

Le bulletin de l'APMEP - N° 541

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2021

**Maths et citoyenneté (1)**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



***Au fil des maths***, c'est aussi une revue numérique augmentée :  
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

À ce numéro est jointe la plaquette  
*Visages 2021-2022 de l'APMEP.*

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directeur de publication** : Sébastien PLANCHENAU.

**Responsable coordinateur de l'équipe** : Lise MALRIEU.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

**Illustrateurs** : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

**Équipe T<sub>E</sub>Xnique** : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2021. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à : frederic.deligt2@gmail.com  
ou par courrier à :  
Frédéric de Ligt  
3 rue de la Pierrière  
17270 MONTGUYON  
Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.*

**Frédéric de Ligt**

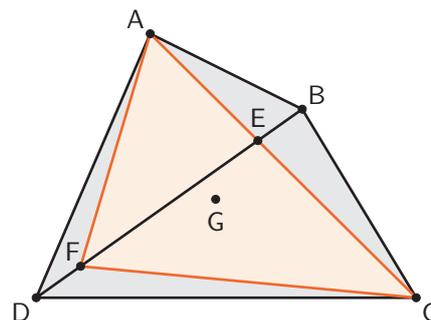
## 541-1 Une construction pratique du centre de gravité d'un quadrilatère plein

Savez-vous qu'il est possible de construire le centre de gravité d'un quadrilatère plein convexe à l'aide d'un seul triangle au lieu des quatre habituellement utilisés ?

Soit ABCD un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en E.

Si  $DE \geq EB$ , on place F sur le segment [DE] de telle sorte que  $DF = BE$ .

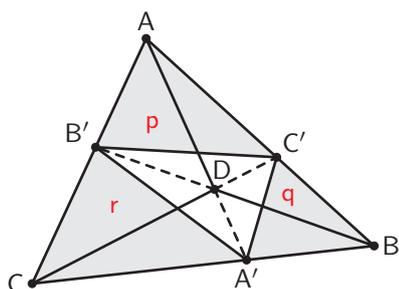
Démontrer que le centre de gravité du triangle ACF coïncide avec celui du quadrilatère plein ABCD.



## 541-2 D'après August Ferdinand Möbius (J.P. Friedelmeyer - Osenbach)

Soit ABC un triangle quelconque et D un point en son intérieur, délimitant trois triangles :  $DBC = a$  ;  $DAC = b$  ;  $DAB = c$ . DBC, DAC et DAB désignent à la fois les triangles et leur aire, celles-ci pouvant également être abrégées par les minuscules  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Soit  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les intersections des droites (AD), (BD), (CD) avec les côtés [BC], [AC], [AB] respectivement.



1. Exprimer les aires des triangles  $C'B'A$ ,  $A'C'B$  et  $B'A'C$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

On désigne par  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ces aires :  $C'B'A = p$  ;  $A'C'B = q$  ;  $B'A'C = r$  et par  $x$  l'aire du triangle  $A'B'C'$ .

Connaissant  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , on veut exprimer  $x$  en fonction des seules aires  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .

2. Démontrer que l'aire  $x$  est racine de l'équation du troisième degré  $x^3 + (p + q + r)x^2 - 4pqr = 0$ .
3. Démontrer que cette équation admet trois racines réelles, dont une seule est positive.



### 541-3 Factorielles et carrés (Vincent Thill - Migennes)

Résoudre dans les entiers naturels  $a^2 - b^4 = \frac{p!}{q!}$  avec  $p > q + 1$ .

### 541-4 Une curiosité algébrique (Jacques Chayé - Poitiers)

À quelle condition la somme de trois réels et du produit de leurs inverses est-elle égale à la somme de leur produit et de la somme de leurs inverses ?

### À propos des problèmes parus précédemment

Daniel Perrin a fait parvenir un article très fouillé de douze pages autour du problème 537-2 et Gérard Anselme propose sa solution au problème 538-4. Ces documents sont consultables sur notre site.

#### 539-1 Une table de bureau originale

De nombreuses réponses à ce problème de géométrie élémentaire et une grande variété de solutions. Quatre méthodes ont été utilisées pour évaluer l'aire de cette table. Tout d'abord par recombinaison de la figure en un grand triangle équilatéral, avec deux découpages différents trouvés par Jacques Vieulet (Ibos), Bernard Lefrançois (Lyon), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Fabrice Laurent (Lunéville), Jean-Paul Thabaret (Thonon-Les-bains), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach), Alain Bougeard (Les Lilas) et Jean-Paul Guichard (La Rochelle). Ensuite par partage en trois ou quatre triangles par Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), Maurice Bauval (Versailles) et Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives). Ludovic Jany (Bolquère), Michel Sarrouy et Pierre-Alain Sallard (Paris) inscrivent la figure ou sa moitié dans une figure plus grande et d'aire facilement calculable puis obtiennent le résultat par une soustraction d'aires. Enfin la dernière méthode, due à Jean-Paul Mercier (Nouaillé) et qui a ma préférence, part de l'observation que six de ces tables convenablement disposées forment un hexagone de côté 120 cm avec un hexagone vide au centre de côté 60 cm. La table a donc une aire valant celle de trois triangles équilatéraux de côté 60 cm. Ce problème a donné l'idée à Michel Sarrouy d'un prolongement qui sera proposé dans une prochaine rubrique.

#### 539-2 Une variante de l'équation de Markov

Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), Gérard Anselme (Valleiry), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Jean Moussa et Daniel Perrin (université Paris-Saclay) ont tous montré l'existence de trois applications involutives qui transforment tout triplet solution en un autre triplet solution. En partant de la solution évidente (1, 1, 1) on peut ainsi construire un arbre infini de solutions en appliquant les trois transformations. Pierre Renfer va plus loin et démontre par récurrence que cet arbre contient toutes les solutions non nulles de l'équation. Quant à Daniel Perrin et aux co-auteurs Patrick David et Julien Sautier, ils nous gratifient de deux belles études qui résolvent complètement la question mais qui abordent aussi diverses propriétés des triplets solutions et qui se terminent en s'intéressant à une généralisation de cette équation.



### 539-3 Rester toujours positif

Ludovic Jany (Bolquère), Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), Maurice Bauval (Versailles) et Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) ont tous montré qu'une suite géométrique dont la raison est la racine réelle positive du polynôme du troisième degré associé à la suite récurrente, est solution du problème posé. Plus délicate était l'étude de l'unicité de cette suite. Seuls messieurs Jany et Renfer l'ont abordée et résolue chacun à leur façon.

### 539-4 Un duo de coniques

Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) et Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) proposent une résolution analytique avec des calculs dans le repère donné. Jacques Vieulet (Obos) et Maurice Bauval (Versailles) procèdent de même pour les deux premières questions mais utilisent la notion de polaires pour la dernière question. Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) et Daniel Perrin (université Paris-Saclay) font remarquer que les deux premières questions peuvent se traiter sans calcul en invoquant en premier lieu le grand théorème de Poncelet et en second lieu le théorème de Frégier. Pour la troisième question Daniel Perrin utilise des polaires alors que Bernard Coutu applique une conséquence du théorème de Pascal. L'étude de douze pages de Daniel Perrin balaie largement différents aspects de la question et se termine par une généralisation du problème proposé.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse :  (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

© APMEP Septembre 2021

# Sommaire du n° 541

## Maths et citoyenneté (1)

<b>Éditorial</b>	<b>1</b>	<b>Ouvertures</b>	<b>54</b>
<b>Opinions</b>	<b>3</b>	<b>La quadrature du cercle et le disque de Poincaré</b> — Pierre Osadtchy	<b>54</b>
✦ Géométrie, rigueur et démonstration — Daniel Lehmann	3	<b>Petite enquête sur l'égalité (II) — François Boucher</b>	<b>56</b>
Renvoyez l'ascenseur ! — Agnès Veyron	7	<b>Sur la récurrence et la dichotomie au lycée</b> — Jean-Paul Roy	<b>63</b>
<b>Avec les élèves</b>	<b>10</b>	<b>D'une observation de Fermat à un moment de calcul</b> — Jean Aymès	<b>69</b>
✦ L'École d'Athènes s'invite au collège — Henrique Vilas Boas	10	<b>Récréations</b>	<b>79</b>
<i>HowMany</i> , le calcul mental par l'image — Alexandre Desmarest	16	<b>Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt</b>	<b>79</b>
À propos de mots... — Véronique Cerclé & Sonia Calvel-Grazi	23	<b>Le jeu du calisson — Olivier Longuet</b>	<b>82</b>
Séance de modélisation en mathématiques en lycée professionnel — Jean-Jacques Kratz	27	<b>Au fil du temps</b>	<b>87</b>
Les symétries dans l'art africain — Marie-France Guissard & Laure Mourlon Beernaert	34	<b>Homo academicus dans son labyrinthe — Frédéric André</b>	<b>87</b>
✦ Argumenter et débattre — Habib Ben Aïcha	45	<b>Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau</b>	<b>90</b>
MathALEA, un générateur d'exercices à données aléatoires — Rémi Angot	50	<b>Matériaux pour une documentation</b>	<b>92</b>



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr