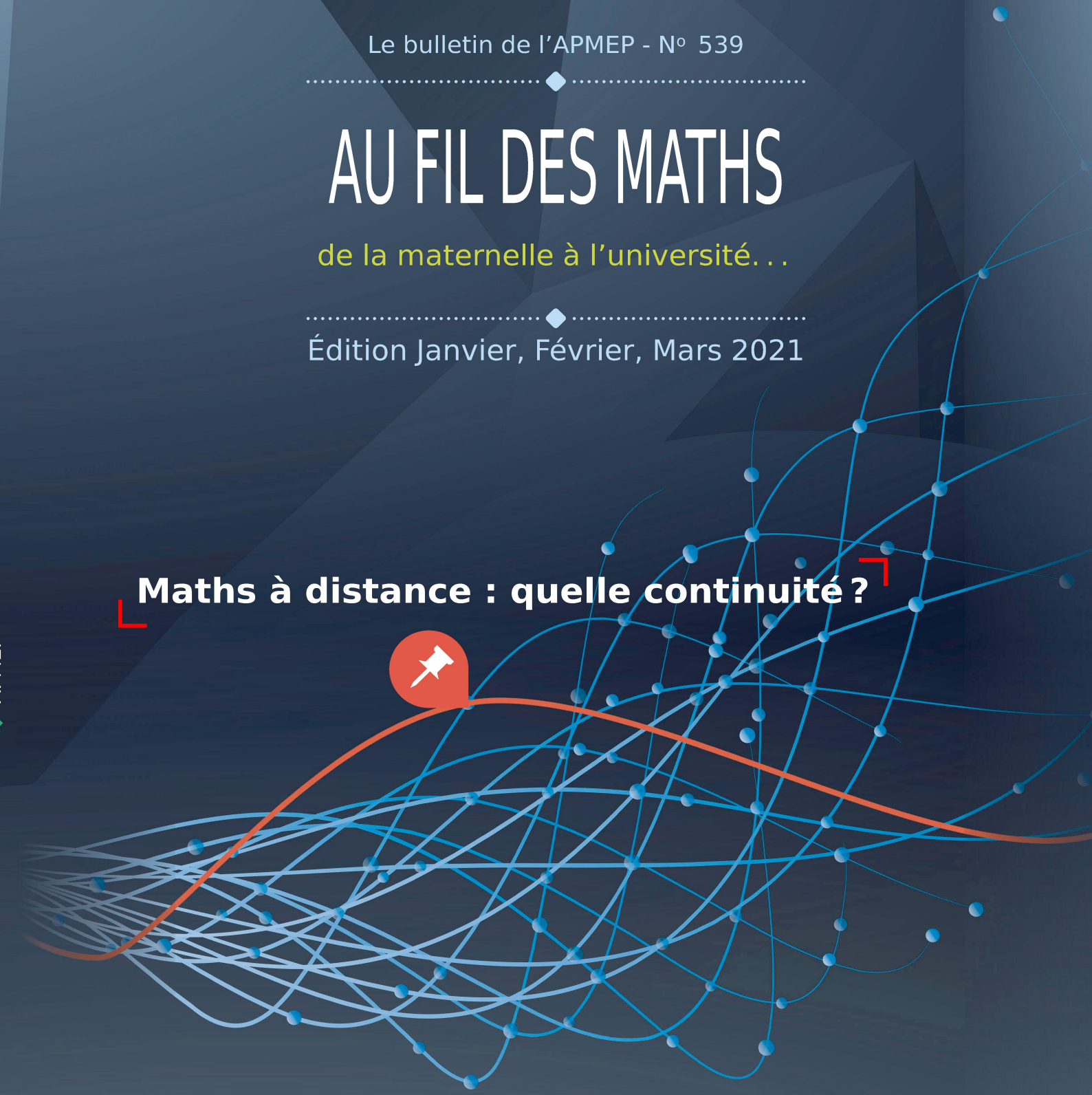
Le bulletin de l'APMEP - N° 539

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2021

Maths à distance : quelle continuité ?



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien Planchenault.*

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Lise Malrieu.*

Rédacteurs : *Vincent Beck, François Boucher, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Frédéric De Ligt, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Alexane Lucas, Lise Malrieu, Daniel Vagost, Thomas Villemonteix, Christine Zelty.*

« Fils rouges » numériques : *François Bouyer, Gwenaëlle Clément, Nada Dragovic, Laure Étévez, Marianne Fabre, Robert Ferréol, Yann Jeanrenaud, Christophe Romero, Agnès Veyron.*

Illustrateurs : *Pol Le Gall, Olivier Longuet, Jean-Sébastien Masset.*

Équipe TEXnique : *François Couturier, Isabelle Flavier, Anne Héam, François Pétiard, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Sophie Suchard, Michel Suquet.*

Maquette : *Olivier Reboux.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Mars 2021
Impression : Imprimerie Corlet.
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

AU FIL DES MATHS

Le théorème des carpettes

Voici un théorème de géométrie élémentaire au drôle de nom, qui va nous faire aller de surprise en surprise ! Découvrons avec Yves Farcy ses applications originales joliment illustrées. Un bon moment garanti !

Yves Farcy

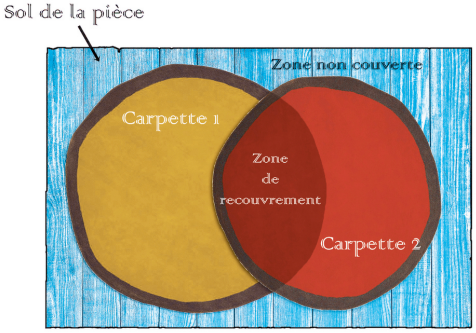
C'est en me perdant sur le site `cut-the-knot` du regretté Alexandre Bogomolny que j'ai, pour la première fois, rencontré ce très joli théorème. Il semblerait que ce soient Titu Andreescu et Bogdan Enescu qui, en 2004, dans un ouvrage sur les Olympiades de mathématiques [1], utilisent pour la première fois le mot de carpette pour désigner le théorème. Il est proposé comme une démonstration élégante de l'exemple 1 ci-dessous.

Le théorème des carpettes

Je présente ici un énoncé possible de ce théorème, un peu différent de celui que propose Alexandre Bogomolny.

Théorème des carpettes

Soient deux carpettes étalées sur le sol d'une pièce.
L'aire de la surface non couverte par les carpettes est égale à l'aire de leur surface de recouvrement si et seulement si l'aire du sol de la pièce est égale à la somme des aires des deux carpettes.



Preuve

Les deux carpettes étant incluses dans le sol de la pièce, on a :

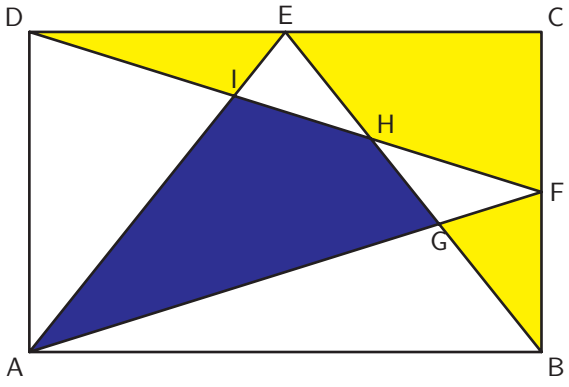
$$\text{Aire(sol de la pièce)} = \text{Aire(non couv.)} + \text{Aire(Carpette 1)} + \text{Aire(Carpette 2)} - \text{Aire(recouvrem.)}$$

Et donc :

$$\text{Aire(sol de la pièce)} = \text{Aire(Carpette 1)} + \text{Aire(Carpette 2)} \Leftrightarrow \text{Aire(non couv.)} = \text{Aire(recouvrem.)}$$

Applications à la géométrie

1. **Dans un rectangle**.
   Montrer l'égalité entre l'aire de la surface bleue et la somme des aires des surfaces jaunes dans le rectangle ABCD.



Solution

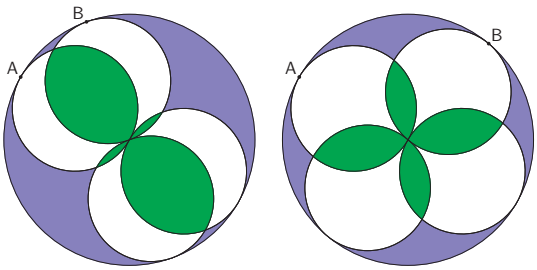
Les deux carpettes sont les triangles ABE et ADF. ABE a la même base et la même hauteur et donc la même aire que ABD soit la moitié du rectangle ABCD. Il en va de même pour AFD.

APMEP

On a donc
Aire(ABE) + Aire(AFD) = Aire(ABCD) et on peut appliquer le théorème des carpettes avec Aire(non couverte) = Aire(FGB) + Aire(EHFC) + Aire(DIE)
et Aire(recouvrement) = Aire(AIHG) et donc Aire(AIHG)=Aire(FGB)+Aire(EHFC)+Aire(DIE) soit

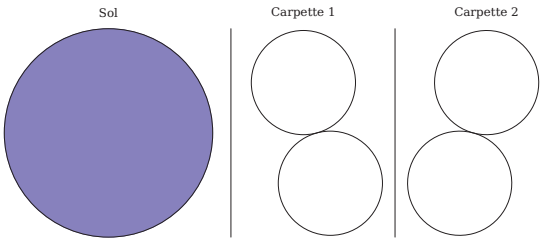
Aire(surface bleue) = Aire(surfaces jaunes)

2. **Des amandes et des parapluies**.
Montrer que l'aire des amandes (en vert) est égale à l'aire des parapluies (en lavande), quelle que soit la position des points de tangence A et B.



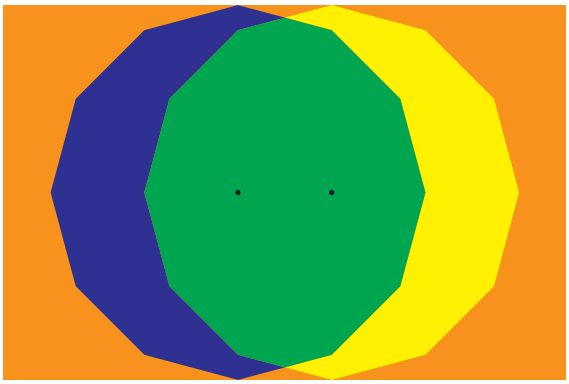
Solution

On définit le sol et les deux carpettes :



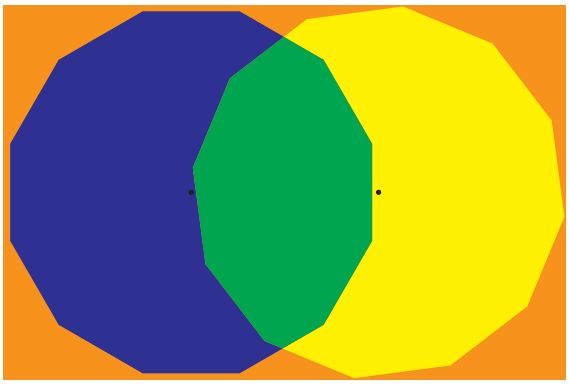
Si R est le rayon des deux disques constituant chaque carpette, le sol a pour rayon $2R$. Ainsi Aire(sol) $= 4\pi R^2$ et Aire(carpette 1) = Aire(carpette 2) $= 2\pi R^2$ et donc Aire(sol) = Aire(carpette 1) + Aire(carpette 2) et donc, d'après le théorème des carpettes, l'aire des amandes est égale à l'aire des parapluies.
Vous pourrez trouver sur le site `cut-the-knot` d'autres exemples d'application. Mais on peut se laisser aller à son imagination pour trouver d'autres situations. Je vous en propose trois originales.

3. **Ouverture des parapluies ou deux dodécagones réguliers inscrits dans un rectangle.**
Montrer que l'aire de la surface verte est égale à l'aire de la surface orange.

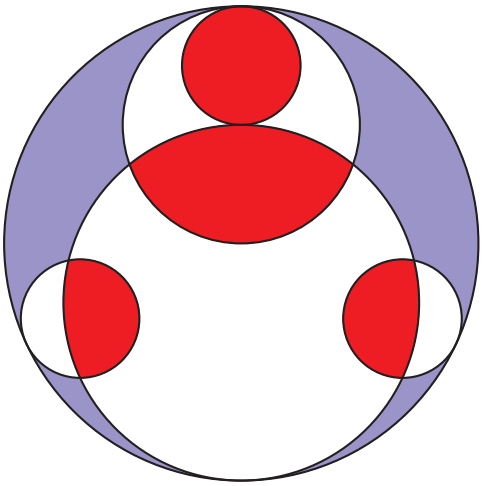


Solution

Si on appelle R le rayon du cercle circonscrit d'un dodécagone, l'aire de chaque dodécagone régulier est $3R^2$. On choisit les dimensions du rectangle pour que son aire soit $6R^2$, par exemple $2R$ et $3R$.
La somme des aires des dodécagones est donc égale à l'aire du rectangle. On peut alors appliquer le théorème des carpettes : l'aire de la surface verte (surface de recouvrement) est donc égale à l'aire de la surface orange (surface non couverte).
Ce raisonnement est valable quelle que soit la position des dodécagones dans le rectangle : les valeurs des aires changent mais l'égalité reste vraie !

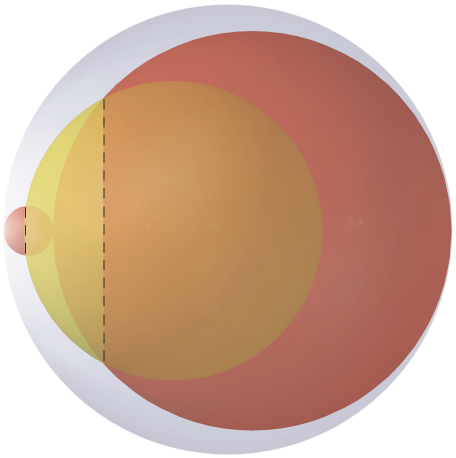


4. **Lavande et capucine.**



Les différents rayons des cercles sont dans un ratio 1:2:3:4. Montrer que l'aire des surfaces capucine est égale à l'aire des surfaces lavande.
La solution est laissée au lecteur.

5. **La « même idée » dans l'espace** puisque le théorème s'étend aux volumes.



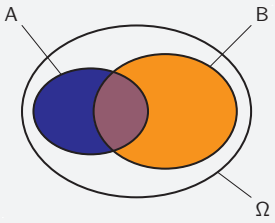
Les deux boules rouges sont tangentes entre elles et tangentes à la boule bleue.
Les différents rayons des boules sont dans un ratio 1:6:8:9. Montrer que le volume de l'intersection de la boule jaune et des deux boules rouges est égal au volume non occupé de la boule bleue.
La solution est laissée au lecteur.

Un détour par les probabilités

Voici l'énoncé du théorème appliqué aux probabilités.

Théorème

On se place dans un espace probabilisé. Soit Ω l'univers, A et B deux évènements sur cet univers.



$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}) \iff p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = 1.$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} p(\Omega) &= p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}) \\ &= p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Et donc :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}) \iff p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = 1.$$

Un exemple

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 20. 60 % des boules sont bleues, les autres rouges. On tire une boule au hasard.

Montrer que la probabilité de tirer une boule bleue portant un nombre premier est égale à la probabilité de tirer une boule rouge ne portant pas un nombre premier.

Solution

On assimile les boules à leurs numéros. On définit $\Omega = \{1;2;\ldots;20\}$, on choisit comme tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et p la probabilité uniforme.

Soit B l'événement « la boule est bleue » et Pr l'évènement « la boule est marquée d'un nombre premier ». Il y a huit nombres premiers entre 1 et 20 donc $p(\mathrm{Pr}) = 0{,}4$ et $p(\mathrm{B}) = 0{,}6$.
$p(\mathrm{Pr}) + p(\mathrm{B}) = 1$, on peut donc appliquer le théorème des carpettes : $p(\mathrm{B}\cap\mathrm{Pr}) = p(\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{Pr}})$.

Ce qui est le résultat demandé.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

C'est John Conway qui, dans le chapitre *The power of mathematics* d'un ouvrage collectif, cite cette belle preuve qu'il attribue à Stanley Tennenbaum. Vous trouverez par ailleurs dans ce chapitre sa preuve élégante du théorème de Morley et un joli paragraphe sur les nœuds [2].

John Conway ne parle pas explicitement du théorème des carpettes mais nous pouvons ici le voir opérer.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Il existe donc un couple d'entiers $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$.

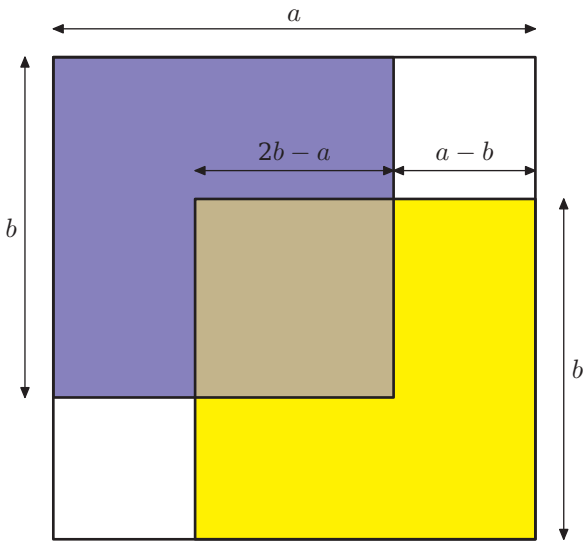
a et b sont donc les plus petits entiers possibles.

Il vient $a^2 = 2b^2$.

De plus comme $1 < \sqrt{2} < 2$, on a

$$b < a < 2b \qquad (1)$$

On construit maintenant un sol carré de côté a et on y place deux carpettes carrées de côté b comme sur la figure ci-dessous.



Comme $b < a$ on est assuré que les deux carpettes sont incluses dans le carré de côté a et, du fait que $b > \dfrac{a}{2}$, les deux carpettes ont une surface de recouvrement qui est un carré de côté $2b - a$; la surface non recouverte est constituée de deux carrés de côté $a - b$.

Comme $a^2 = b^2 + b^2$, on peut appliquer le théorème des carpettes !

On a donc $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$ et un nouveau couple d'entiers naturels non nuls $2b - a$ et $a - b$ respectivement strictement plus petit que a et b d'après (1) et tels que $\sqrt{2} = \dfrac{2b - a}{a - b}$.

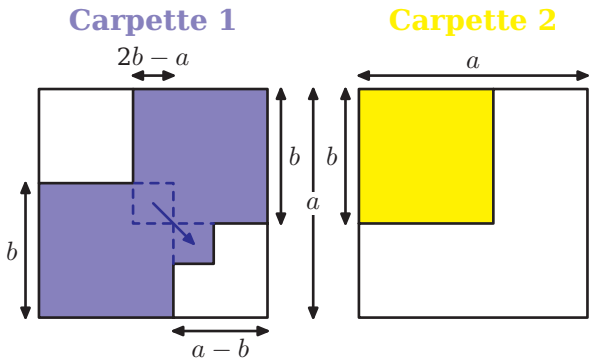
D'où la contradiction.

Irrationalité de $\sqrt{3}$

Forcément, lorsqu'on voit un tel résultat, on a envie d'essayer avec $\sqrt{3}$. Au début, je ne voyais vraiment pas comment m'en sortir et placer trois carrés de côté b dans le carré de côté a. Et puis...

Supposons donc que $\sqrt{3}$ soit rationnel.

On définit a et b comme précédemment et il vient $a^2 = 3b^2$.



Ici, on a besoin d'un deuxième encadrement $\dfrac{3}{2} < \sqrt{3} < 3$ (que l'on déduit de $1 < \sqrt{3} < 2$ par passage à l'inverse), et en remplaçant $\sqrt{3}$ par $\dfrac{a}{b}$ on obtient

$$3b < 2a \qquad (2)$$

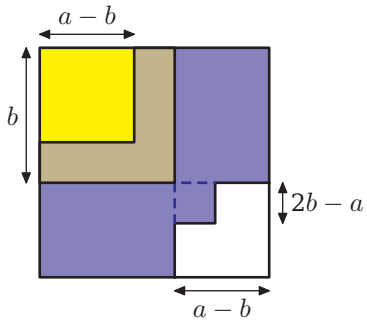
$$\text{et } 3b > a \qquad (3)$$

L'astuce est de déplacer la surface de recouvrement de deux carpettes carrées de côté b afin de ne pas avoir trois « épaisseurs ». Ceci est possible

puisque $2b - a < a - b$ d'après (2) ; qui plus est, l'aire de la surface obtenue est $2b^2$.

Et maintenant tout s'enchaîne : l'aire du sol est $\mathscr{A}_{\text{sol}} = a^2$.

L'aire de la première carpette est $\mathscr{A}_1 = 2b^2$ et l'aire de la seconde carpette $\mathscr{A}_2 = b^2$. Maintenant on a : $\mathscr{A}_{\text{sol}} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$ et on peut appliquer le théorème des carpettes !



Déterminons maintenant l'aire de recouvrement $\mathscr{A}_{\text{r}}$ et l'aire non couverte $\mathscr{A}_{\text{nc}}$.

$$\mathscr{A}_{\text{r}} = b^2 - (a-b)^2 = a(2b-a)$$
$$\mathscr{A}_{\text{nc}} = (a-b)^2 - (2b-a)^2 = b(2a-3b).$$

Le théorème des carpettes nous assure alors que $\mathscr{A}_{\text{r}} = \mathscr{A}_{\text{nc}}$ et donc que $a(2b-a) = b(2a-3b)$. Nous y voilà, on a donc : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2a-3b}{2b-a}$ avec $0 < 2a - 3b < a$ et $0 < 2b - a < b$ grâce à (2) et (3), d'où la contradiction.

Irrationalité de $\sqrt{5}$

Le raisonnement suivant donne les idées pour la généralisation.

On a

$$2 < \sqrt{5} < 3 \qquad (4)$$

et par passage à l'inverse

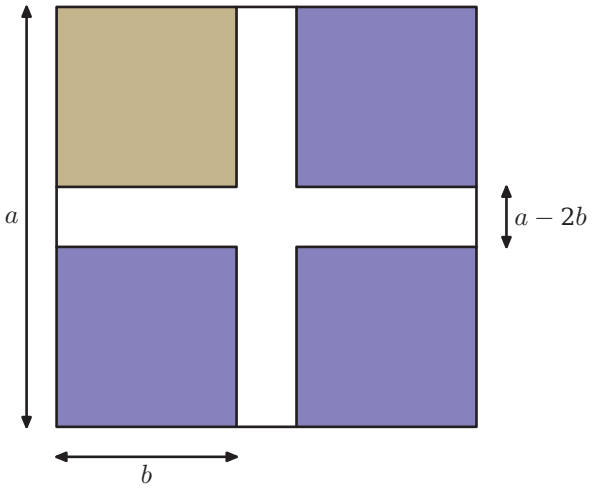
$$\frac{5}{3} < \sqrt{5} < \frac{5}{2} \qquad (5)$$

On utilise bien sûr le raisonnement par l'absurde : comme précédemment $a^2 = 5b^2$ et en remplaçant $\sqrt{5}$ par $\dfrac{a}{b}$ dans (4) on obtient

$$2b < a \qquad (6)$$

On va donc placer nos carrés de côté b dans notre carré de côté a. On crée la première carpette avec quatre carrés de côté b, placés dans chaque coin. Ces carrés ne se recouvrent pas car, d'après (6), $2b < a$ et la largeur de l'espace non couvert entre deux carrés est $a - 2b$.

Cas de $\sqrt{5}$



On dispose tout simplement le cinquième carré qui sera la seconde carpette sur un des quatre premiers.

La somme des aires des deux carpettes est bien égale à l'aire du sol donc l'aire de recouvrement $\mathscr{A}_{\text{r}}$ est égale à l'aire non couverte $\mathscr{A}_{\text{nc}}$.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}_{\text{r}} = b^2 \\
&\mathscr{A}_{\text{nc}} = a(a-2b) + 2b(a-2b) \\
\mathscr{A}_{\text{r}} = \mathscr{A}_{\text{nc}} &\iff b^2 = a(a-2b) + 2b(a-2b) \\
&\iff b^2 = a(a-2b) + 2ba - 4b^2 \\
&\iff 5b^2 - 2ba = a(a-2b) \\
&\iff b(5b-2a) = a(a-2b)
\end{aligned}$$

Et donc : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5b-2a}{a-2b}$ avec $0 < 5b - 2a < a$ d'après (5) et $0 < a - 2b < b$ d'après (4) d'où la contradiction.

Généralisation : irrationalité de $\sqrt{k}$

Et on peut généraliser cet agencement des carpettes à toutes les racines carrées des nombres entiers strictement supérieurs à 4 qui ne sont pas des carrés parfaits.

Soit k un tel nombre, on a

$$n < \sqrt{k} < n+1 \qquad (7)$$

avec n un entier supérieur à 2.
On en déduit les deux encadrements :
d'une part par passage à l'inverse

$$\frac{k}{n+1} < \sqrt{k} < \frac{k}{n} \qquad (8)$$

et d'autre part $n^2 < k < (n+1)^2$ c'est-à-dire

$$1 \leqslant k - n^2 \leqslant 2n. \qquad (9)$$

On raisonne à nouveau par l'absurde.

Il existe donc un couple d'entiers $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\sqrt{k} = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$.
a et b sont donc les plus petits entiers possibles.
On a $a^2 = kb^2$ et on construit la première carpette en plaçant n^2 carrés de côté b dans le carré de coté a. C'est possible sans recouvrement puisque d'après (7) $bn < a$ et on peut donc les espacer régulièrement avec des bandes non couvertes de longueur a et de largeur $\dfrac{a-nb}{n-1}$ puisque $n \geqslant 2$.

On va maintenant construire la seconde carpette (en vert) en recouvrant $k - n^2$ carrés de côté b. C'est possible puisque $n \geqslant 2$ et avec (9) :

$$1 \leqslant k - n^2 \leqslant 2n \leqslant n^2.$$

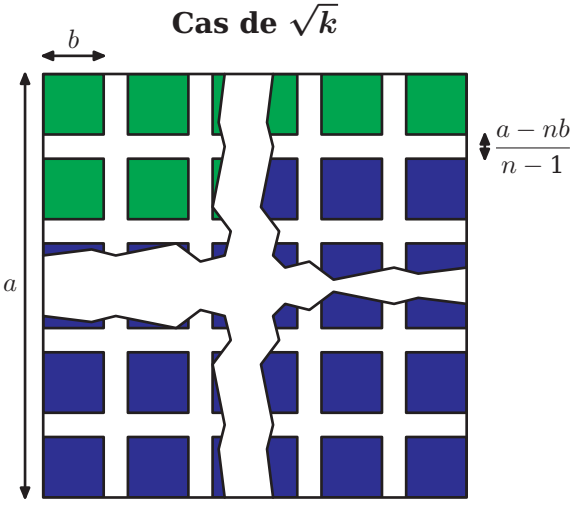
L'aire de recouvrement est l'aire des $(k - n^2)$ carrés de côté b :

$$\mathscr{A}_{\text{r}} = b^2(k - n^2).$$

Pour l'aire non couverte, on additionne l'aire des $(n-1)$ rectangles horizontaux de longueur a et l'aire des $n(n-1)$ rectangles verticaux de longueur b.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\text{nc}} &= (n-1)a\frac{a-nb}{n-1} + n(n-1)b\frac{a-nb}{n-1}\\ &= a(a-nb) + nb(a-nb).\end{aligned}$$

Cas de $\sqrt{k}$



On applique maintenant notre théorème des carpettes :

$$b^2(k - n^2) = a(a-nb) + nb(a-nb)$$

soit $b(kb-na) = a(a-nb)$; on a donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{kb-na}{a-nb}$ avec $0 < kb - na < a$ d'après (8) et $0 < a - nb < b$ d'après (7) d'où la contradiction.

Pour $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, Steven J. Miller et David Montague proposent d'autres démonstrations s'inspirant de l'article de J. Conway à l'aide de triangles et de pentagones [3], chemin suivi plus récemment par Ricardo A. Podestá [4] mais sans généraliser.

Références

[1] Titu Andreescu et Bogdan Enescu. *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhäuser, 2004.

[2] J. Conway. *The power of mathematics*.

[3] Steven J. Miller et David Montague. *Irrationality from the book*. 2018.

[4] Ricardo A. Podestá. *A geometric proof that $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$ are irrational*. 2020.

Yves Farcy, professeur de mathématiques au collège de la Vallée du Thoré à Labastide-Rouairoux, membre du groupe Jeux Mathématiques de l'IRES de Toulouse, est l'actuel président de la Régionale de Toulouse de l'APMEP.

yves.farcy@gmail.com

© APMEP *Mars 2021*

Adhésion 2021

Ce numéro 539 d'*Au fil des maths* est le dernier que vous recevez si vous n'avez pas encore renouvelé votre adhésion pour l'année civile 2021.

Pour vous garantir l'envoi du numéro 540 en évitant des frais supplémentaires pour l'association, votre renouvellement doit être effectué avant le 15 mai.

Pour un renouvellement comme pour une première adhésion, rendez-vous sur la boutique en ligne !

En cas de difficulté, n'hésitez pas à joindre le secrétariat par courrier électronique à secretariat-apmep@orange.fr.

Abonnement sans adhésion 2021

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2021 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur https://www.apmep.fr

NOM (établissement ou personne) : .....

Adresse : .....

Code Postal : ..... *Ville :* ..... *Pays :* .....

Téléphone : ..... *Adresse courriel :* .....

Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : .....

Adresse de livraison : .....

Adresse de facturation : .....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1er degré ☐ 2e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à: `contactrgpd@apmep.fr`.

Abonnement à *Au fil des maths*– le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur https://www.apmep.fr.

☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Date : ..... *Signature :* ..... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr

Sommaire du nº 539

Maths à distance : quelle continuité ?

Éditorial 1

Opinions 3

Covid-19 : les défis en termes de ressources et de collaboration des enseignants — Luc Trouche 3

Évolution des populations en master MEEF de 2019 à 2024 — Louise Nyssen 11

Avec les élèves 16

Favoriser l'apprentissage de la géométrie — M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet & S. Vansimpsen 16

Le jeu Al-Jabr : le bonheur est dans les dés ! — Olivier Garrigue, Ricardo Lima & Jorge Rezende 21

Utilisation de capsules vidéo et de Genially — Juliette Hernando 28

Genèse de pratiques au temps du confinement — Maha Abboud, Isabelle Bois, Chrystèle Gautier, Caroline Girardot, Christine Jacquet, Faik Keles, Cécile Kerboul, Marie-Noëlle Lamy, Anne Pinvidic & Fabien Sommier 33

Faire des élèves des *gamers* en maths — Nathalie Braun 40

Se coller aux « Khôlles » — Serge Radeff 44

Ouvertures 51

Dessin en perspective et géométrie dans l'espace — Daniel Lehmann 51

Petite enquête sur. . . — François Boucher 63

Petite enquête sur les compétences en calcul à l'entrée dans le Supérieur — François Boucher 64

Récréations 71

Le théorème des carpettes — Yves Farcy 71

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 77

Au fil du temps 80

Thalès et ses mystères — Pierre Legrand 80

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 88

Matériaux pour une documentation 90

APMEP

www.apmep.fr