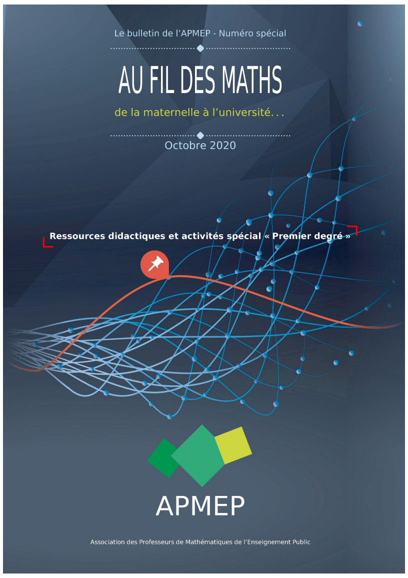


ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 – Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr
Site : https://www.apmep.fr

L'APMEP est très heureuse de mettre à votre disposition cet article, publié dans son hors-série nº 1 « Spécial Premier degré » en accès libre et gratuit ▶.

Ce hors-série d'*Au fil des maths* « Spécial Premier degré » est une fenêtre ouverte sur quelques ressources pour la pratique des mathématiques en classe, du cycle 1 au cycle 3, et exalte les capacités de partage et d'échange entre collègues et didacticiens.

Vous y retrouverez nos cinq rubriques habituelles :

Opinions Points de vue sur l'actualité de l'enseignement des mathématiques, paroles d'experts en didactique…

Avec les élèves Expériences de classe, interdisciplinarité, didactique appliquée…

Ouvertures Science mathématique, documentation, analyse et utilisation des ressources, international…

Récréations Jeux, problèmes et concours (solutions proposées sur le site), curiosités mathématiques…

Au fil du temps Histoire des mathématiques, recensions, événements…

Dans le même esprit que ce hors-série d'*Au fil des maths*, vous pourrez également participer aux *Mercredis de l'APMEP* ▶ qui se veulent être un espace dédié aux questions de l'enseignement des maths à l'école primaire ou encore à la commission Premier degré. Pour plus d'informations, n'hésitez pas à consulter notre site ▶.

En attendant, vous avez accès à la boutique en ligne ▶, qui contient toutes les ressources « premier degré » éditées par l'association.

Et pour adhérer à l'association, rendez-vous ici ▶ !

Bonne lecture… et à bientôt parmi nous !

Sébastien Planchenault
Président de l'APMEP.
president.e@apmep.fr
© APMEP Octobre 2021

Vergnaud *versus* Singapour

La résolution de problèmes, au centre de l'activité des élèves dès l'école. . . Dans cet article, l'auteur interroge des catégorisations de problèmes additifs basiques, leur rôle, leur utilisation pour enseigner et leur appropriation par les collègues.

Richard Cabassut

La résolution de problèmes : un thème d'actualité dans la formation à l'école primaire

À la suite du rapport Villani-Torossian [1], une importante réforme de la formation continue des professeurs d'école a été mise en oeuvre, notamment pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques. Un des dispositifs clés de cette réforme est la mise en place de constellations, regroupant six à huit enseignants de la même zone locale (sans être obligatoirement rattachés à la même école), animées par un même Référent Mathématique de Circonscription (RMC). Pour réaliser cette étape il a fallu recruter et former ces RMC, parfois dans des académies très déficitaires du point de vue des ressources humaines disponibles. Un des premiers thèmes de formation envisagé est celui de la résolution de problèmes [2]. Nous proposons dans cet article de réfléchir sur le rôle des catégorisations de problèmes pour montrer sur ce thème de la résolution de problèmes la délicate articulation entre recherche et enseignement.

Le rôle des catégorisations de problèmes

La catégorisation des problèmes semble un outil intéressant pour un enseignement de la résolution de problèmes [3, p. 4] : *« de l'avis général des chercheurs consultés, il est utile d'engager, en formation initiale comme en formation continue, un travail de catégorisation des problèmes mathématiques. Il permet d'outiller les enseignants afin : de faire "l'analyse* a priori*" des énoncés proposés, d'évaluer la nature de la difficulté soulevée par tel ou tel énoncé, de s'assurer de varier les types de problèmes proposés ».* Une partie des justifications des pratiques d'enseignement et de formation se fondent sur des résultats de la recherche. C'est pourquoi nous allons évoquer deux catégorisations de problèmes issues de la recherche.

Deux exemples de catégorisations de problèmes verbaux arithmétiques additifs issus de la recherche

Un problème verbal est un problème énoncé par un discours oral ou écrit, sans recours à des représentations non linguistiques (schéma, dessin, photo, geste, matériel, . . .). Un problème arithmétique est un problème qui se modélise par des relations entre nombres impliquant au plus les quatre opérations de base de l'école primaire (addition, soustraction, multiplication, division). Un problème additif est un problème précédent impliquant seulement l'addition ou la soustraction.

Catégorisations sémantiques (Vergnaud)

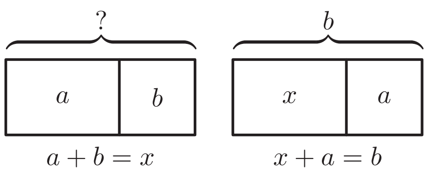
Dans les années 70, des catégories sémantiques de l'énoncé sont apparues. Illustrons avec l'exemple de Riley [4] traduit dans la thèse de Maryvonne Priolet [5, p. 104].

TYPES DE PROBLÈME		TAUX DE RÉUSSITE			
PROBLÈMES DE CHANGEMENT		5 ans	6 ans	7 ans	8 ans
Changement 1	X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?	0,87	1,00	1,00	1,00
Changement 2	X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?	1,00	1,00	1,00	1,00
Changement 3	X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?	0,61	0,56	1,00	1,00
Changement 4	X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y ?	0,91	0,78	1,00	1,00
Changement 5	X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien X avait-il de billes ?	0,09	0,28	0,80	0,95
Changement 6	X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?	0,22	0,39	0,70	0,80
PROBLÈMES DE COMBINAISON					
Combinaison 1	X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont-ils de billes ensemble ?	1,00	1,00	1,00	1,00
Combinaison 2	X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?	0,22	0,39	0,70	1,00
PROBLÈMES DE COMPARAISON					
Comparaison 1	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ?	0,17	0,28	0,85	1,00
Comparaison 2	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?	0,04	0,22	0,75	1,00
Comparaison 3	X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?	0,13	0,17	0,80	1,00
Comparaison 4	X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien Y a-t-il de billes ?	0,17	0,28	0,90	0,95
Comparaison 5	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	0,17	0,11	0,65	0,75
Comparaison 6	X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	0,00	0,06	0,35	0,75

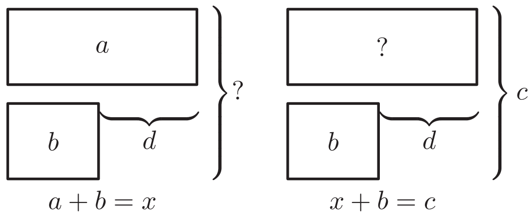
Dans cet exemple, trois grandes catégories sémantiques de problèmes additifs apparaissent : les changements, les combinaisons et les comparaisons (appelés respectivement transformations d'états, compositions d'états et comparaisons d'états dans la catégorisation de Vergnaud [6]). Les résultats précédents montrent une variation des réussites suivant les catégories et les sous-catégories, et suivant les âges. Ces recherches ouvrent donc l'étude des progressions, des dispositifs, des aides dans l'enseignement, non plus en fonction de catégories dépendant des seules opérations mathématiques impliquées dans le problème (ici l'addition et la soustraction), mais en tenant compte d'autres variables (ici la catégorie du récit), mais aussi dans d'autres recherches la taille et la nature des nombres, les grandeurs en jeu, la complexité sémantique et syntaxique de l'énoncé, les registres de formulation de l'énoncé (énactif, iconique, symbolique)...

Catégorisations par des modélisations en barres (Singapour)

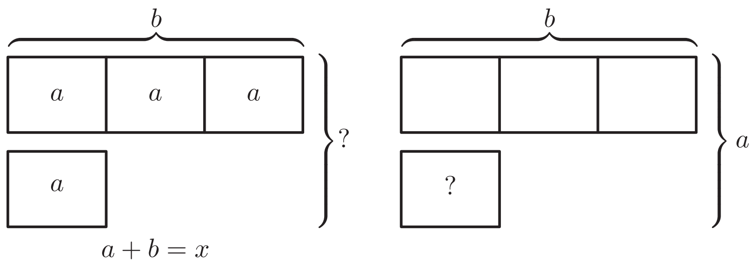
À partir des années 1980, l'État de Singapour a développé une catégorisation des problèmes arithmétiques reposant sur une modélisation visuelle à l'aide de représentations en barres. Les trois catégories suivantes, extraites de [7], concernent les problèmes additifs basiques. La modélisation de la multiplication et la division apparaît comme un cas de modélisation d'addition répétée de nombres égaux.



Modèle parties-tout.



Modèle de comparaison.



Modèle de multiplication et division.

Par rapport aux catégorisations précédentes, l'aspect sémantique est absent. Il est pris en charge dans une étape de verbalisation en amont de la représentation. Par contre, l'aspect modélisation est valorisé et le type de registre de représentation (des barres visuelles) est dominant. Des recherches [8] ont étudié l'effet de ces catégorisations sur l'apprentissage et l'enseignement, confortées par les bons résultats de Singapour aux évaluations internationales, sans que le lien entre l'usage de ces catégorisations et ces bons résultats aux évaluations soit avéré [9].

L'utilisation des catégorisations pour enseigner

Dans les ressources officielles

Pour accompagner les programmes de 2008, une ressource officielle [10] se réfère plusieurs fois (pp. 22, 57, 73, 90, 96) aux catégorisations de Vergnaud. D'autres ressources apparaissent pour étudier les progressions à partir de ces catégorisations et les aides possibles, en utilisant par exemple des schématisations de Vergnaud [11, 12]. Pour accompagner les programmes réajustés en 2018, des guides sur la résolution de problèmes sont proposés [13] s'appuyant sur les modélisations en barres et des ressources apparaissent pour appuyer cette approche [14, 15].

> L'enseignant pourrait donc se sentir écartelé entre ces deux catégorisations différentes. Ce qui nous apparaît important c'est que l'enseignant soit conscient des justifications de ces catégorisations, c'est-à-dire des intérêts à les utiliser dans l'enseignement. Chacune de ces catégorisations présentent des avantages et des inconvénients.

Comparaison des deux catégorisations

Pour faire court, le mérite des catégorisations sémantiques est d'avoir sensibilisé les enseignants à l'importance des éléments sémantiques de l'énoncé dans la compréhension de l'énoncé et dans la recherche de solutions aux problèmes, et donc dans les difficultés que peuvent rencontrer les élèves et dans la progression de ces difficultés.

Le mérite des catégorisations avec des représentations en barres est d'avoir sensibilisé l'enseignant à l'importance de la modélisation, notamment avec l'usage d'une représentation visuelle particulière utilisant des barres.

Dans les catégorisations de modélisation en barres, le nombre de catégories est plus réduit par rapport aux catégorisations sémantiques : quelle opérationnalité pour l'enseignement et l'apprentissage des quatorze sous-catégories sémantiques des problèmes additifs évoquées dans Durpaire [10, p. 73] ? Cependant ce nombre réduit de catégories contraint les élèves à reconnaître par exemple qu'un problème de transformation des catégories sémantiques relève du problème parties-tout. Les exercices de recodage sémantique [16] vont permettre cette reconnaissance dans la phase de verbalisation en amont de la modélisation en barres. Les difficultés repérées par les catégorisations sémantiques seront bien à traiter dans la phase de verbalisation.

Les représentations sémantiques versus les représentations en barres

Concernant ses schémas de modélisation des problèmes additifs, Vergnaud rappelle qu'*« en tant que support pour les problèmes, ils sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes »* [17, p. 34]. Au contraire, les schémas de modélisation en barres peuvent être utilisés avec différents thèmes (numération, mesure, fraction, pré-algèbre...) et de la grande section au collège, assurant ainsi une continuité horizontale et verticale.

L'expérience de Singapour a permis de pointer des difficultés liées à la modélisation en barres [18, p. 47] :

- la précision du schéma en barres : par exemple, certains auteurs [14, pp. 21, 25] préconisent, à tort de notre point de vue, une barre de longueur proportionnelle à la valeur qu'elle représente ;
- le partage d'une barre pour un grand nombre de parts ;
- la pertinence de la modélisation en barres : dans certains cas de proportionnalité (notamment multiple) une représentation en tableau permet d'utiliser la linéarité plus facilement qu'une représentation en barres ; dans d'autres cas une écriture pré-algébrique est préférable à des représentations en barres.

Varier les registres de représentations

L'utilisation de différents registres de représentation (énoncé écrit, énoncé oral, type de schéma, écriture pré-algébrique) permet de travailler la conversion d'un registre à l'autre [19] et de mieux saisir le concept commun à tous ces registres (la relation additive entre les données dans le cas des problèmes additifs).

Quelle que soit la catégorisation choisie, les problèmes complexes à plusieurs étapes demanderont, dans chaque registre, de savoir traiter le problème (reformulation et inférences pour les énoncés, évolution des schémas complexes, calcul pré-algébrique). Avec le temps, le calcul pré-algébrique devrait apparaître comme le plus efficace dans les problèmes complexes. Les problèmes complexes semblent insuffisamment travaillés en France, ce qui peut expliquer la faiblesse des élèves français sur la construction de modèles complexes. Une catégorisation des problèmes proposée par Houdement [20] propose trois catégories : le problème basique qui pourra se résoudre en utilisant une des quatre opérations arithmétiques, le problème complexe qui se décompose en problèmes basiques et le problème atypique qui ne relève pas des catégories précédentes. Cette catégorisation permet de redonner une place aux problèmes complexes et atypiques. D'ailleurs, les repères annuels de progression [21] confirment ce point de vue.

On voit donc qu'un enseignant dispose de plusieurs catégorisations de problèmes pour choisir une stratégie d'enseignement sur la résolution de problèmes : le plus important sera de justifier ses choix.

L'appropriation des catégorisations dans les constellations

Pour les enseignants, concernant les catégorisations, deux points de vigilances sont relevés ici [3] :

« • *Si le problème proposé est centré sur un contenu mathématique, comme objet central de l'apprentissage ciblé par l'enseignant, il est nécessaire de s'assurer que le travail de réflexion extérieur à l'objet d'apprentissage visé ne va pas empêcher l'apprentissage. Certains chercheurs s'interrogent donc sur le risque que l'activité de catégorisation proposée n'aide pas forcément les élèves à focaliser leur attention sur l'objet mathématique étudié.*

- *La résolution de problème nécessite un travail de transposition langagière, entendu comme traduction, décodage-recodage, ou décryptage de l'énoncé du problème, pour reconnaître les éléments d'ordre mathématique qui sont donnés, et ce qu'il faut trouver. Pour certains chercheurs, le travail de catégorisation risque de conduire certains élèves à un travail de prélèvement d'indices lexicaux ou syntaxiques hasardeux, qui parfois déboucheront sur un résultat juste avec une catégorisation erronée. Ce risque des "analogies non contrôlées" par des savoirs suffisants concerne davantage les élèves les plus éloignés de la culture scolaire, et peut leurrer les enseignants les moins chevronnés.* »

La mise en place de constellations complète le travail collectif bien souvent engagé dans les écoles. Les constellations contribuent à la réflexion sur le choix de progressions, d'énoncés de problèmes, de représentations et de procédures attendues, de situations d'enseignement. Ces choix ne doivent pas être l'application d'injonctions venues de l'autorité hiérarchique mais le fruit de justifications basées sur des résultats de la recherche et sur l'observation et l'évaluation des pratiques professionnelles. Il faut faire confiance à ce jeune dispositif de formation continue qui, avec le temps, saura gagner en compétence et en efficacité.

Références

[1] C. Villani et C. Torossian. *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* France : Ministère de l'Éducation nationale, 2018.

[2] Annie Feyfant. « La résolution de problèmes de mathématiques au primaire ». In : *Dossier de veille de l'IFÉ* N° 105 (2015).

[3] Centre Alain Savary. *Catégorisation des problèmes en mathématiques, un enjeu langagier majeur.* . 2018.

[4] M. S. Riley, J. G. Greeno et J. I. Heller. « Development of children's problem-solving ability ». In : *The development of mathematical thinking* (1983). Sous la dir. de H. P. Ginsberg (Ed.), pp. 153-196.

[5] Maryvonne Priolet. « Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques : le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique ». Thèse. Université Lyon 2, 2008.

[6] G. Vergnaud. « Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives ». In : *Petit x* Nº 22 (1989), pp. 51-69.

[7] S. F. Ng et K. Lee. « The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems ». In : *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 40.Nº 3 (2009), pp. 282-313.

[8] B. Kaur. « The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems ». In : *ZDM Mathematics Education* Nº 51 (2019), pp. 151-168.

[9] R. Cabassut. « Les représentations en barres : « *ni cet excès d'honneur, ni cette indignité* » ». In : Au fil des maths Nº 537 (2020).

[10] Jean-Louis Durpaire et Marie Mégard. *Le nombre au cycle 2*. . CANOPE-CNDP, 2010.

[11] Olivier Graff, Antonio Valzan et Benoît Wozniak. *Problèmes additifs et soustractifs au CP-CE1*. Nord – Pas de Calais : SCÉRÉN/CRDP, 2013.

[12] Kevin Guegen. *Résolution de problèmes arithmétiques*. . Centre Alain Savary, 2019.

[13] Ministère de l'Éducation nationale. *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. . 2020.

[14] J.-M. Jamet. *Résoudre les problèmes avec la modélisation du CE2 au CM2*. . Hachette Éducation, 2019.

[15] Muriel Grandclément et al. *Une démarche pour résoudre des problèmes arithmétiques au cycle 2*. . Centre Alain Savary, 2020.

[16] E. Sander. « Une approche interprétative de la résolution de problèmes ». In : *Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques* (2018). Sous la dir. de Julia Pilet & Céline Vendeira. .

[17] G. Vergnaud et alii. In : *Le Moniteur de Mathématiques – Résolution de problèmes – Fichier pédagogique* (1997).

[18] Yan Kow Cheong. « The Model Method in Singapore ». In : *The Mathematics Educator* Vol. 6.Nº 2 (2002), pp. 47-64.

[19] Raymond Duval. « Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques ». In : *Actes du 32e colloque de la COPIRELEM* (2005).

[20] C. Houdement. « Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème ? » In : *Préactes du séminaire de didactique des mathématiques* (2018). Sous la dir. de Julia Pilet & Céline Vendeira (éds.) .

[21] Ministère de l'Éducation nationale. *Repères annuels de progression pour le cycle 2*. . 2018.

Richard Cabassut est maître de conférences en didactique des mathématiques à l'université de Strasbourg. Il est membre de la régionale APMEP de Strasbourg et de l'équipe d'*Au fil des maths*.

richard.cabassut@gmail.com

G T C

© APMEP *Octobre 2021*

Agir avec L'APMEP !

En adhérant
ou
en parrainant
un stagiaire

APMEP