

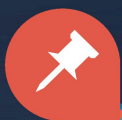
Le bulletin de l'APMEP - N° 538

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2020

Mathématiques à l'oral



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 215

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Décembre 2020

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297



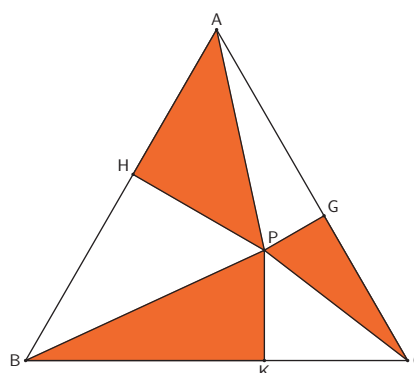
*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
 frederic.deligt2@gmail.com
 ou par courrier à :
 Frédéric de Ligt
 3 rue de la Pierrière
 17270 MONTGUYON*

Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

Frédéric de Ligt

538-1 Partage de pizza (Jean-Pierre Friedelmeyer – Strasbourg)

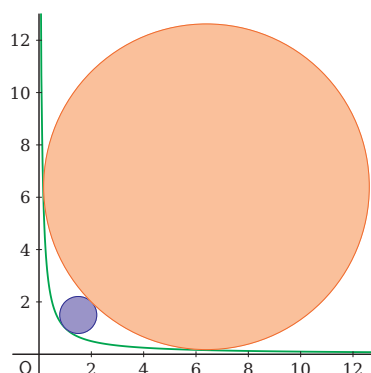
La pizza ABC a la forme d'un triangle équilatéral. Le point P est un point quelconque à l'intérieur. La pizza est découpée par les segments [PA], [PB] et [PC] et les perpendiculaires aux côtés, [PH], [PG] et [PK]. On prend une part sur deux, alternativement. Démontrer l'égalité en aire de la somme des parties en orange et de la somme des parties en blanc. Pour voir d'autres partages équitables de pizzas d'autres formes, n'hésitez pas à aller lire l'article de Jean-Pierre Friedelmeyer dans ce numéro, page 75.



538-2 Sangaku hyperbolique (d'après une idée de Walter Mesnier – Poitiers)

Calculer l'aire des deux disques sachant qu'elle est maximale et que la branche d'hyperbole est d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé.

Ce que l'on voit sur la figure fait office de données. Les cercles sont bien tangents entre eux. Le petit est tangent à la branche d'hyperbole en un seul point et le grand en deux points.

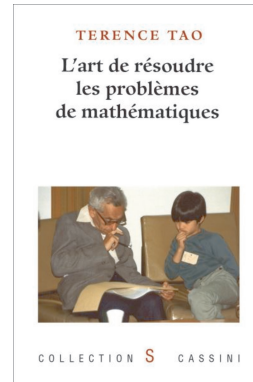




538-3 Somme de puissances (Terence Tao – Los Angeles)

Soit p un nombre premier impair et k un entier naturel non nul et non divisible par $p - 1$. Montrer que :

$1^k + 2^k + 3^k + \dots + (p-1)^k$ est divisible par p .



538-4 Un peu d'algèbre pour finir

Montrer que, si trois nombres x , y et z vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 4 \end{cases}$$

Alors, pour tout entier relatif n , la somme $x^n + y^n + z^n$ est toujours un entier naturel non nul.

À propos des problèmes parus précédemment

Des solutions aux exercices 535-2 et 535-3 apportées par Thomas Blanc (académie d'Aix-Marseille) peuvent être retrouvées sur notre site.

536-1 Une figure sans paroles

Cinq correspondants sont parvenus à faire parler cette figure : Maurice Bauval (Versailles) et Jacques Vieulet (Ibos) partent de la propriété suivante, souvent utilisée seulement dans le sens direct : dans un triangle, une bissectrice partage le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents, et réciproquement une droite issue d'un sommet qui partage le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents est bissectrice. Puis ils achèvent l'exercice en utilisant seulement les propriétés des angles.

Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) propose une solution essentiellement basée sur des calculs de longueurs.

Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), quant à lui, passe par les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C) et des calculs de longueurs. Lucette Lonjaret (Paris), peut-être la doyenne de nos abonnés puisque sa première adhésion remonte aux années 1950, a envoyé une solution qui ne fait intervenir que les angles. Elle fait aussi remarquer que si L est l'intersection de (AB) avec la parallèle à (CK) menée par J, le triangle IJL est équilatéral.



536-3 Peut-être dû à Georges Pólya

Seule Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) est venue à bout de cette question. Elle établit que si l'entier strictement supérieur à 9 est constitué uniquement du chiffre 9 alors on a l'inégalité $P(x) > x^\gamma$ alors que s'il comporte un chiffre différent de 9 dans son écriture décimale l'inégalité s'inverse et on a $P(x) < x^\gamma$. Ce deuxième cas est plus difficile à prouver. Pour cela, Marie-Nicole Gras démontre en deux temps que $P(x)/x^\gamma < P(89 \dots 9)/89 \dots 9^\gamma < 1$.

536-4 Clin d'œil à Robert Desnos

Deux réponses à ce délicat problème d'arithmétique qui parviennent heureusement toutes deux à la même conclusion, à savoir l'inexistence d'un tel triangle. Marie-Nicole Gras ((Le Bourg d'Oisans) part bien sûr des solutions classiques de l'équation diophantienne $b^2 + c^2 = a^2$ et, en travaillant avec trois triangles rectangles de la figure, en vient à considérer l'équation diophantienne $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 0$. Elle s'appuie alors sur un résultat, trouvé dans l'ouvrage de L.J. Mordell, *Diophantine Equations*, qui montre que cette équation n'a que des solutions triviales aboutissant à rendre nul un des côtés du triangle initial. Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) prend le même départ que Marie-Nicole Gras mais travaille ensuite sur des équations en nombres rationnels pour terminer par traiter une équation diophantienne par disjonction de cas et conclure à l'absence de solution modulo 8 dans chacun des cas.

À signaler une réponse décalée de Ludovic Jany (Boquière) qui prouve l'existence d'un triangle ayant les caractéristiques demandées en géométrie non euclidienne.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : [onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES](#).

© APMEP Décembre 2020

*
* *

In memoriam Michel Lafond

Michel LAFOND, bien connu des collègues lecteurs et adhérents de l'APMEP par ses énoncés originaux et ses solutions toujours astucieuses, nous a quittés le 2 septembre 2020, à 73 ans.

Lauréat du Capes 1969 et de l'agrégation interne, il a été nommé au lycée du Castel, où il a fait toute sa carrière.

Je le connais depuis 1982 ; mon épouse, nommée au Castel, me dit alors qu'il y a un collègue « extrêmement astucieux ». Or il se trouve que, chaque année, je donnais à mes élèves de mathématiques spéciales, comme premier problème, le problème de concours général (« vous avez le bac donc vous devez savoir le faire »). Or, parmi les six exercices du concours, il y en avait toujours un qui ne m'inspirait pas : trois jours après, par l'intermédiaire de mon épouse, il me faisait parvenir une solution « géniale ».

C'est lui qui était responsable du Rallye de Bourgogne avec ses énoncés futés.

Une fois à la retraite nous randonnions ensemble et échangeions, crayons et papier à l'appui, des idées que nous confrontions par courriel au retour.

Mais la palette de ses intérêts était beaucoup plus étendue (les concours de go, les mots, les chiffres, les questionnaires amusants pour animer les repas de groupes, les casse-tête, ses objets en bois...). Il a écrit plusieurs articles dans le Bulletin Vert.

Tristesse supplémentaire : son fils Philippe est décédé d'un arrêt cardiaque le matin de l'enterrement de Michel.

Georges Vidiani



Sommaire du n° 538



Mathématiques à l'oral

Éditorial

Opinions

Entrée dans le supérieur en septembre 2021 : que sait-on ? — Alice Ernoult, pour la commission « Enseignement supérieur »

★ La verbalisation en classe de mathématiques : mission impossible ? — Thierry Dias

Avec les élèves

★ Des murs pédagogiques pour travailler l'oral en classe — Luca Agostino

★ Loyd vs Dudeney — Emmanuelle Pernot & Fatih Pinar

Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré — Bernard Parzysz

★ Quel oral pour un élève porteur d'une déficience visuelle ? — Nathalie Schalk

★ Démontrer en vidéo — Christophe Hache & Étienne Quinchon

1 Ouvertures

51

3 Partage d'un secret — Fabien Herbaut & Pascal Véron

51

★ Mathématiques contées — Marie Lhuissier

59

3 Mathématiques et systèmes de retraite — Pierre Carriquiry

66

17 Récréations

75

Géométrie des pizzas — Jean-Pierre Friedelmeyer

75

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt

81

Au fil du temps

84

Matériaux pour une documentation

84

La « méthode des coordonnées » de Descartes — Martine Bühler

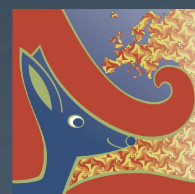
90

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau

94



CultureMATH



APMEP
www.apmep.fr