

Le bulletin de l'APMEP - N° 540

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2021

Maths en scène



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 218 spécial « Journées Nationales »

*Ce numéro d'Au fil des maths a exceptionnellement été envoyé
aux abonnés à la version numérique*

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Michel BEDEL, François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Juin 2021

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297



Au fil des problèmes

*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
 frederic.deligt2@gmail.com
 ou par courrier à :
 Frédéric de Ligt
 3 rue de la Pierrière
 17270 MONTGUYON*

Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

Frédéric de Ligt

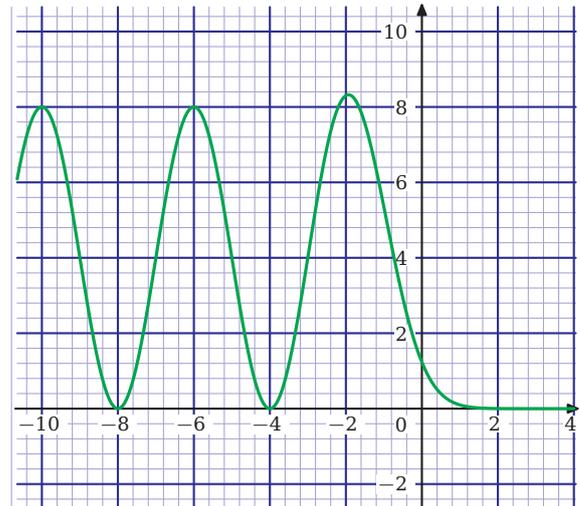


540-1 Un défi niveau Terminale (François Denizou – Villeurbanne)

Un élève a proposé ce petit défi. La difficulté est d'arriver à répondre à la question uniquement avec des outils de terminale, sinon c'est beaucoup plus facile. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} vérifiant :

$$(e^{2x} - 1)^2 f(x) = 4 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

Déterminer la valeur de $f(0)$.



540-2 Une double représentation (Vincent Thill – Migennes)

Trouver tous les nombres premiers $p < q < r$ tels que $A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1$ et $B = 3p + 5q$ représentent le même nombre premier.

540-3 Curiosité numérique (Michel Lafond † 2020)

On calcule $\frac{1\,000}{998\,001}$ et l'on trouve :

$$\frac{1\,000}{998\,001} = 0,001\,002\,003\,004\,005 \dots 996\,997\,999\,000\,001\,002 \dots$$

En y regardant de plus près, les 2 994 premières décimales regroupées par 3, sont 001, 002, 003, ..., 996, 997, 999 c'est-à-dire tous les entiers consécutifs depuis 001 jusqu'à 999 sauf 998. Il y a un truc, lequel ?





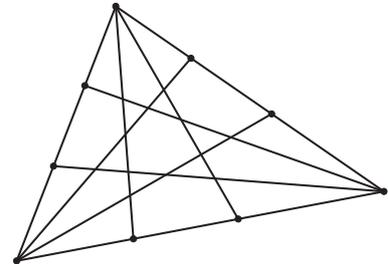
540-4 Crescendo

1. **Robert Ferréol – Paris**

Déterminer les triangles rectangles dont la médiane issue de l'angle droit soit aussi une trisectrice.

2. **Djelloul Sebaa**

Dans un triangle isocèle ou équilatéral la bissectrice peut être médiane (au minimum). Par analogie, pour quels triangles une trisectrice peut-elle être une médiane ?



À propos des problèmes parus précédemment

538-1 Partage de pizza

Quatre chemins de longueurs inégales ont mené à la solution. Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) utilise des coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C) qu'il fait correspondre à des aires de triangles ; Jacques Vieulet (Ibos) et Ludovic Jany (Bolquère) se placent dans un repère orthonormé et calculent des distances ; Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) établit une relation entre l'aire d'un triangle blanc et les distances de P aux côtés du triangle équilatéral puis se sert du théorème de Viviani ; enfin Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg) et Didier Trotoux (Caen) parviennent très élégamment au résultat sans aucun calcul : ils tracent les parallèles aux côtés passant par le point P , ceci faisant apparaître trois parallélogrammes et trois triangles équilatéraux, chacun partagé en deux triangles d'aires égales et de couleurs différentes.

Jean-Pierre Friedelmeyer demande s'il existe une méthode simple pour prouver que la propriété se généralise aux polygones convexes.

538-2 Sangaku hyperbolique

Il fallait trouver 100π comme aire maximale pour les deux disques. Pour cela, Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) observe qu'il faut d'abord rendre maximum l'aire du petit disque, le grand disque étant alors contraint. Le rayon du petit disque est alors celui du cercle osculateur à l'hyperbole en $(1; 1)$ dont une formule est connue. Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) et Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) n'utilisent pas cette formule mais retrouvent les coordonnées de son centre en résolvant des équations du second degré. Des solutions reçues aussi de Michel Sarrouy, de Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg) et de Jacques Vieulet (Ibos).

538-3 Somme de puissances

Comme le rappelle Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un groupe multiplicatif qui possède au moins un générateur g de classe différente de 1, ce dernier est aussi un générateur du groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En remplaçant les i^k par $(g^{i-1})^k$ ou $(ig)^k$ dans la somme selon le point de vue, on n'en modifie pas globalement les termes modulo p . Après factorisation, la divisibilité est atteinte. C'est aussi la voie suivie par Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives), Yannick Vincent (Pantin) et M. Emeillat.

Jacques Vieulet (Ibos) attaque le problème par la combinatoire, ce qui mobilise quelques signes sommes et coefficients binomiaux, et prouve finalement par récurrence que la somme donnée est bien divisible par p .





538-4 Un peu d'algèbre pour finir

Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Jacques Vieulet (Ibos) établissent que les sommes S_n des puissances n -ièmes des trois nombres, pour n entier relatif, sont les termes d'une suite qui vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 3. L'expression génère clairement des termes qui sont des entiers relatifs. Par divers arguments, il est ensuite montré que ces termes sont en fait uniquement des entiers naturels.

Ludovic Jany (Bolquère) suit une autre idée et introduit une suite auxiliaire. À l'aide d'une même démonstration par récurrence qui joue à la fois sur les termes de la suite (S_n) et sur ceux de la suite auxiliaire, il parvient à la conclusion. Il complète son courrier en déterminant les valeurs exactes de x , y et z .

J'ai reçu de plus des réponses exactes mais pour n seulement entier naturel de Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives), de François Denizou (Villeurbanne) et de M. Emeillat.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : [▶](#) (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

© APMEP Juin 2021

Sommaire du n° 540

Maths en scène

Éditorial

1 Oral en mathématiques et résolution de problèmes aux cycles 2 et 3 — Christine Choquet 55

Opinions

Apprendre à faire, apprendre à penser — Sylvie Grau

3 Des énigmes pour s'initier à la cryptographie — Pascal Lafourcade & Malika More 65

✦ Un incroyable *Very Math Trip* — Manu Houdart

3 Petite enquête sur l'égalité (I) — François Boucher 73

Avec les élèves

19 **Récréations** 81

✦ Maths en scène 2020, le virus s'invite — Claudie Asselain-Missenard

19 Mettre en planche les mathématiques... — Olivier Longuet 81

✦ La chaîne *Scientificfiz* — Gilles Gourio

25 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 84

✦ *ÉloquenSciences* — Houria Lafrance

29

✦ Mathématiques et théâtre — Anne Rougée & Isabelle Galloni

35 **Au fil du temps** 87

✦ GeoGebra Classroom — Vincent Pantaloni

39 Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 87

Ouvertures

Proportionnalité et fonction linéaire — Daniel Perrin & Marie-Jeanne Perrin-Glorian

43 Une mise au point sur un article du *Point* — André Bonnet 89

43 Matériaux pour une documentation 91



CultureMATH




APMEP
www.apmep.fr