Le bulletin de l'APMEP - N° 538

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2020

Mathématiques à l'oral

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV nº 215

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT.*

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Lise MALRIEU.*

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY.*

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.*

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.*

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.*

Maquette : *Olivier REBOUX.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths.*
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2020
Impression : Imprimerie Corlet.
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

AU FIL DES MATHS

APMEP

Géométrie des pizzas

Peut-on partager équitablement une pizza circulaire entre deux personnes par des sections rectilignes dont aucune ne passe par le centre ? L'article donne des solutions à cette question a priori *étonnante, et diverses démonstrations de tous niveaux, depuis le collège jusqu'aux post bac. Une version approfondie est proposée en version numérique.*

Jean-Pierre Friedelmeyer

En mai 1967 la revue *Mathematics Magazine*, publiée par la *Mathematical Association of America* posait le problème suivant : **peut-on partager la surface d'un disque en deux parties égales en aire par des droites dont aucune ne passe par le centre du disque ?** Dans la littérature mathématique, on parle du théorème des pizzas, en donnant un habillage concret au problème sous la forme : **peut-on partager équitablement une pizza circulaire entre deux personnes par des sections rectilignes dont aucune ne passe par le centre ?**

Cela paraît à première vue impossible mais comme souvent ce problème suscita au fil des années de nombreuses solutions, plus ou moins simples, et des généralisations variées. En particulier une réponse positive fut donnée sous la forme suivante :

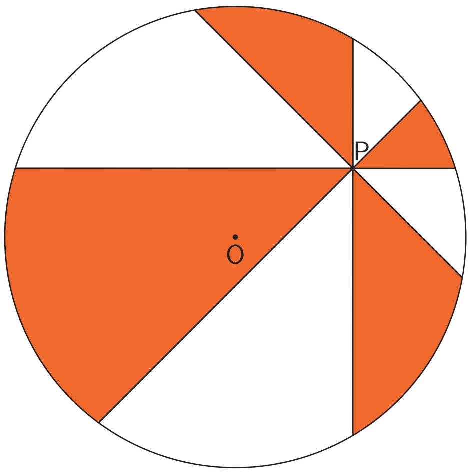


Figure 1. *Partage d'une pizza.*

> Par un point P quelconque à l'intérieur du cercle, tracer deux droites perpendiculaires et leurs bissectrices. Alors, en prenant alternativement une part sur deux des huit parts ainsi obtenues, on partage effectivement la pizza en deux parties dont les sommes des aires sont égales (figure 1).

Ainsi, à partir d'une situation de la vie courante, ce problème donne l'opportunité d'une réflexion géométrique allant de questions élémentaires jusqu'aux plus élaborées de la géométrie euclidienne.

Nous nous proposons dans ce qui suit de dégager quelques résultats accessibles en classe de lycée pour la plupart, voire de collège pour certains, et donnant lieu à diverses activités géométriques.

Commençons par des pizzas rectangulaires en étudiant les découpes de rectangles et de carrés.

Dans ses *Éléments*, Euclide démontre le théorème suivant (Livre I, proposition 43) :

Théorème

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux.

Euclide entend par compléments (figure 2) les parallélogrammes PICF et PHAG qui sont de part et d'autre de la diagonale [BD], P étant sur la diagonale ; et par égaux, l'égalité des aires.

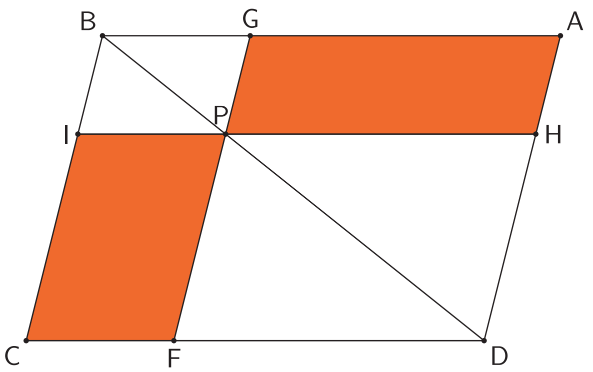


Figure 2. *Théorème d'Euclide.*

Le théorème s'applique évidemment au cas où le parallélogramme est un rectangle (figure 3) et se démontre sans difficulté.

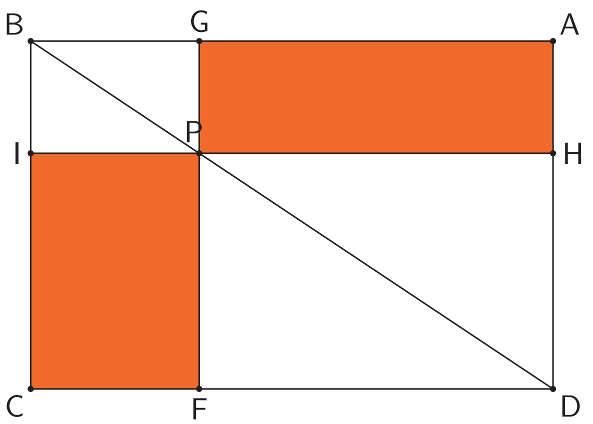


Figure 3. *Théorème d'Euclide dans le cas d'un rectangle.*

Encore plus particulièrement, il s'applique au carré (figure 4), l'égalité découlant alors d'une isométrie des deux rectangles.

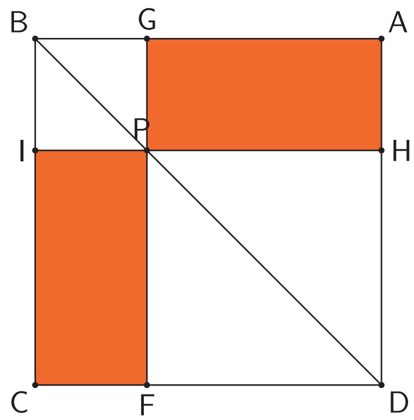


Figure 4. *Théorème d'Euclide dans le cas d'un carré.*

Ajoutons maintenant le segment [EJ], passant par P et perpendiculaire à la diagonale [BD]. Nous obtenons huit pièces d'aires notées de a à h (triangles et quadrilatères, figure 5), qui ont la propriété remarquable et assez évidente que, regroupées alternativement, la somme de leurs aires respectives (total des pièces en orange et total des pièces en blanc) soient égales : $a+c+e+g = b+d+f+h$. Le fait que P soit sur une diagonale joue un rôle essentiel pour cette égalité car la diagonale faisant axe de symétrie échange parties orange et parties blanches.

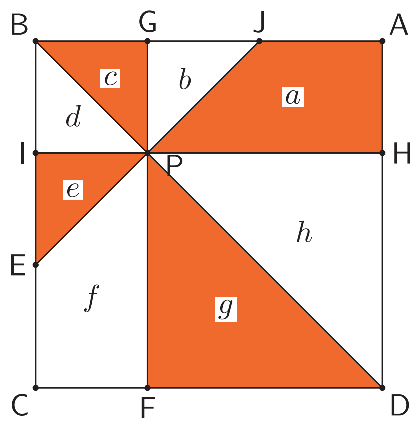


Figure 5. *Partage égalitaire dans le cas d'un carré (P sur la diagonale).*

Mais que se passe-t-il si le point P n'est plus sur l'une des diagonales, mais n'importe où à l'intérieur du carré (figure 6) ?

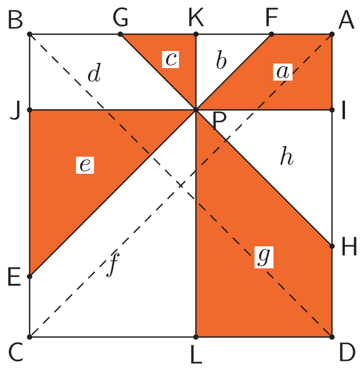


Figure 6. *Partage égalitaire dans le cas d'un carré (P quelconque).*

Eh bien, de façon remarquable, nous avons toujours la même égalité : $a+c+e+g = b+d+f+h$.

C'est un peu moins évident ; on peut essayer de le démontrer analytiquement en prenant un repère orthonormé $(\mathrm{C}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})$. C'est lourd et fastidieux. Il est plus simple et élégant d'utiliser une équidécomposabilité (partage en morceaux superposables) où, à chaque pièce en orange, notée par une minuscule, correspond une pièce en blanc notée par la même minuscule mais apostrophée (figure 7). La plupart des correspondances se font par simple symétrie axiale : $a \longleftrightarrow a'$, $b \longleftrightarrow b'$, $c \longleftrightarrow c'$, $e \longleftrightarrow e'$, $f \longleftrightarrow f'$; d et d' se correspondent par symétrie centrale.

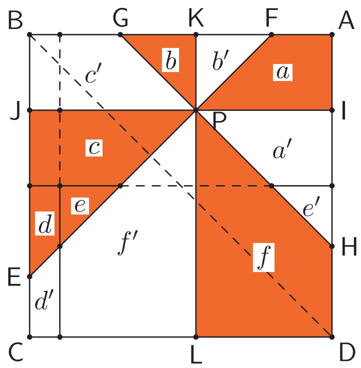


Figure 7. *Équidécomposabilité.*

Il existe de nombreuses autres décompositions en pièces superposables ; elles peuvent être l'occasion d'une émulation en classe.

Remplaçons maintenant le carré par un cercle et passons à des pizzas circulaires ; nous arrivons au théorème des pizzas.

Théorème des pizzas

Considérons un cercle découpé en huit morceaux a, b, c, d, e, f, g, h par des cordes [A′B′], [C′D′], [E′F′] et [G′H′], toutes passant par un même point P arbitraire à l'intérieur du cercle, et faisant entre elles des angles de 45° (figure 8). Alors la somme des aires des secteurs en orange est égale à la somme des aires des secteurs en blanc.

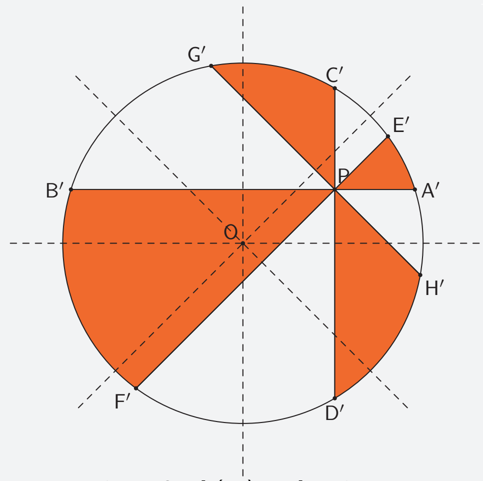


Figure 8. *Théorème des pizzas.*

Pour le démontrer on peut s'inspirer de la méthode utilisée pour le carré (figures 6 et 7) en inscrivant un carré ABCD dans le cercle, dont les côtés sont parallèles aux cordes [A′B′] et [C′D′], (figure 9). Les axes de symétrie du carré sont aussi des axes de symétrie du cercle. Si le point P, intersection des cordes, est à l'intérieur du carré, alors, par des symétries convenables, on peut associer à une partie en orange à l'extérieur du carré (notée par une minuscule a, b, c, etc.) une partie en orange clair à l'extérieur du carré (notée par la même minuscule apostrophée (a', b', c', etc.). Combinée avec les décompositions des parties du carré (figure 7) nous obtenons finalement l'égalité en aire de l'ensemble des parts en orange ou bleu dans le disque à l'ensemble des parts en blanc ou orange clair. Nous laissons au lecteur la question de la décomposition dans le cas où le point P est à l'intérieur du cercle mais à l'extérieur du carré.

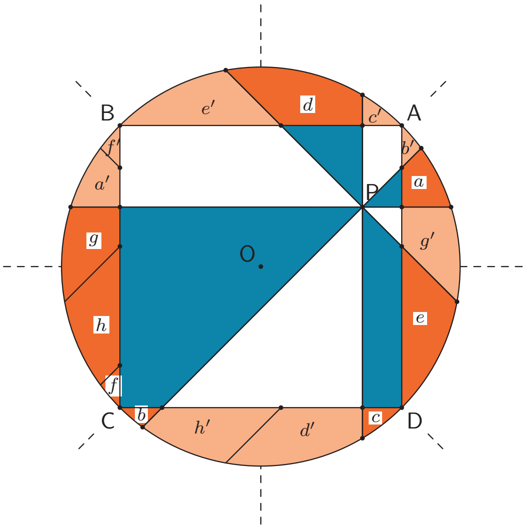


Figure 9. *Démonstration du théorème des pizzas.*

En 1994, Carter I. et Wagon S. donnent une autre décomposition démontrant le théorème des pizzas sous l'intitulé « *Proof without words* »,(preuve sans mots), selon la figure 10. On y vérifie le théorème des pizzas en ce que $a+c+h+g+B+E+f+D=b+d+A+G+H+F+C+e$ où chaque désignation par une lettre minuscule d'un côté a son correspondant par la même lettre majuscule de l'autre. Les parties correspondantes sont obtenues par symétrie ou par rotation.

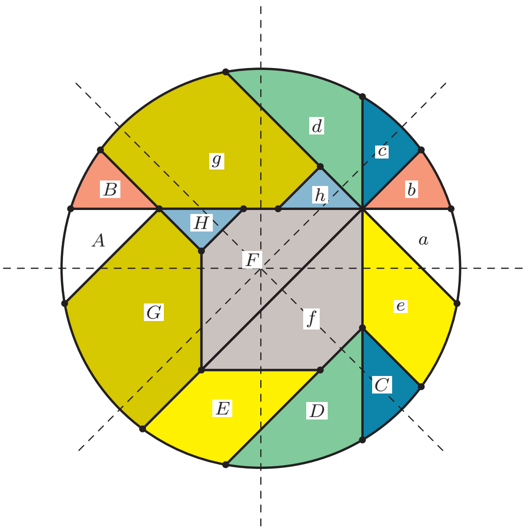


Figure 10. Preuve sans mots *du théorème des pizzas.*

Exercice

La pizza ABC a la forme d'un triangle équilatéral. Le point P est un point quelconque à l'intérieur. La pizza est découpée par les segments [PA], [PB] et [PC] et les perpendiculaires aux côtés, [PH], [PG] et [PK]. On prend alternativement une part sur deux. Démontrer l'égalité en aire de la somme des parties en orange et de la somme des parties en blanc.

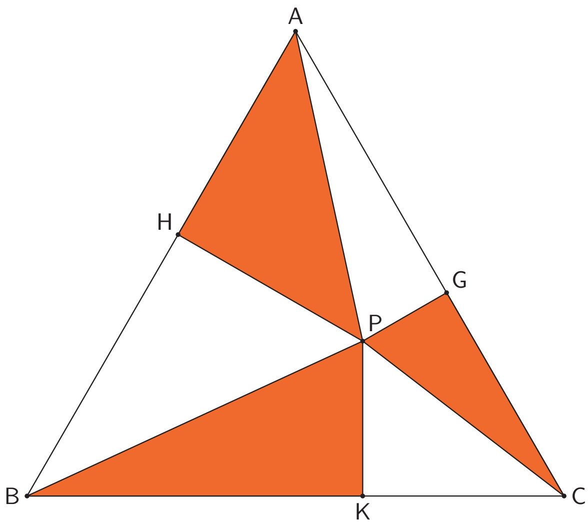


Figure 11. *Cas d'une pizza triangulaire.*

Cet exercice est proposé dans la rubrique *Au fil des problèmes* de ce numéro (page 81). Les solutions proposées par les lecteurs seront éditées en ligne dans un prochain numéro.

La version numérique donne les méthodes permettant une démonstration plus rigoureuse du théorème des pizzas. Nous donnons ici juste un aperçu de ces méthodes grâce à un théorème très élémentaire : le théorème de Nelsen.

Théorème de Nelsen

Soit [AB] et [CD] deux cordes perpendiculaires sécantes en un point P à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon R. Alors $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2=4R^2$

R. B. Nelsen en donne une démonstration, très élégante, une démonstration « *sans mots* » (figure 12).

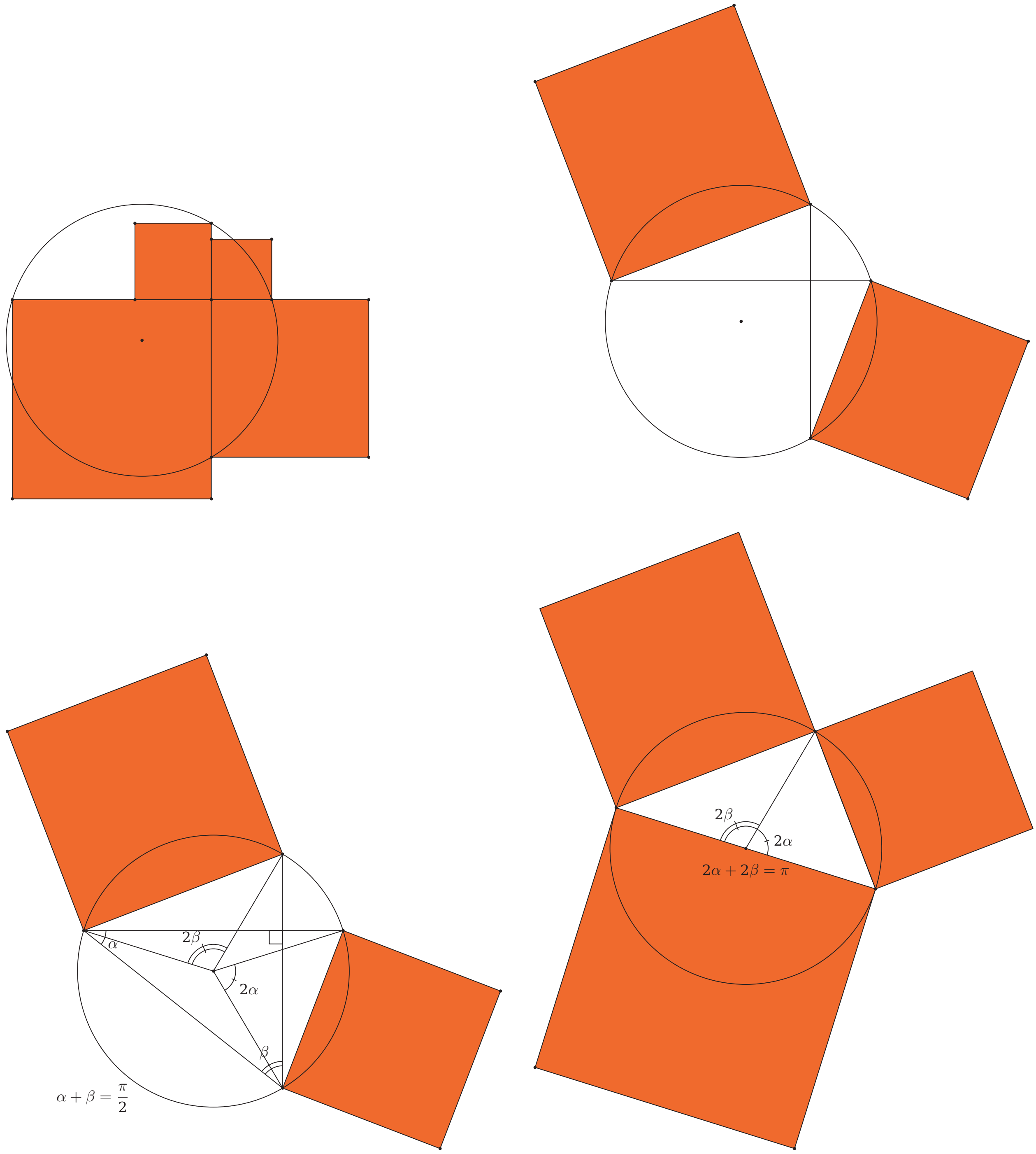


Figure 12. *Démonstration* « sans mots » *du théorème de Nelsen.*

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème des pizzas.

Lorsque le rayon vecteur $r(\theta) = a(\theta)$ décrit le secteur A′PE′ :

- le rayon vecteur $r\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = c(\theta)$ perpendiculaire à $a(\theta)$ décrit le secteur C′PG′ ;
- le rayon vecteur $r(\theta+\pi) = b(\theta)$ opposé à $a(\theta)$ décrit le secteur B′PF′ ;
- le rayon vecteur $r\left(\theta+3\dfrac{\pi}{2}\right) = d(\theta)$ perpendiculaire à $a(\theta)$ et opposé à $c(\theta)$ décrit le secteur D′PH′ (figure 13).

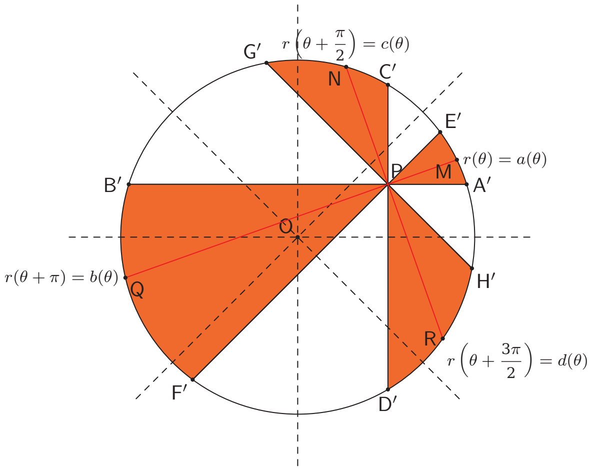


Figure 13. *Démonstration du théorème des pizzas.*

La somme $\mathscr{S}$ des quatre aires en orange est alors donnée, en appliquant le théorème de Nelsen, par :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a^2(\theta)+b^2(\theta)+c^2(\theta)+d^2(\theta)\right]\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(4\mathrm{OA}^2)\\ &= \frac{1}{2}(\text{aire totale du cercle}).\end{aligned}$$

Et pour conclure

Si nous passions à la dimension trois, quel est le volume d'une pizza de rayon z et de hauteur a ?

Si on considère que la pizza est un cylindre de hauteur a et de base circulaire de rayon z alors le volume du cylindre est $\pi z^2 a$ ou encore :

$$Pi\ z\ z\ a$$

Références

[1] L. Carter et S. Wagon. « Proof without words : Fair Allocation of a Pizza ». In : *Mathematics Magazine* Vol. 67. N° 4 (1994), p. 267.

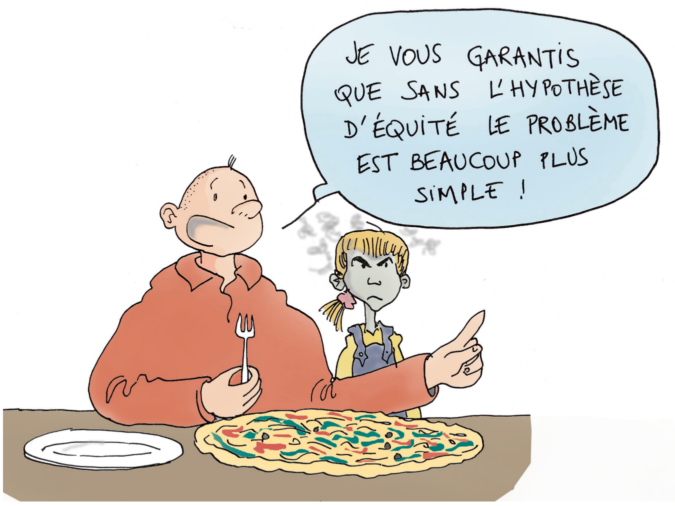
[2] P. Gallin. « Exzentrische Kuchenhalbierung ». In : *Bulletin des VSMP (Verein Schweizerischer Mathematik - und Physiklehrkräfte)* n° 116 (juin 2011). En ligne : , pp. 11-19.

[3] H. Humenberger. « Gerechte Pizzateilung - keine leichte Aufgabe ! » In : *Mathematische Semesterberichte* Vol. 62. N° 2 (octobre 2015). Springer, pp. 173-194.

[4] R. B. Nelsen. « Proof without words : four squares with constant area ». In : *Mathematics Magazine* Vol. 77 (2004), p. 135.

Jean-Pierre Friedelmeyer est membre de la régionale APMEP de Strasbourg où il a enseigné les mathématiques. Il est membre fondateur du groupe *Histoire des mathématiques* de l'IREM de Strasbourg et a beaucoup contribué au groupe *Histoire des mathématiques* de l'APMEP.

jpfriede@free.fr



Sommaire du nº 538

Mathématiques à l'oral

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr