

Le bulletin de l'APMEP - N° 541

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2021

Maths et citoyenneté (1)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2021-2022 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2021. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Le jeu du calisson (ou de l'entrepôt)

Les amateurs de Q*bert , et les autres aussi d'ailleurs, trouveront leur bonheur avec ce jeu d'Olivier Longuet dans lequel il s'agit d'empiler des cubes ou de ranger des calissons ! Amusez-vous bien.

Olivier Longuet



Un calisson est un losange composé de deux triangles équilatéraux isométriques collés par un côté¹. Il en faut trois pour paver l'hexagone de même longueur de côté.

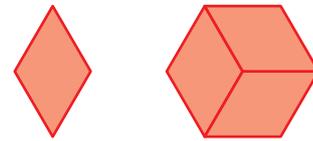


Figure 1. Pavage d'un hexagone régulier par trois calissons.

Pour ce pavage, on remarque plusieurs choses : chaque calisson est positionné dans une direction différente, on a l'impression de voir un cube dans l'espace et suivant la position d'où on le regarde, on peut voir un cube plein ou un cube creux.

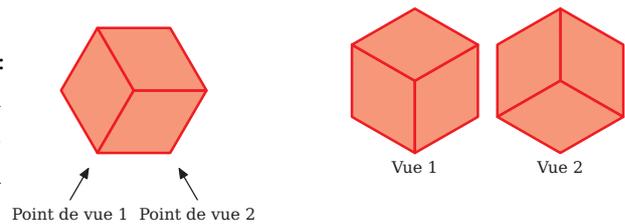
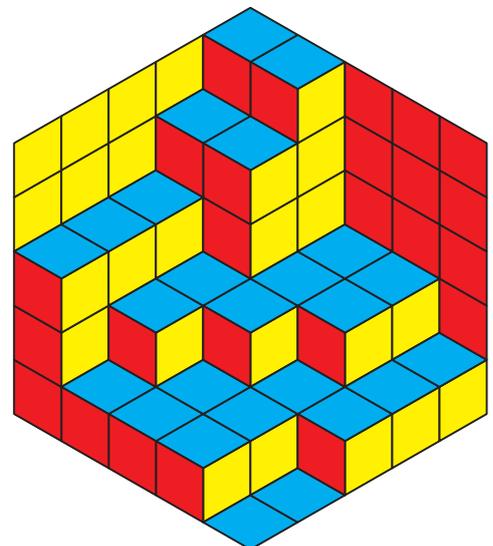


Figure 2. Vision en relief.

Théorème du calisson

Les pavages d'un hexagone régulier de côté n avec des calissons de côté 1 comportent n^2 calissons dans chaque orientation.

Il y a une preuve sans mots frappante de ce théorème. Il faut imaginer qu'on voit un cube vide de côté n en perspective et qu'on le remplit de caisses cubiques de côté 1. Colorions chacune des faces et des murs dans une couleur correspondant à son orientation. Imaginons maintenant qu'on regarde ce cube de haut. Une face carrée apparaît tout en bleu. Si on regarde le cube de la gauche, on voit uniquement les faces rouges qui pavent un carré, de même pour les faces jaunes si on regarde ce cube à partir de la droite.

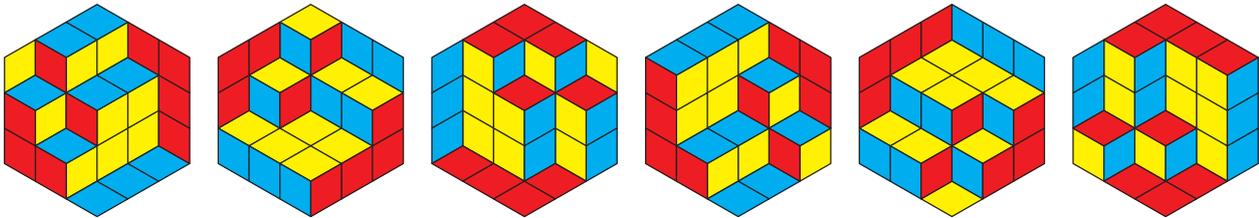


1. C'est aussi une délicieuse confiserie, spécialité d'Aix en Provence, à base de pâte d'amande et à la forme un peu plus arrondie.



À partir du moment où j'ai vu cette preuve, je ne peux voir la figure qu'en trois dimensions.

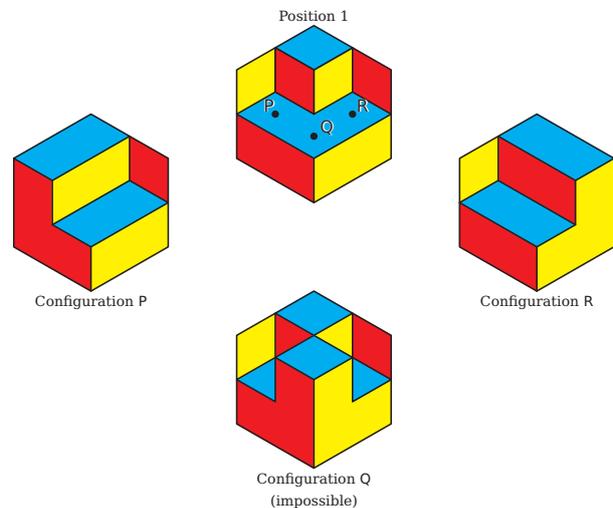
Un dernier petit résultat concernant cette illusion d'entrepôt de cubes. Comptez le nombre de cubes figurés dans ces six dessins (on s'imaginera regarder l'entrepôt d'en haut).



13 ou 14? Avez-vous remarqué qu'il s'agissait de la même figure, qu'on a tournée six fois de 60°? Regardez bien, quitte à tourner la page ou la tête. Le nombre de cubes visibles sur la figure dépend de la position dans laquelle on la regarde. On obtient deux résultats dont la somme fait ici 27, le nombre de cubes qu'il aurait fallu pour remplir l'entrepôt.

Cette idée d'entrepôt cubique rempli de caisses cubiques posées les unes contre les autres m'a inspiré un jeu de grille individuel du type du sudoku. Pour le nom du jeu, j'hésite entre calisson ou entrepôt. Imaginons un entrepôt vide qu'on remplit au fur et à mesure en commençant par le coin figuré au centre du cube. On peut poser un cube face contre face, gauche, droite ou haut, de sorte qu'on peut cacher une face complète mais jamais une demi-face. Toutes les faces visibles des caisses sont entièrement visibles.

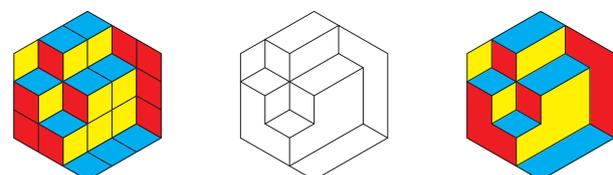
Par exemple, dans la figure ci-contre, à partir de la position de l'entrepôt à 5 cubes, si on voulait ajouter un cube, il y aurait *a priori* trois positions possibles : P, Q et R. Or la position Q est impossible car le cube cacherait des moitiés de faces.



Principe du jeu

À partir d'une grille donnant quelques arêtes principales, il faut reconstituer le rangement complet de l'entrepôt. Les arêtes secondaires, communes à deux cubes contigus, n'ont pas besoin d'être représentées sur la grille².

Dans les deux derniers dessins, seules les arêtes principales sont dessinées et pas les arêtes secondaires.



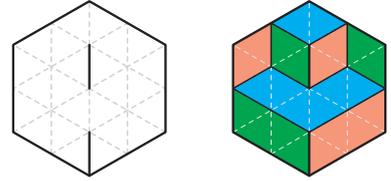
2. Les solutions sont accessibles sur le site d'Au fil des maths



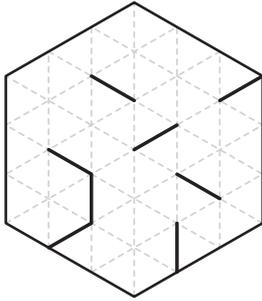


Pour chaque grille, quelques arêtes principales sont dessinées. Complétez le dessin. Vous pouvez ensuite le colorier à votre goût pour accentuer l'effet 3D. Il y a une unique solution pour chaque grille³.

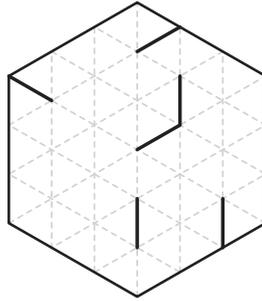
Exemple



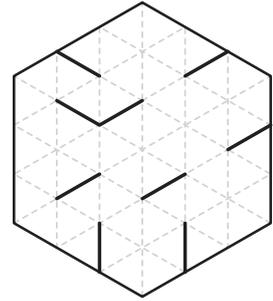
Grilles 3 x 3 x 3



Grille 1.

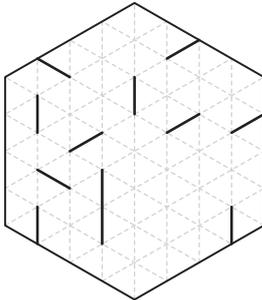


Grille 2.

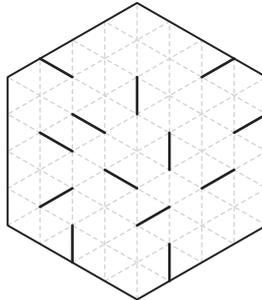


Grille 3.

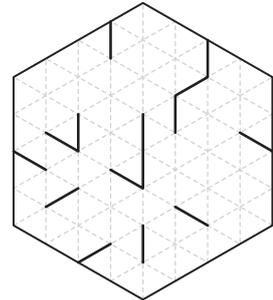
Grilles 4 x 4 x 4



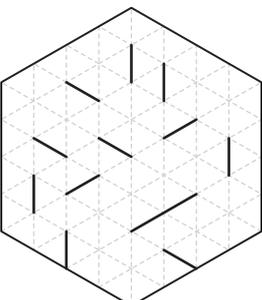
Grille 4.



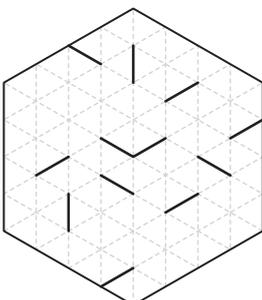
Grille 5.



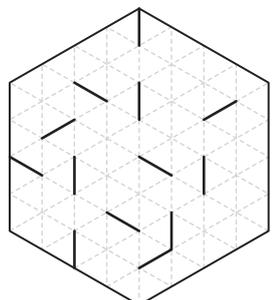
Grille 6.



Grille 7.



Grille 8.



Grille 9.

3. Les solutions sont accessibles sur le site d'[Au fil des maths](#)



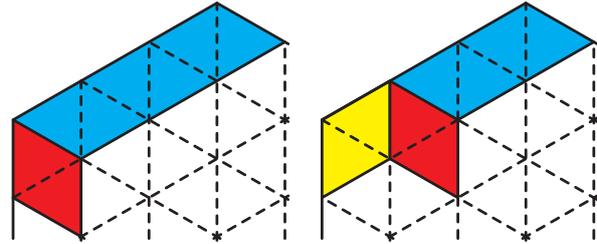
Quelques astuces pour remplir la grille

Il y a au moins deux manières d'aborder le problème : en considérant uniquement les arêtes et en ne coloriant qu'à la fin, ou en considérant les faces des cubes, en les coloriant au fur et à mesure. Voici quelques conseils qui vous permettront de compléter les grilles.

1. Règle du bord.

Sur une rangée d'un bord, il y a deux possibilités : soit le calisson ne change pas de direction long de l'arête (dans le cas 1), soit il change de direction une seule fois (dans le cas 2).

Ainsi, si un segment part d'un bord, alors c'est à cet endroit que le calisson change de direction, et on peut remplir toute la rangée sur le bord.



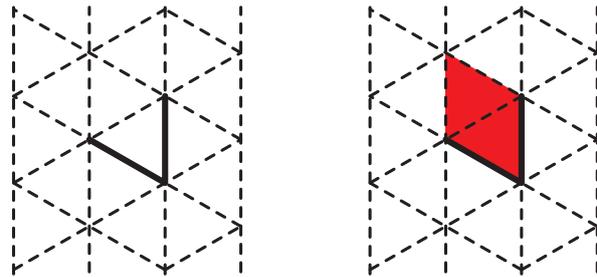
Cas 1.

Cas 2.

Les endroits les plus faciles pour commencer à compléter la grille sont souvent les bords.

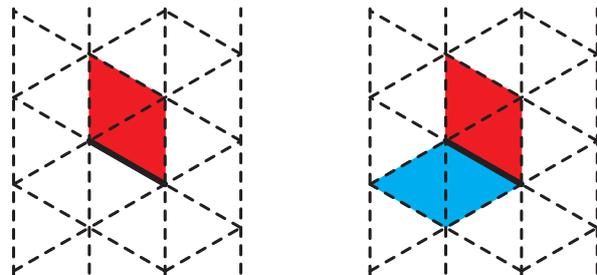
2. Règle du coin aigu.

Si on a dessiné un coin aigu, on peut en déduire la position d'une face.



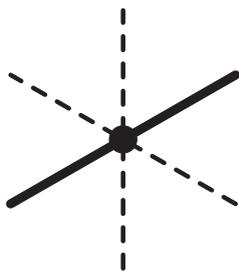
3. Règle du pli.

Si une face est dessinée et si une arête borde cette face, alors on peut en déduire l'orientation de la face de l'autre côté de l'arête : il y a un changement d'orientation et il n'y a qu'une position de face possible.

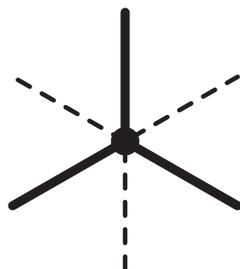


4. Règle du sommet.

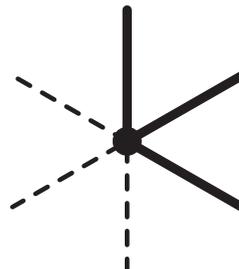
Si un point (hors bord) situé à une intersection du treillis est au bout d'une arête principale, alors il est relié à au moins une autre arête principale : le nombre d'arêtes principales reliées à une intersection du treillis est 0, 2, 3 ou 6.



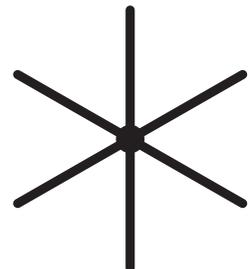
Le sommet joint deux arêtes principales dans un alignement.



Le sommet joint trois arêtes principales.



Le sommet joint trois arêtes principales.



Le sommet joint les six arêtes principales.



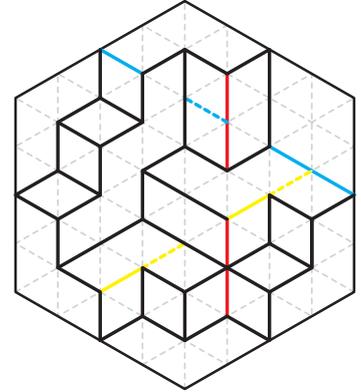


Le jeu du calisson

5. Règle des arêtes sur une ligne.

Dans une grille, sur chaque ligne du treillis (ligne en pointillés dont les extrémités sont les côtés de l'hexagone), il y a exactement n arêtes (principales ou secondaires) de longueur 1 qui suivent cette ligne.

Ainsi, sur la grille $4 \times 4 \times 4$ ci-contre, vous pouvez voir une ligne du treillis avec quatre arêtes principales en rouge (ou trois arêtes principales et une arête secondaire suivant la vision adoptée), une ligne du treillis avec trois arêtes principales et une arête secondaire en bleu et une ligne du treillis avec deux arêtes principales et deux arêtes secondaires en jaune.



Olivier Longuet enseigne les mathématiques au lycée Alain Chartier de Bayeux. Il est membre de l'équipe de rédaction d'*Au fil des maths* et notamment l'auteur de certaines des illustrations.

N'hésitez pas à parcourir son blog .

ollonguet@wanadoo.fr

© APMEP Septembre 2021

Sommaire du n° 541

Maths et citoyenneté (1)

Éditorial	1	Ouvertures	54
Opinions	3	La quadrature du cercle et le disque de Poincaré — Pierre Osadtchy	54
✦ Géométrie, rigueur et démonstration — Daniel Lehmann	3	Petite enquête sur l'égalité (II) — François Boucher	56
Renvoyez l'ascenseur ! — Agnès Veyron	7	Sur la récurrence et la dichotomie au lycée — Jean-Paul Roy	63
Avec les élèves	10	D'une observation de Fermat à un moment de calcul — Jean Aymès	69
✦ L'École d'Athènes s'invite au collège — Henrique Vilas Boas	10	Récréations	79
HowMany, le calcul mental par l'image — Alexandre Desmarest	16	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	79
À propos de mots... — Véronique Cerclé & Sonia Calvel-Grazi	23	Le jeu du calisson — Olivier Longuet	82
Séance de modélisation en mathématiques en lycée professionnel — Jean-Jacques Kratz	27	Au fil du temps	87
Les symétries dans l'art africain — Marie-France Guissard & Laure Mourlon Beernaert	34	Homo academicus dans son labyrinthe — Frédéric André	87
✦ Argumenter et débattre — Habib Ben Aïcha	45	Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	90
MathALEA, un générateur d'exercices à données aléatoires — Rémi Angot	50	Matériaux pour une documentation	92



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr