

Le bulletin de l'APMEP - N° 541

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2021

**Maths et citoyenneté (1)**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



***Au fil des maths***, c'est aussi une revue numérique augmentée :  
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

À ce numéro est jointe la plaquette  
*Visages 2021-2022 de l'APMEP.*

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directeur de publication** : Sébastien PLANCHENAU.

**Responsable coordinateur de l'équipe** : Lise MALRIEU.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

**Illustrateurs** : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

**Équipe T<sub>E</sub>Xnique** : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2021. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



# Les symétries dans l'art africain

*Aborder la symétrie axiale à partir de peintures murales d'Afrique australe, vous n'y auriez pas pensé ? Et pourtant ! Les auteurs vous proposent ici des pistes riches en apprentissages à explorer avec vos élèves dès le cycle 2 !*

**Marie-France Guissard & Laure Murlon Beernaert**

## Préambule

De toutes les matières qui composent le cours de mathématiques, la géométrie n'est pas celle qui remporte généralement les suffrages. Elle évoque trop souvent, dans l'esprit des élèves et parfois même de leurs professeurs, l'austérité du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive. Pourtant, les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples à toutes les époques un peu partout dans le monde, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie tout en lui rendant son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.

Les rythmes visuels portés par des motifs répétés ou *patterns*, des broderies, des pavements, des éléments architecturaux, ... sont une source inépuisable de situations d'apprentissage qui peuvent être déployées à tout âge. Des activités alliant le côté créatif à l'analyse de figures géométriques développent des compétences multiples, exercent l'intuition et aiguisent le sens de l'observation, tout en procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique.

C'est dans cet esprit que le CREM<sup>1</sup> propose une approche des symétries, destinée aux élèves de l'école élémentaire, à partir de peintures murales d'Afrique australe. Par le biais de réalisations de puzzles, de pliages et découpages, de peintures, les enfants analysent les symétries dans l'art africain et produisent des créations personnelles.

## Les peintures murales d'Afrique australe

En Afrique australe, ce sont principalement les femmes qui ont montré, depuis des siècles, leur potentiel de création et d'imagination dans la peinture, le tissage ou la sculpture. Les symétries sont très présentes dans l'art africain traditionnel. Une dimension à la fois artistique et mathématique caractérise chacune des activités culturelles comme la céramique, la peinture murale, le tissage de nattes, le tressage des cheveux, la décoration de Calebasses, ... La structuration des surfaces au moyen de motifs géométriques qui se répètent ou s'organisent suivant un schéma régulier contribue à l'aspect esthétique de ces véritables œuvres d'art.

1. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique.



Nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux types de peintures murales : les *litema* et les *ikghuptu*.

### Les litema

Les *litema* (singulier : *tema*) sont des décorations murales qui s'inspirent de modèles géométriques traditionnels. On les trouve sur les maisons Sotho. Les Sotho sont l'ensemble des peuples de langue bantoue répartis entre le Lesotho, l'est de l'Afrique du Sud, le sud du Zimbabwe et l'est du Botswana. Le mot *litema* vient du verbe *ho lema*, qui signifie cultiver. Le mot *tema* signifie, lui, un champ ou un terrain labouré. Beaucoup de dessins *litema* rappellent, en effet, les sillons creusés dans la terre au moment des semences.

Les *litema* sont composés par juxtaposition d'un certain nombre de motifs identiques placés dans des orientations variées (figures 1 et 2).

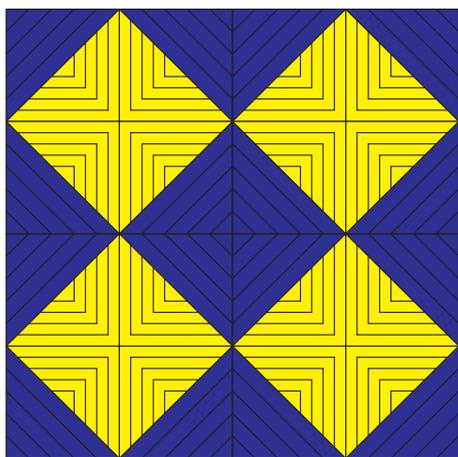


Figure 1.

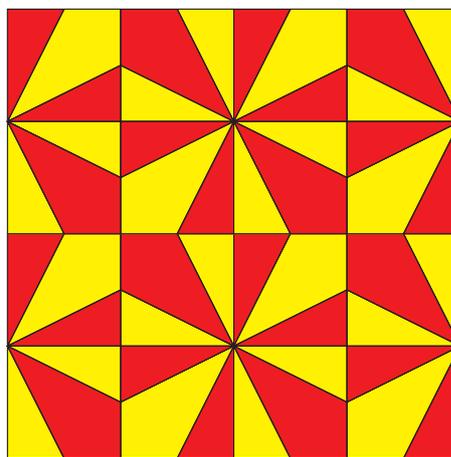


Figure 2.

Ces décorations sont d'abord gravées sur les murs des *rondavels* (habitations traditionnelles souvent circulaires) et sur les façades rectangulaires des huttes. Elles sont ensuite peintes à l'aide de chiffons trempés dans la peinture pour couvrir les larges surfaces, et de brosses pour exécuter les détails de finition.

P. Gerdes [1] cite le photographe Changuion : « L'art féminin des *litema* est saisonnier. Il éclôt, se fane et fleurit à nouveau avec le passage des saisons. C'est un art éphémère. Réalisé sur des murs de boue, il meurt en même temps que la surface temporaire sur laquelle il est fixé. Le soleil le dessèche et le craquelle, la pluie le fait disparaître. »

Les *litema* présentent de nombreuses symétries qui, selon Changuion, tentent de rappeler la structure bilatérale du corps humain. En outre, on y retrouve différentes isométries de figures : la translation, la rotation ou la symétrie axiale.

### Les ikghuptu

Les *ikghuptu* sont des dessins géométriques (figures 3 et 4) réalisés sur les murs intérieurs et extérieurs des fermes familiales Ndebele. Les Ndebele sont les habitants de la province du Transvaal au nord de



Johannesburg en Afrique du Sud. Ce style traditionnel diffère des *litema* Sotho par les caractéristiques des dessins géométriques et par l'ajout de lignes peintes.

En effet, après avoir gravé avec le doigt les dessins géométriques sur les surfaces de boue, les femmes tracent, avec de la chaux blanche, les grandes lignes des motifs de base. En utilisant des peintures composées à partir de produits naturels de la terre, elles peignent ensuite les dessins de manière très colorée.



Figure 3.

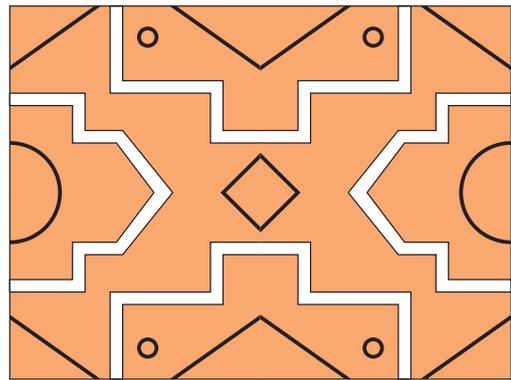


Figure 4.

La décoration d'une maison Ndebele accompagne le passage à l'âge adulte. À cette époque, les jeunes filles sont confinées chez elles où on leur enseigne, parmi d'autres secrets de femme, certaines formes d'art et de géométrie ainsi que les techniques de la décoration murale.

Les *ikghuptu* présentent généralement une ou deux symétries axiales. Dans ce cas, les axes de symétrie sont orthogonaux et engendrent une symétrie centrale (ou rotation de  $180^\circ$ ).

### Les enfants face à la symétrie

#### Puzzle d'un tema

Comment les enfants réagissent-ils face à la symétrie ? Organisent-ils toujours leur production de manière à ce qu'elle soit bien symétrique ? Sachant que les symétries sont fortement présentes dans l'univers quotidien des enfants, il peut être intéressant d'observer des réalisations d'enfants et d'écouter ce qu'ils en disent.

Pour mener à bien l'activité de réalisation d'un *tema*, nous avons créé des pièces de puzzle dont le motif géométrique est inspiré de ceux des *litema* Sotho. Il y en a de deux types, symétriques l'un de l'autre (figure 5).

L'enseignant distribue aux enfants une grille carrée composée de seize carrés de la taille d'une pièce de puzzle, et trente-deux pièces de puzzle, seize de chaque type (matériel téléchargeable ici [▶](#)). La consigne donnée aux enfants est de les assembler de manière à obtenir quelque chose de joli. Le puzzle à réaliser ne doit contenir que seize pièces. Il ne faut donc pas les utiliser toutes. Lorsqu'ils sont contents du résultat, les enfants collent les pièces sur la grille en remplissant toutes les cases.

Au départ, une grande majorité des élèves étalent, sur leur banc, l'ensemble des 32 pièces. Alors que la plupart remarquent que, parmi les pièces données, il y en a de deux types — pour les enfants, l'élément



qui varie d'une pièce à l'autre est la place du demi-disque lorsque la flèche est orientée dans le même sens (figure 6) —, aucun élève ne prend cependant le temps de les classer en deux « paquets » distincts.



Figure 5.



Figure 6.

Les élèves sont attentifs aux éléments prégnants de la pièce de départ, à savoir la flèche et le demi-disque. Les mouvements qu'ils réalisent au cours de la constitution du puzzle sont donc influencés par ces deux éléments qu'ils cherchent à associer de diverses façons pour constituer des dessins qui les satisfassent sur le plan esthétique.

Les élèves procèdent par essais et erreurs : lorsque la pièce ne convient pas, ils essaient avec une autre et ce jusqu'à ce qu'ils atteignent le résultat, la représentation voulue. Lorsque leurs puzzles sont terminés, les enfants les affichent au tableau. L'étape suivante consiste à essayer de comprendre comment il se fait qu'on obtienne une telle variété de résultats, en partant de pièces pourtant identiques. À la demande de l'enseignant, les enfants observent attentivement chaque puzzle, puis regroupent ceux qui se ressemblent.

Il est évident que les critères de ressemblance peuvent être très variés, se rapportant tantôt à ce que le puzzle représente, tantôt à la position des pièces. Néanmoins, grâce à ce classement et aux explications qu'ils en donnent, certains enfants vont pouvoir mettre, spontanément, des mots sur les différents mouvements accomplis avec les pièces pour composer le puzzle.

Voici ci-dessous quelques puzzles réalisés par les enfants. Les deux premiers montrent des réalisations parfaitement symétriques pour l'ensemble du puzzle, avec deux axes de symétrie (figure 7) ou seulement un axe vertical (figure 8), les deux suivants présentent quelques irrégularités (figures 9 et 10).

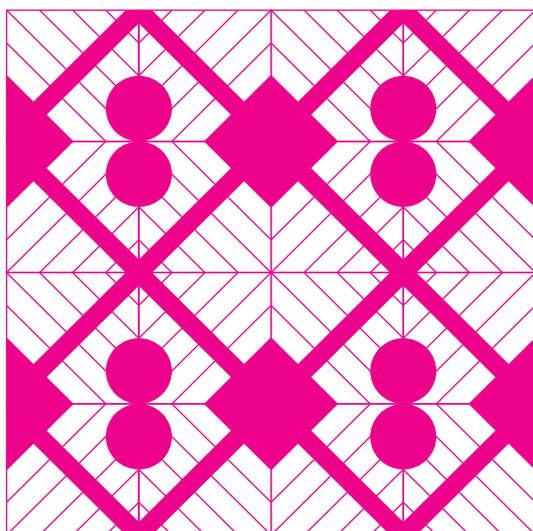


Figure 7.

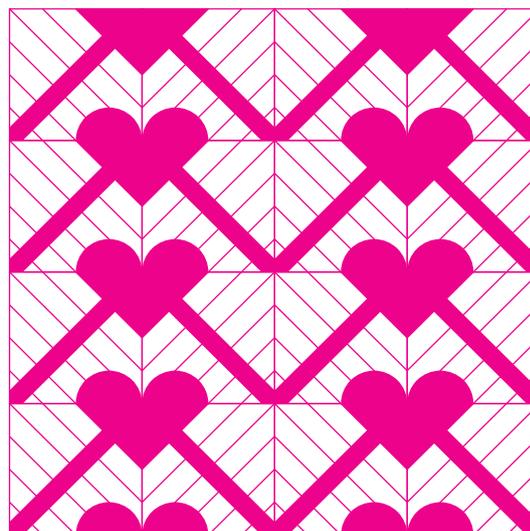


Figure 8.

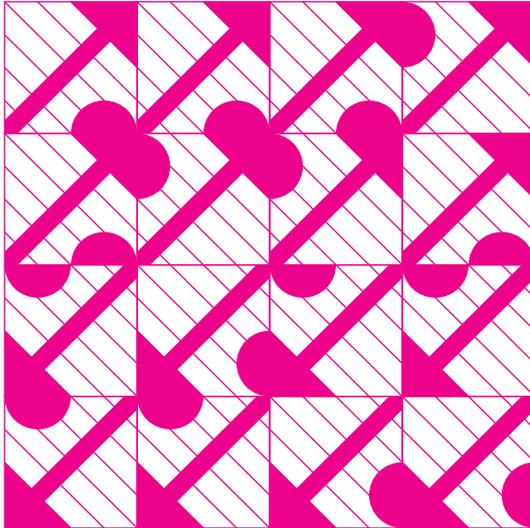


Figure 9.

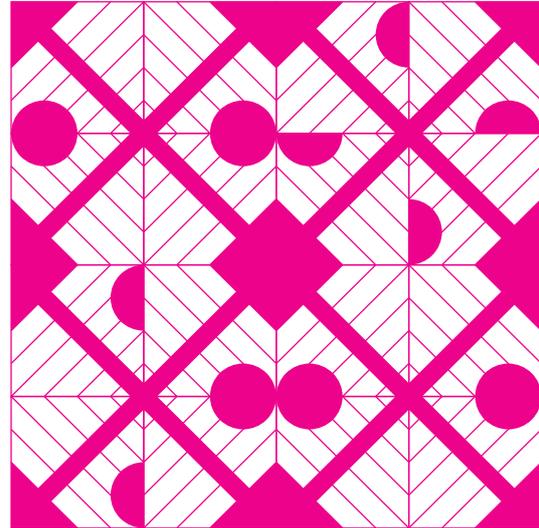


Figure 10.

L'activité a été testée dans cinq classes de deux écoles du Brabant Wallon. Le tableau ci-dessous répertorie les symétries présentes dans les productions des élèves. Il rend compte des mouvements de la pièce initiale qui ont permis de constituer le puzzle mais pas des commentaires émis par les enfants sur les puzzles achevés. En effet, dans ceux-ci, de nombreux éléments prégnants sont apparus, qui se sont substitués, le plus souvent, à la flèche et au demi-disque, à savoir un carré, un disque, un cœur, ...

	réalisation parfaite...					quelques irrégularités dans...					désordre apparent	Total
	sv-sh	sv	sh	r	t	sv-sh	sv	sh	r	t		
3 <sup>e</sup> année - CE2	4	2	1	1	0	2	1	2	0	0	8	21
4 <sup>e</sup> année - CM1	6	6	1	1	1	1	3	0	0	2	3	24
4 <sup>e</sup> année - CM1	3	2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	12
5 <sup>e</sup> année - CM2	6	1	2	0	0	2	2	1	1	0	5	20
6 <sup>e</sup> année - 6 <sup>e</sup>	7	1	0	2	0	1	2	3	2	1	4	23
Total	26	12	4	4	1	7	9	7	4	4	22	100
	47					31					22	100

sv = symétrie d'axe vertical      r = rotation  
 sh = symétrie d'axe horizontal    t = translation

Notons que dans la seconde classe de 4<sup>e</sup> année, l'institutrice a choisi douze élèves au hasard avant de réaliser l'activité, de manière à réaliser une observation sur cent enfants au total.

Grâce à ce tableau, nous pouvons notamment mettre en évidence que :

- 47 % des élèves ont réalisé une œuvre totalement « symétrique » dont plus de la moitié avec une double symétrie, d'axe horizontal et d'axe vertical ;
- la symétrie d'axe vertical est la transformation la plus fréquemment observée, tandis que la translation n'apparaît qu'une fois sur quarante-sept œuvres ;



- 22 % des œuvres présentent un désordre apparent. Il semble qu'en troisième année, les élèves ignorent encore partiellement ce concept de « symétrie » : huit enfants sur vingt-et-un n'en ont aucune idée.

### Le papier calque, outil de visualisation

L'enseignant distribue à chaque élève le puzzle qu'il a réalisé ainsi qu'une pièce imprimée sur papier calque. Il leur demande d'utiliser la pièce de papier calque pour découvrir les différentes actions réalisées pour passer d'une pièce à l'autre et de les décrire.

Pour la mise en commun, l'enseignant inscrit au tableau toutes les actions découvertes par les élèves. Le vocabulaire utilisé par les enfants de la classe n'est pas le même pour tous, il est indispensable d'énoncer et d'écrire tous les mots qui se rapportent à une même action. Il affiche ensuite des parties de puzzle — avec des pièces agrandies — (figures 11 à 13). Pour chacun des exemples proposés, les enfants viennent montrer, avec le papier calque, l'action réalisée.

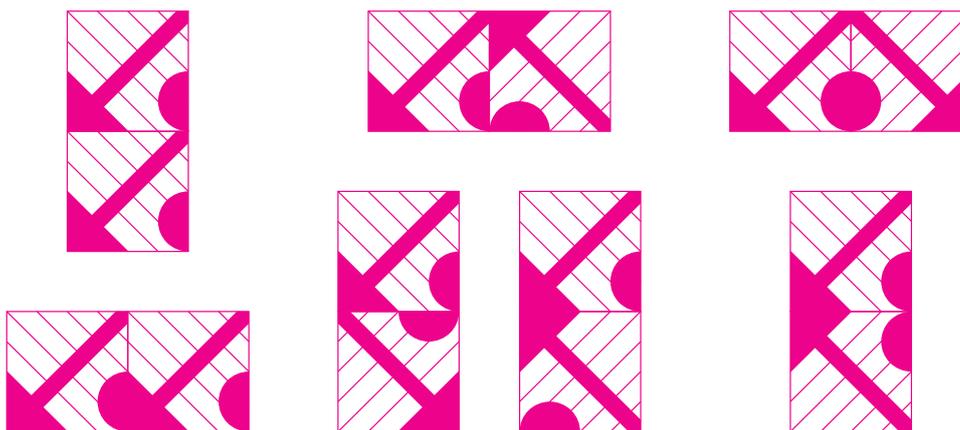


Figure 11.

Figure 12.

Figure 13.

Voici le vocabulaire employé spontanément par les enfants pour décrire les mouvements :

- pour la translation : glisser - déplacer - bouger - descendre - monter - avancer - reculer - aller en avant - aller en arrière - mettre à côté ;
- pour la rotation : tourner - pivoter - rouler ;
- pour la symétrie axiale : retourner - mettre de l'autre côté - inverser - mettre en miroir.

L'enseignant peut alors installer un nouveau vocabulaire, donner aux enfants les termes exacts se rapportant aux actions découvertes, notamment ceux liés à la symétrie axiale.

### Chercher des axes de symétrie...

Les enfants travaillent par groupes et reçoivent des *litema* (les mêmes motifs pour tous les élèves du groupe), deux miroirs, et une fiche explicative expliquant comment on repère l'axe de symétrie d'une figure au moyen d'un miroir.

La notion d'**axe de symétrie** d'une figure est ainsi introduite de manière concrète : c'est une droite qui partage la figure en deux morceaux, chacun étant l'image de l'autre dans un miroir (figure 14).



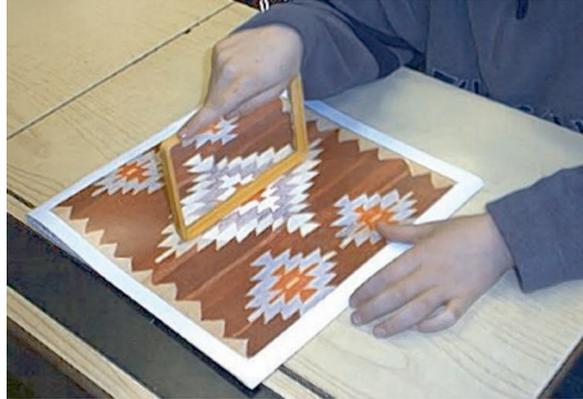


Figure 14.

Les élèves marquent les axes de symétrie qu'ils ont découverts. De nouveaux groupes sont ensuite constitués en prenant un élève de chacun des groupes précédents, de manière à permettre l'analyse de tous les *litema*. Entre eux, les élèves présentent leurs résultats — avec l'aide des miroirs — et échangent leurs points de vue lorsqu'il y a désaccord. Cette étape permet d'exprimer et de mettre des mots sur ce qu'ils ont fait, d'échanger en petits groupes et de compléter, si nécessaire, les représentations des axes. Les figures 15 et 16 présentent la mise en commun des résultats pour deux des huit fiches proposées (téléchargeables ici [▶](#)).

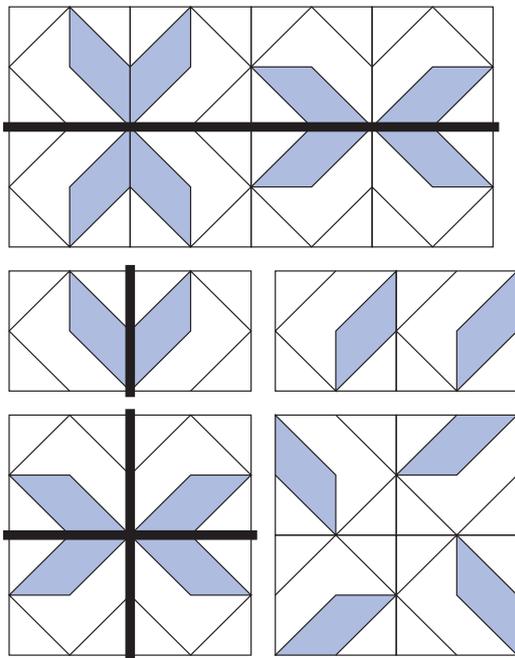


Figure 15.

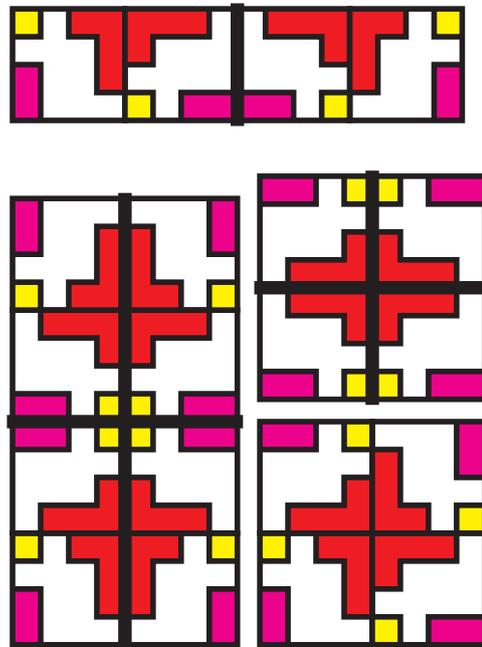


Figure 16.



### Pliage et découpage

Cette activité est prévue pour se dérouler par groupes de deux. Chaque groupe reçoit trois fiches (téléchargeables ici [▶](#)) comportant des consignes illustrées par des dessins. Les élèves doivent plier une feuille A4 en deux ou en quatre, avec des positions différentes pour les pliures, puis y découper à travers toutes les épaisseurs un triangle et un rectangle suivant un schéma donné.

Les élèves plient, découpent, manipulent sans savoir vraiment ce qu'ils vont obtenir. C'est finalement en dépliant la feuille qu'ils observent le résultat et découvrent que celui-ci présente une ou plusieurs symétries axiales. Ils mettent, par exemple, en évidence que :

- le pli correspond à un axe de symétrie ;
- les axes de symétrie sont au nombre de un ou de deux ;
- les axes de symétrie peuvent être verticaux, horizontaux ou obliques ;
- les figures découpées, qui apparaissent de part et d'autre de l'axe, sont de mêmes dimensions et à égale distance de l'axe de symétrie ;
- ...

Pour approfondir les observations, on colle les découpages sur une nouvelle feuille, on trace ensuite en rouge les axes de symétrie, puis on relie, à la règle et dans une autre couleur, les sommets correspondants des figures.

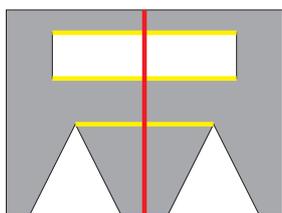


Figure 17.

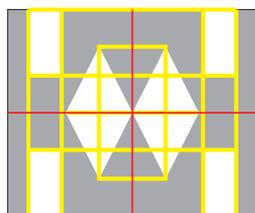


Figure 18.

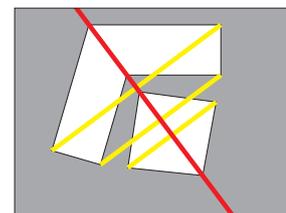


Figure 19.

Suite à cela, les élèves observent que :

- les droites qui passent par des points correspondants (en jaune sur les figures 17 à 19), dans une symétrie donnée, sont toutes parallèles entre elles ;
- les droites qui passent par des points correspondants, dans une symétrie donnée, sont toutes perpendiculaires à l'axe de symétrie (en rouge sur les figures 17 à 19) ;
- ...



Finalement, l'enseignant leur propose un petit défi à réaliser de manière individuelle : reproduire ces deux *ikghuptu* par pliage et découpage (figures 20 et 21).

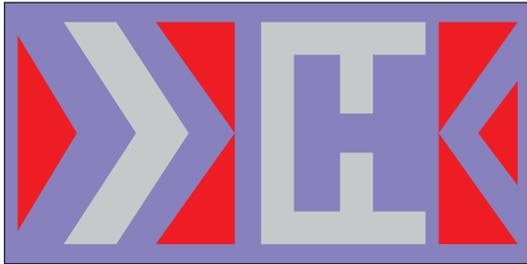


Figure 20.



Figure 21.

On suggère aux enfants de dessiner les axes de symétrie sur le modèle et, lorsque la feuille est pliée, de tracer au crayon les motifs à découper (figures 22 et 23).



Figure 22.

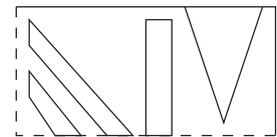


Figure 23.

Lorsqu'ils ont terminé, ils peuvent coller, derrière les « trous », des morceaux de feuilles de couleurs différentes afin d'obtenir des représentations fidèles des œuvres.

### Réalisation d'une peinture murale

L'enseignant affiche au tableau un *tema* (figure 24) et la silhouette d'un corps humain (figure 25). Il demande aux enfants quel est le point commun à ces deux figures.

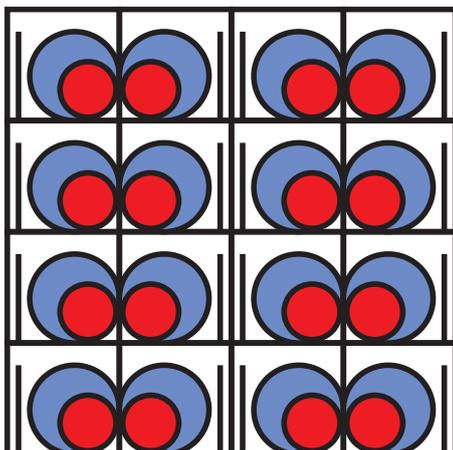


Figure 24.



Figure 25.



Une symétrie axiale d'axe vertical apparaît dans les deux illustrations. L'enseignant explique que les femmes Sotho exploitent la symétrie du corps humain pour réaliser leurs dessins. En effet, elles travaillent debout, plaçant l'axe de symétrie du *tema* dans le plan de symétrie de leur corps. De part et d'autre d'une ligne verticale imaginaire, elles commencent par tracer, dans la dernière couche de torchis encore humide, les grandes lignes du dessin, simultanément avec les deux mains : des formes, résultant de l'une et de l'autre main, sont ainsi réalisées présentant des images symétriques.

L'enseignant propose ensuite aux enfants de réaliser un *tema* à la manière des femmes Sotho et leur montre, au tableau, comment le réaliser :

- plier la feuille en deux de manière à obtenir un pli correspondant à l'axe vertical ;
- prendre deux crayons ordinaires, commencer le dessin sur un point de l'axe et tracer les lignes simultanément avec les deux mains ;
- le dessin terminé, mettre en couleur les formes tracées avec les éponges, les pinceaux et la gouache (ou avec des gros marqueurs), de manière à observer également une symétrie des couleurs.

Voici deux exemples de ce que les enfants ont réalisé sur de grandes affiches blanches, placées sur les murs de la classe (figures 26 et 27).



Figure 26.



Figure 27.



### Conclusion

Les séquences d'apprentissage décrites dans cet article s'inscrivent dans un courant qui associe art et géométrie. À l'école élémentaire, c'est une bonne occasion pour jeter des ponts entre les mathématiques et les cours artistiques.

Outre les nombreux apprentissages dont elles sont porteuses, l'intérêt de ces activités réside dans le plaisir qu'elles procurent, tant aux élèves qui les vivent dans les classes qu'aux enseignants qui les testent en formation. La grande diversité des *litema* réalisés à partir d'un même motif et la beauté des productions obtenues par collage, découpage ou dessin étonnent à chaque fois.

À l'âge où les enfants ne sont pas encore trop démotivés par l'étude de la géométrie, leur faire percevoir l'harmonie des œuvres d'art de nature géométrique les incitera peut-être à porter un regard différent sur les productions artistiques des autres civilisations et à percevoir les outils puissants que la géométrie met à leur disposition pour les réaliser.

### Références

- [1] P. Gerdes. *Femmes et géométrie en Afrique Australe*. Paris : L'Harmattan, 1996.
- [2] Monni Adams. « Beyond Symmetry in Middle African Design ». In : *African Arts* volume XXIII. N° 1 (novembre 1989). , p. 34-43+102-103. ISSN : 0001-9933. DOI : 10.2307/3336798.
- [3] CREM. *Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*. Sous la dir. de M. Ballieu et M.-F. Guissard. . Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), 2004.
- [4] G. N. Müller et E. C. Wittmann. *Spiegel mit dem Spiegelbuch*. Düsseldorf : Klett, 1997.
- [5] N. Rouche. *L'archipel des isométries*. Louvain-la-Neuve : Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), 1982.
- [6] Elizabeth Ann Schneider. « Ndebele Mural Art ». In : *African Arts* volume XVIII. N° 3 (mai 1985). , p. 60-83+100. ISSN : 0001-9933. DOI : 10.2307/3336357.



Marie-France Guissard et Laure Mourlon Beernaert ont fait partie d'un groupe de chercheurs au CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) à Nivelles, en Belgique.

Contact : [info@crem.be](mailto:info@crem.be)

© APMEP Septembre 2021

# Sommaire du n° 541

## Maths et citoyenneté (1)

<b>Éditorial</b>	<b>1</b>	<b>Ouvertures</b>	<b>54</b>
<b>Opinions</b>	<b>3</b>	La quadrature du cercle et le disque de Poincaré — Pierre Osadtchy	54
✦ Géométrie, rigueur et démonstration — Daniel Lehmann	3	Petite enquête sur l'égalité (II) — François Boucher	56
Renvoyez l'ascenseur ! — Agnès Veyron	7	Sur la récurrence et la dichotomie au lycée — Jean-Paul Roy	63
<b>Avec les élèves</b>	<b>10</b>	D'une observation de Fermat à un moment de calcul — Jean Aymès	69
✦ L'École d'Athènes s'invite au collège — Henrique Vilas Boas	10	<b>Récréations</b>	<b>79</b>
HowMany, le calcul mental par l'image — Alexandre Desmarest	16	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	79
À propos de mots... — Véronique Cerclé & Sonia Calvel-Grazi	23	Le jeu du calisson — Olivier Longuet	82
Séance de modélisation en mathématiques en lycée professionnel — Jean-Jacques Kratz	27	<b>Au fil du temps</b>	<b>87</b>
Les symétries dans l'art africain — Marie-France Guissard & Laure Mourlon Beernaert	34	Homo academicus dans son labyrinthe — Frédéric André	87
✦ Argumenter et débattre — Habib Ben Aïcha	45	Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	90
MathALEA, un générateur d'exercices à données aléatoires — Rémi Angot	50	Matériaux pour une documentation	92



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr