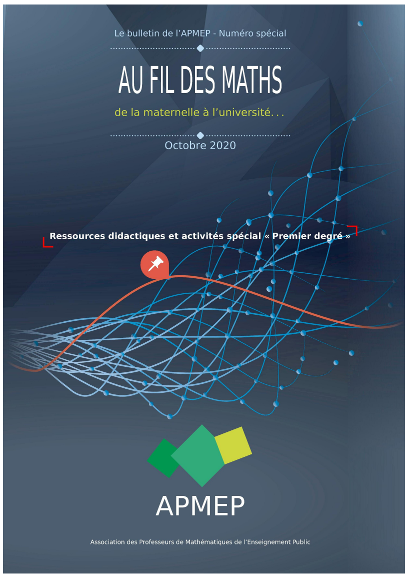


ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 – Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr
Site : https://www.apmep.fr

L'APMEP est très heureuse de mettre à votre disposition cet article, publié dans son hors-série n° 1 « Spécial Premier degré » en accès libre et gratuit ▶.

Ce hors-série d'*Au fil des maths* « Spécial Premier degré » est une fenêtre ouverte sur quelques ressources pour la pratique des mathématiques en classe, du cycle 1 au cycle 3, et exalte les capacités de partage et d'échange entre collègues et didacticiens.

Vous y retrouverez nos cinq rubriques habituelles :

Opinions Points de vue sur l'actualité de l'enseignement des mathématiques, paroles d'experts en didactique…

Avec les élèves Expériences de classe, interdisciplinarité, didactique appliquée…

Ouvertures Science mathématique, documentation, analyse et utilisation des ressources, international…

Récréations Jeux, problèmes et concours (solutions proposées sur le site), curiosités mathématiques…

Au fil du temps Histoire des mathématiques, recensions, événements…

Dans le même esprit que ce hors-série d'*Au fil des maths*, vous pourrez également participer aux *Mercredis de l'APMEP* ▶ qui se veulent être un espace dédié aux questions de l'enseignement des maths à l'école primaire ou encore à la commission Premier degré. Pour plus d'informations, n'hésitez pas à consulter notre site ▶.

En attendant, vous avez accès à la boutique en ligne ▶, qui contient toutes les ressources « premier degré » éditées par l'association.

Et pour adhérer à l'association, rendez-vous ici ▶!

Bonne lecture… et à bientôt parmi nous!

Sébastien Planchenault
Président de l'APMEP.
president.e@apmep.fr

Le Rallye Mathématique Transalpin

Que ce soit en primaire, au collège ou au lycée, ce n'est pas toujours simple de trouver de « bons » problèmes pour mettre les élèves en situation de recherche. Christine Le Moal présente ici le Rallye Mathématique Transalpin et ses problèmes de recherche ainsi que tous les outils qui ont été développés sur lesquels il est aisé de s'appuyer. Une ressource très riche du CE2 à la classe de Seconde. N'hésitez pas à vous lancer !

Cet article est paru dans le nº 535 (2020).

Christine Le Moal
(contribution de Géraldine Comptier, Vincent Eparvier & Félicia Védrine)

Présentation

En Franche-Comté, environ 400 classes de Sixième, Cinquième et Quatrième participent chaque année au Rallye Mathématique Transalpin (RMT). Ce rallye est une confrontation entre classes, chaque classe doit résoudre sept problèmes en 50 minutes et fournir, pour chaque problème, une réponse argumentée unique. Ces problèmes sont systématiquement des petites énigmes contextualisées où se cachent un peu de mathématiques : logique, combinatoire, arithmétique, calculs numériques et proportionnalité, géométrie, suites, fonctions et probabilités pour les deux catégories les plus élevées. L'attribution des points dépend de la rigueur des démarches et de la clarté des explications fournies.

Le rallye s'effectue en trois étapes (éventuellement quatre) : en décembre, une épreuve d'entraînement à l'issue de laquelle la décision est prise d'inscrire ou non la classe, en février et en avril deux épreuves du type décrit ci-dessus et, pour les dix meilleures classes (par niveau) à l'issue de ces deux épreuves, une épreuve finale en mai, toujours du même type.

Le RMT est un rallye international. Plus de vingt sections, soit environ 4 000 classes, l'organisent, essentiellement en Italie, mais aussi en Belgique, en Suisse et au Luxembourg. Il s'adresse à des élèves depuis le CE2 (catégorie 3) jusqu'à la Seconde (catégorie 10) [1].

Tout au long de l'année, dans chaque pays participant, les différentes sections fabriquent, choisissent, adaptent, enrichissent le stock des problèmes. Lors de journées d'études internationales, les animateurs des différents pays participants déterminent les exploitations didactiques des problèmes du RMT et produisent des analyses *a priori* (pour aider l'enseignant à anticiper le travail des élèves) et *a posteriori* (pour rendre compte de réussites et d'échecs d'élèves par catégorie). Ces travaux sont accessibles sur le site de l'association ARMT [1] et les problèmes et leurs analyses sont regroupés dans une banque de problèmes [2] [2].

En quoi proposer ce type de problèmes aux élèves contribue-t-il à leurs apprentissages mathématiques ?

Le groupe de l'IREM de Besançon qui gère l'organisation du RMT en Franche-Comté travaille également à promouvoir auprès des enseignants la recherche de problèmes dans leur pratique régulière de la classe. En effet, beaucoup de professeurs inscrivent leurs classes pour participer au concours, mais n'utilisent pas les problèmes à d'autres moments que lors des trois épreuves annuelles. Or l'apprentissage de la résolution de problèmes ne se fait pas en quelques séances ponctuelles. Il faut mettre plus souvent les élèves en situation pour leur permettre de construire des méthodes de recherche et de mobiliser des connaissances anciennes. Pour illustrer ce propos, appuyons-nous sur quelques travaux de recherche.

Par exemple, Catherine Houdement [3], chercheuse en didactique des mathématiques à Rouen, définit plusieurs sortes de problèmes arithmétiques :

- des problèmes qu'elle a appelés « basiques » : *« il s'agit des problèmes qui constituent des éléments "simples" du raisonnement au sens de la chimie de Mendeleïev »* (problèmes à une étape, ou problèmes à deux données numériques où il faut trouver la troisième, ou proportionnalité simple, ou problèmes sans trop d'informations et où celles-ci sont connectées) ;
- elle distingue ensuite deux sortes de problèmes qui ne seraient pas basiques :
  * d'abord *« des "problèmes complexes" qui sont des agrégats de "problèmes basiques" »* (il faut connecter les informations qui sont dans le texte ou il faut qualifier la réponse),
  * et ensuite *« des "problèmes atypiques" définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes »*.

Le psychologue cognitiviste Jean Julo souligne quant à lui l'importance de la représentation (mentale) dans le processus de résolution de problèmes. Il ne suffit pas de comprendre l'énoncé au sens sémantique du terme, il faut aussi comprendre les relations complexes entre le but donné et les conditions de réalisation de ce but. D'après lui, nous aurions chacun une *mémoire des problèmes* qui nous permettrait de reconnaître et de traiter des problèmes « ressemblants » [3] de façon presque « automatique ». Et nous enrichissons cette mémoire grâce à la résolution *réussie* de problèmes que *nous menons à terme* [4] et [5].

En conclusion, pour retirer les bénéfices de la recherche de problèmes, il faut s'engager dans

1. Les catégories 1 et 2 n'existent pas.
2. Dans la revue numérique, vous pouvez voir un diaporama expliquant l'utilisation de cette banque de problèmes.
3. Point de vue du résolveur.

une pratique régulière avec le souci de faire réussir les élèves par eux-mêmes, accepter qu'ils essaient, échouent, recommencent, en leur donnant des coups de pouce si besoin mais sans « tuer » le problème : *« trop expliquer, c'est empêcher de comprendre »* selon les recommandations du GFEN [4].

Contribution du RMT à la résolution de problèmes

Pour s'engager dans une telle démarche, le RMT est une source très riche. Il propose des problèmes complexes ou atypiques. Confronter les élèves à la résolution de tels problèmes favorise la construction et l'utilisation de connaissances et développe leur inventivité stratégique. Cela permet aussi à l'enseignant d'évaluer (formativement) chez les élèves la connaissance (voire la méconnaissance) de notions déjà enseignées. De plus, le travail collaboratif des élèves pendant la recherche participe positivement à la construction des savoirs ; il stimule leur intérêt pour la résolution de problèmes de mathématiques.

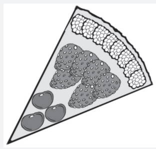
Pour anticiper les difficultés et préparer les coups de pouce, on trouvera dans la banque de problèmes des analyses *a priori* (analyse générale de la tâche, démarches attendues des élèves, obstacles prévisibles) et des analyses *a posteriori* s'appuyant sur des productions d'élèves. Ces analyses permettent de repérer les connaissances minimales nécessaires à la résolution du problème et si besoin d'envisager des problèmes basiques à construire au préalable. Elles permettent également d'anticiper certaines stratégies, certaines erreurs, de repérer les déficits de connaissances des élèves et d'envisager des variantes pour simplifier ou au contraire complexifier le problème en fonction du niveau scolaire des élèves [6].

Un exemple

En cette année 2019, le problème *« La tarte aux fruits »* faisait partie des problèmes de l'épreuve d'entraînement des classes de Sixième en Franche-Comté :

LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7) [5]
Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire. Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : *« Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa ! »*

Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ? Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

Le groupe qui l'a cherché dans ma classe de 6^{e} y a passé très peu de temps et a répondu : *« $8 \times 17 = 136$ donc il y a 136 fruits. »* Cette réponse est fausse car il faut 9 parts pour reconstituer la tarte entière.

Quand j'ai fait le bilan de l'épreuve d'entraînement, j'ai indiqué rapidement qu'ils n'avaient pas trouvé la bonne réponse à ce problème mais sans le corriger, car je voulais le réutiliser plus tard dans l'année au moment du travail sur les angles. J'ai alors consulté l'analyse *a priori* de ce problème disponible dans la banque :

ANALYSE *A PRIORI*
Tâche mathématique Déterminer le nombre de secteurs circulaires superposables en lesquels un disque a été partagé, à partir du dessin d'un des secteurs (dont l'angle mesure 40°), pour trouver le nombre total d'objets disposés sur le disque, sachant que sur chaque secteur il y en a 17.

.../...

4. Groupe Français d'Éducation Nouvelle.
5. 24^{e} rallye mathématique transalpin, 2^{e} épreuve, problème n° 6.

. . ./. . .

Analyse de la tâche

- Se représenter la tarte et comprendre qu'elle a été partagée en parts égales, de la même forme, de mêmes dimensions, avec le même nombre de fruits. Comprendre que les parts étant l'une à côté de l'autre, deux parts voisines ont un « côté » en commun.
- Comprendre que pour trouver le nombre total de fruits utilisés, il faut reconstituer la tarte entière, de manière à connaître le nombre de parts en lesquelles la tarte a été découpée.
  Pour reconstruire la tarte, on peut procéder de différentes manières.
  * Découper une part égale à celle qui est dessinée (à partir d'une autre copie de l'énoncé ou en utilisant une feuille de papier calque), la poser à côté de la part donnée, en marquer le contour et continuer de même à reporter cette part sur le dessin de proche en proche, jusqu'à compléter toute la tarte. Compter le nombre des parts ainsi dessinées (9) (stratégie 1).
  * Ou bien, à partir du dessin d'une part, dessiner une autre part égale en pliant la feuille le long d'un côté de la première part et en traçant l'autre côté par transparence et continuer ainsi de suite (stratégie 2).
  * Ou bien, tracer un cercle ayant pour centre la « pointe » de la part de tarte et pour rayon le « côté » de cette part, reporter l'arc ou la corde ou l'angle au centre, compter le nombre d'arcs, de cordes ou de secteurs angulaires (stratégie 3).
  * Ou bien, mesurer au rapporteur l'angle de la part de tarte (40°) et déterminer le nombre de parts en calculant $360 \div 40 = 9$ (stratégie 4).
  * Il est aussi possible de dessiner les parts de tarte « à l'œil », mais cette procédure a peu de chances de donner le nombre exact de parts (stratégie 5).
- Multiplier le nombre de fruits d'une part par le nombre de parts : $17 \times 9 = 153$.

L'analyse de la tâche m'a permis de constater que les procédures possibles étaient nombreuses (cinq différentes citées) et qu'elles correspondaient bien aux attendus du programme :

> ***Angles***
>
> - *Identifier des angles dans une figure géométrique.*
> - *Comparer des angles, en ayant ou non recours à leur mesure (par superposition, avec un calque).*
> - *Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.*
>
> . . .
>
> - *Utiliser le rapporteur pour :*
>   - *Déterminer la mesure en degrés d'un angle*
>   - . . .

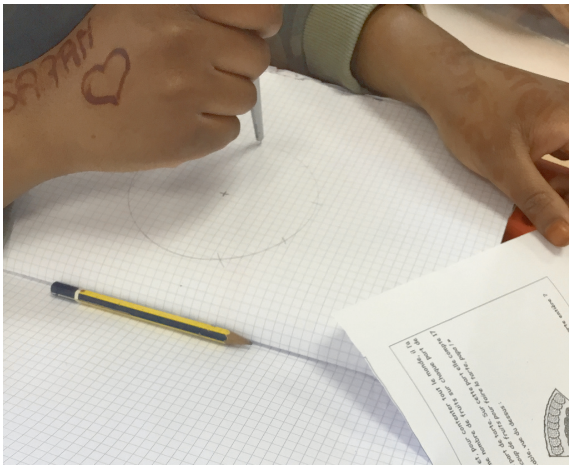
Le moment venu, j'ai donc proposé ce problème à toute la classe. Nous n'avions pas encore évoqué la notion d'angle, c'était donc pour moi l'occasion de constater quelles étaient leurs connaissances sur cette notion.

Comme d'habitude lorsque nous travaillons sur la recherche de problèmes, les élèves s'installent en groupes. Je leur explique qu'ils ont droit à tous les outils à leur disposition (cahier de leçons, livre, dictionnaire, calculatrice, matériel de géométrie) et qu'ils peuvent découper, dessiner et écrire sur l'énoncé. Je leur fournis aussi des feuilles de brouillon, du papier calque et d'autres énoncés.

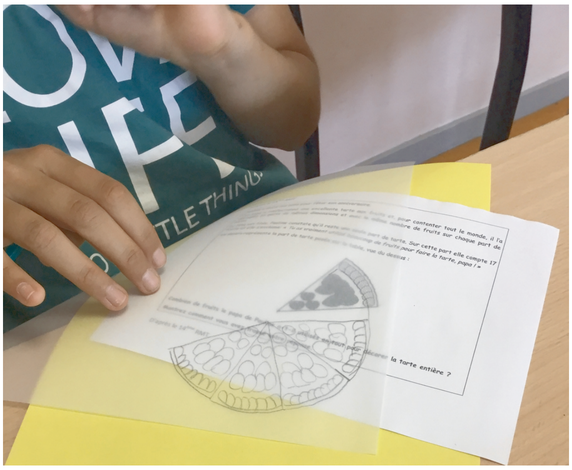
J'ai pu alors observer différentes stratégies :

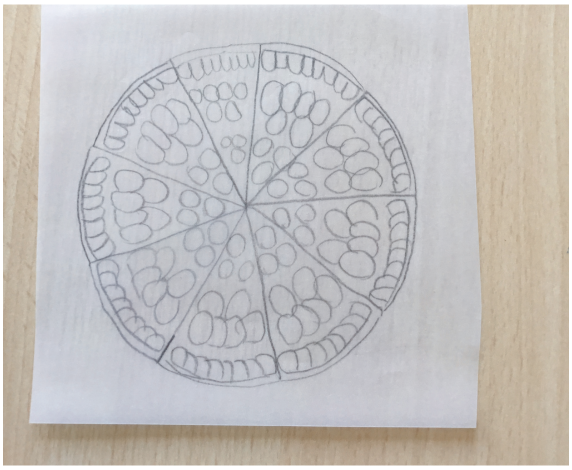
- Un groupe a évalué « à l'œil » 8 parts (stratégie 5), mais quand je lui ai demandé de vérifier sa réponse, il s'est alors impliqué dans une reproduction des parts pour obtenir la tarte entière et s'est rendu compte de son erreur.

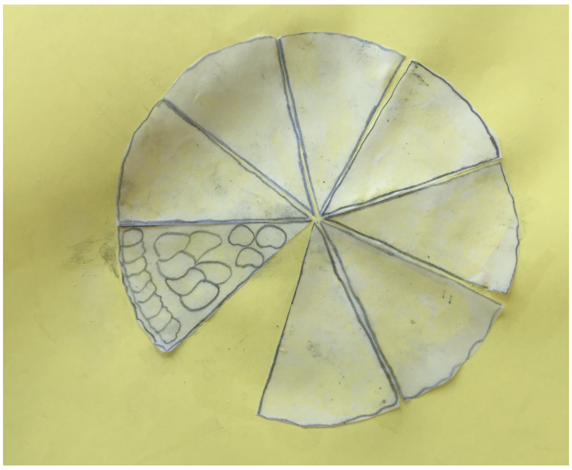
- Stratégie 3 avec report de l'arc :



- La plupart des groupes ont utilisé la stratégie 1, avec dessin ou non des fruits.







Mais ils se sont rendu compte qu'avec la précision de leurs découpages et collages, la dernière part était souvent trop petite.

Pourtant aucun élève n'a eu l'idée de mesurer l'angle au sommet de la part de tarte (stratégie 4) ; la notion abstraite d'angle (une grandeur) n'était pas une connaissance disponible pour eux. Nous l'avons donc travaillée par la suite, ce qui a permis de valider la réponse du problème : 9 parts et 153 fruits.

Ce problème utilisé comme découverte d'une notion était très intéressant car atypique. De premier abord, il avait plutôt l'air d'un problème de proportionnalité, et il s'est révélé être un très bon support pour introduire la nécessité de comparer des angles, de trouver des relations entre eux.

Autre exemple : recherche dans la banque sans idée préalable du problème

Je souhaite travailler sur la visualisation dans l'espace. Je cherche dans la banque de problèmes en utilisant le critère « familles », je choisis « 3D/VS/-changer de point de vue », et parmi les problèmes proposés, en fonction de la catégorie et du résumé des situations, je choisis « *Lettres sur le cube, ral.18.II.16* ».

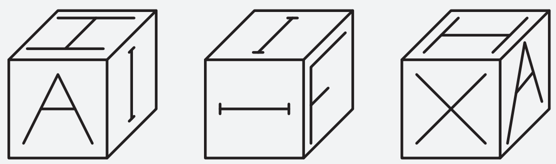
16. LETTRES SUR LE CUBE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Roberto a construit un cube.

Il a écrit une lettre sur chaque face.

Il a ensuite photographié son cube dans plusieurs positions.

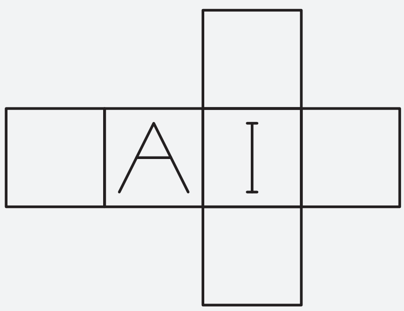
Voici trois de ces photos :



Carlo trouve que le cube de son ami Roberto est très intéressant et décide de construire, pour lui-même, un cube parfaitement identique.

Il a préparé un patron de son cube, avec les six faces qu'il va plier et coller avec du papier adhésif transparent.

Il a déjà dessiné le A et un I sur deux des faces.



Dessinez les lettres des quatre autres faces du cube de Carlo pour qu'elles se retrouvent dans les mêmes positions que sur le cube de Roberto. Y a-t-il plusieurs possibilités de placer les lettres sur ces quatre faces ? Si oui, faites un dessin pour chaque possibilité.

La lecture des résultats et des procédures, obstacles et erreurs relevés m'apprend que ce problème est plutôt bien réussi, que la difficulté se trouve dans le placement des lettres F et I et dans la recherche de plusieurs solutions.

Mais surtout, l'exploitation didactique me donne des pistes pour aider les élèves qui auront des difficultés :

- construire un développement du cube, y noter les lettres et vérifier ;
- décrire oralement le mouvement qui permet de passer du cube dans sa première position (image de gauche) à sa troisième position (image de droite) et noter les positions de la lettre H dans ce mouvement ;
- confronter les observations des différents élèves pour déterminer celles qui sont les plus efficaces dans la procédure d'identification des faces.

Ce problème existe également avec des figures géométriques à la place des lettres pour les catégories 3, 4 et 5 (c'est-à-dire CE2, CM1 et CM2) : « *Le cube décoré, ral.3.F.04* ». Je peux donc anticiper les difficultés qui pourraient apparaître pendant la séance, proposer à certains groupes, peut-être, le problème des catégories inférieures, apporter des cubes, du papier pour qu'ils puissent découper et construire.

Conclusion

Les problèmes du RMT et leurs fiches d'exploitation que l'on trouve dans la banque de problèmes sont donc une source très riche pour les enseignants, dès le cycle 3. Proposer de résoudre en classe un problème en ayant au préalable des éléments sur les obstacles que les élèves peuvent rencontrer et des pistes pour les aider est rassurant et permet de gagner beaucoup de temps. Alors n'hésitez pas à vous lancer ! Vous constaterez que vos élèves y prendront vite goût et qu'ils seront très inventifs dans leurs stratégies.

Références

[1] ARMT. *Site de l'association ARMT*. 2019.

[2] ARMT. *Banque de problèmes de l'ARMT*. 2019.

[3] Catherine Houdement. « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école ». In : *Grand* ℕ nº 100 (mai 2017). , pp. 59-78.

[4] J. Julo. *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, 1995.

[5] J. Julo. « Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? » In : *Actes du XXVII^e colloque inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*. Grenoble : Université Joseph Fourier, 2001.

[6] Francine Athias et al. « Comprendre un énoncé, expliquer à l'écrit une procédure, expliciter oralement une procédure ». In : *La Gazette de Transalpie* nº 8 (octobre 2018). , pp. 162-170.

[7] B. Anselmo et M. Henry. « Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants ». In : *La Gazette de Transalpie* nº 5 (janvier 2017). , pp. 39-52.

[8] Graziella Telatin. « Utilisation en classe des problèmes du RMT ». In : *La Gazette de Transalpie* nº 3 (octobre 2013). , pp. 131-138.

Christine Le Moal est professeure de mathématiques au collège Voltaire à Besançon et coresponsable du groupe « Rallye Mathématique Transalpin » de l'IREM de Besançon.

christine.le-moal@ac-besancon.fr

G T C

Géraldine Comptier, Vincent Eparvier et Félicia Védrine, enseignent en cycle 3 à l'école Michel Servet (Lyon 1er) et ont testé avec leurs classes le Rallye Mathématique Transalpin. Ils sont convaincus de ses apports en ce qui concerne la résolution de problèmes.

Témoignage

Pourquoi le RMT

Les classes de cycle 3 de l'école Michel Servet participent pour la troisième année au Rallye Mathématique Transalpin. Celui-ci s'inscrit pleinement dans la volonté de pratiquer la résolution de problèmes dans une autre dynamique, en faisant varier les types de problèmes, les supports, les protocoles proposés.

L'équipe enseignante trouve un réel intérêt à l'utilisation de la typologie de Vergnaud pour la résolution de problèmes, la mise en place régulière de résolutions de petits défis et une formule interclasses avec notamment des classes de Sixième des deux collèges de secteur. Les élèves sont donc déjà confrontés à des situations de recherche, que ce soit en individuel ou en petits groupes.

Le RMT apporte d'autres choses

Avant tout de par le protocole : la classe, dans un temps déterminé, ne doit rendre qu'une seule résolution explicite de chacun des sept problèmes proposés ; cela engendre une collaboration beaucoup plus large que la simple mise en œuvre par petits groupes. L'effacement de l'enseignant est aussi un élément primordial dans la prise en main des élèves. Ils s'accaparent le rallye, l'enseignant n'étant plus un vecteur entre eux et le savoir. Livrés à eux-mêmes si l'on peut dire, ils deviennent les « sachants et sachantes », capables de réussir par eux-mêmes. De plus, le principe par lequel des dizaines de classes participent en même temps au rallye ajoute à la stimulation des élèves qui veulent faire au mieux.

Ce que l'on remarque dans la classe

Au départ, la crainte de voir des élèves s'auto-exclure ou se reposer sur le groupe a toujours été démentie. Chacun prend sa part, parfois en individuel, plus souvent en groupe. Durant les cinquante minutes que dure le rallye, cependant, l'implication évolue.

Après une phase qui ressemble à de l'excitation devant la découverte des problèmes, chacun se pose et cherche, après avoir repéré le ou les problèmes qui lui semble le plus motivant, parce que plus visuel, plus court, avec plus de nombres, mettant en œuvre des notions géométriques ou autre. La variété de niveaux et de types de problèmes permet aux élèves qui sont moins à l'aise de s'impliquer.

Rapidement les élèves s'associent en petits groupes de recherche. Seuls des experts partent en solitaire. En effet, les problèmes étant suffisamment complexes, le cheminement n'a rien d'une évidence de prime abord.

Une fois les premiers résultats affichés, se mettent en place deux stratégies parallèles. Se répartir les problèmes restants pour arriver au bout des résolutions, ce qui se fait facilement, et vérifier ce qui a été fait, ce qui est moins évident.

Au fil du temps qui passe, les élèves changent de problèmes, réussissent, abandonnent, se retrouvent bloqués, comparent leurs résultats. Et, généralement, passée une demi-heure, un petit groupe baisse les bras, ayant donné l'énergie qu'il leur semble nécessaire. Ils laissent aux (estimés) plus experts la mission de terminer pour eux.

Remarques après plusieurs participations

Les problèmes proposés sont toujours renouvelés et tout à fait adaptés aux élèves. Au fil des années, le protocole est assimilé. Aussi, la collaboration en groupe-classe semble plus évidente. La notion de problème complexe est à présent familière des élèves, et on n'entend plus guère le traditionnel « Faut faire quel calcul ? ». Tous les élèves se sentent investis et capables. Ils en oublient le côté « mathématique » pour une mission de recherche ludique. Tous les élèves sont inclus et trouvent une place dans le processus collectif. Les résultats ne sont pas réclamés ou attendus particulièrement. La participation prime. Les élèves sont tout de même curieux de connaître leur positionnement par rapport aux autres, comme dans toute compétition qui donne lieu à un classement.

Le RMT est donc une expérience positive et constructive pour nos élèves que nous sommes prêts à renouveler.

geraldine.comptier@ac-lyon.fr

Agir avec L'APMEP !

En adhérant
ou
en parrainant
un stagiaire

APMEP