

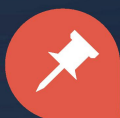
Le bulletin de l'APMEP - N° 541

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2021

Maths et citoyenneté (1)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2021-2022 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2021. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Cf. article suivant.



La quadrature du cercle et le disque de Poincaré

Cet article constitue une sorte de mise en bouche, une introduction à un article de la revue numérique qui nous parle de géométrie hyperbolique et de quadrature du cercle... Une petite douceur pour les amateurs de géométrie !

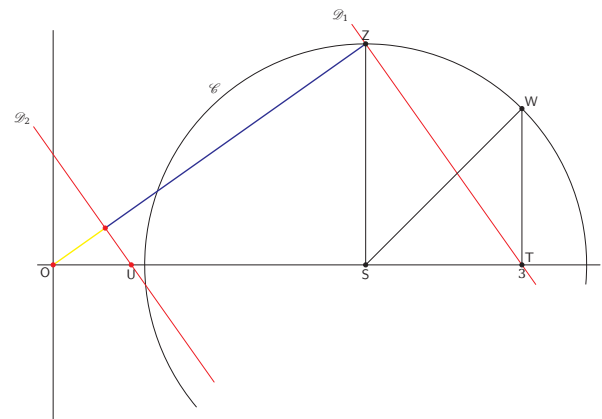
Pierre Osadchy

De quoi s'agit-il ?

Opérer la quadrature d'un cercle consiste à construire à la règle et au compas un carré ayant exactement la même aire que celui-ci. On peut ramener ce problème au cas particulier où le rayon du cercle est 1, alors son aire est π , et le côté du carré $\sqrt{\pi}$.

En apparence, il s'agit d'un problème purement géométrique, mais en réalité, il fait appel à la notion de *nombre constructible*. Un nombre x est dit constructible si, en utilisant seulement une règle et un compas, il est possible de placer sur une droite donnée munie d'une origine notée O et d'une unité (par exemple le centimètre) un point M tel que la mesure algébrique de OM soit égale à x unités. De façon pratique, la construction met en œuvre les techniques classiques de construction (médiatrices, bissectrices etc.), les théorèmes de Thalès et de Pythagore, ainsi que les propriétés des hauteurs d'un triangle rectangle, bien commodes pour obtenir les racines carrées.

Voici, par exemple et pour ne pas rester trop abstrait, la construction (en jaune) d'un segment de longueur $\rho = \frac{\sqrt{6}}{6}$.



Construction de $\frac{\sqrt{6}}{6}$ à la règle et au compas.

Nous avons $ST = WT = 1$ donc $SW = \sqrt{2}$ (Pythagore) puis, toujours avec Pythagore et en traçant le cercle $\mathcal{C}$ de centre S et de rayon SW , $OZ = \sqrt{6}$, enfin à l'aide du théorème de Thalès, on partage $[OT]$ puis $[OZ]$ en 6.

On démontre que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres constructibles est un sous-corps de l'ensemble des nombres réels stable par racine carrée. Le mathématicien Wantzel a prouvé en 1837 que tout élément de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres constructibles est algébrique. On notera néanmoins que, si les nombres constructibles sont algébriques, la réciproque est fautive, il existe des nombres algébriques non constructibles.

Les plus prestigieux des mathématiciens ont buté sur

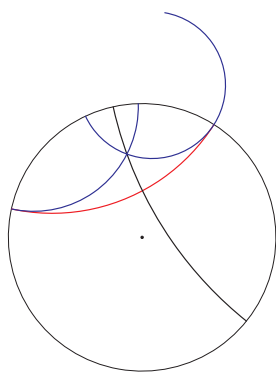


cette question durant vingt-quatre siècles, avant que l'un d'entre eux, un allemand nommé Lindemann, ne prouve en 1882 que cette construction est impossible. À quoi tient sa démonstration ? À ce que le nombre π est transcendant. Comme les nombres transcendants forment avec les nombres algébriques une partition du corps des réels, il en résulte que π n'est pas constructible, et par voie de conséquence, $\sqrt{\pi}$ non plus. **La quadrature du cercle passe à la postérité sous la forme d'une expression populaire qui signifie « s'attaquer à un problème qui n'a pas de solution ».**

Cependant, au XIX^e siècle, les travaux de trois mathématiciens, Lobatchevski, Bolyai et Gauss, introduisent de nouvelles géométries à partir des quatre premiers axiomes d'Euclide et de la négation du cinquième, celui des parallèles. L'une d'entre elle constitue la géométrie hyperbolique. Dans celle-ci, par un point donné passent deux parallèles à une droite donnée. Et Bolyai « remarque », à la fin d'un de ses travaux que, dans le cadre de la géométrie hyperbolique, la quadrature de certains cercles est possible.

Le disque de Poincaré

Le disque de Poincaré est un modèle de la géométrie hyperbolique plane. Il s'agit d'un disque de rayon 1, représentant tout ce plan.

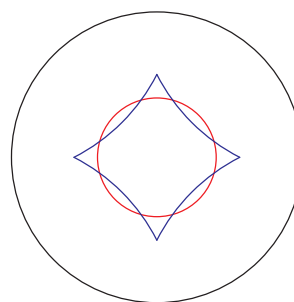


En bleu, deux droites parallèles à la droite dessinée en rouge, en noir une perpendiculaire. Le lecteur remarquera que la perpendiculaire à la droite rouge ne l'est pas à ses parallèles !

Les droites hyperboliques sont, soit des arcs de cercles contenus dans le disque et orthogonaux à son bord, soit des diamètres. Leurs extrémités, situées sur le bord, en sont les « points à l'infini ».

Les cercles hyperboliques ont la forme de cercles euclidiens (ce n'est pas le cas dans tous les modèles), avec un centre décalé vers le bord. On y définit le carré hyperbolique : il a bien quatre côtés égaux, des diagonales perpendiculaires, quatre angles égaux mais de mesure strictement inférieure à un droit. Les résultats de géométrie euclidienne qui sont indépendants de l'axiome des parallèles restent vrais, par exemple les cas d'égalité des triangles. En revanche, ceux qui lui sont liés ne « fonctionnent pas », en particulier les théorèmes de Thalès et de Pythagore. L'un des intérêts du disque de Poincaré est de rendre tangibles beaucoup de résultats de la surprenante géométrie hyperbolique, et donc de se prêter à une démarche pédagogique. Une fois le « cadre » du disque de Poincaré posé, les calculs nécessaires à la quadrature de cercles hyperboliques font simplement appel à la trigonométrie circulaire et hyperbolique.

Dans ce cadre, c'est l'objet de l'article que je propose sur la revue numérique [►](#). Une preuve du résultat signalé par Bolyai devient relativement accessible.



En rouge, un cercle hyperbolique constructible d'aire $\frac{4\pi}{5}$; en bleu, le carré hyperbolique constructible de même aire.

Pierre Osadtchy a enseigné les mathématiques au collège, au lycée et au sein du département génie électrique et informatique industrielle de l'IUT de Nantes. Il s'est intéressé au disque de Poincaré à titre personnel.

osad_maths@yahoo.com

© APMEP Septembre 2021

Sommaire du n° 541



Maths et citoyenneté (1)

Éditorial

Opinions

★ Géométrie, rigueur et démonstration — Daniel Lehmann

Renvoyez l'ascenseur ! — Agnès Veyron

Avec les élèves

★ L'École d'Athènes s'invite au collège — Henrique Vilas Boas

HowMany, le calcul mental par l'image — Alexandre Desmarest

À propos de mots... — Véronique Cerclé & Sonia Calvel-Grazi

Séance de modélisation en mathématiques en lycée professionnel — Jean-Jacques Kratz

Les symétries dans l'art africain — Marie-France Guissard & Laure Mourlon Beernaert

★ Argumenter et débattre — Habib Ben Aïcha

MathALEA, un générateur d'exercices à données aléatoires — Rémi Angot

1 Ouvertures

3 La quadrature du cercle et le disque de Poincaré — Pierre Osadtchay 54

3 Petite enquête sur l'égalité (II) — François Boucher 56

7 Sur la récurrence et la dichotomie au lycée — Jean-Paul Roy 63

D'une observation de Fermat à un moment de calcul — Jean Aymès 69

Récréations

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 79

Le jeu du calisson — Olivier Longuet 82

Au fil du temps

Homo academicus dans son labyrinthe — Frédéric André 87

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 90

Matériaux pour une documentation 92



CultureMATH

