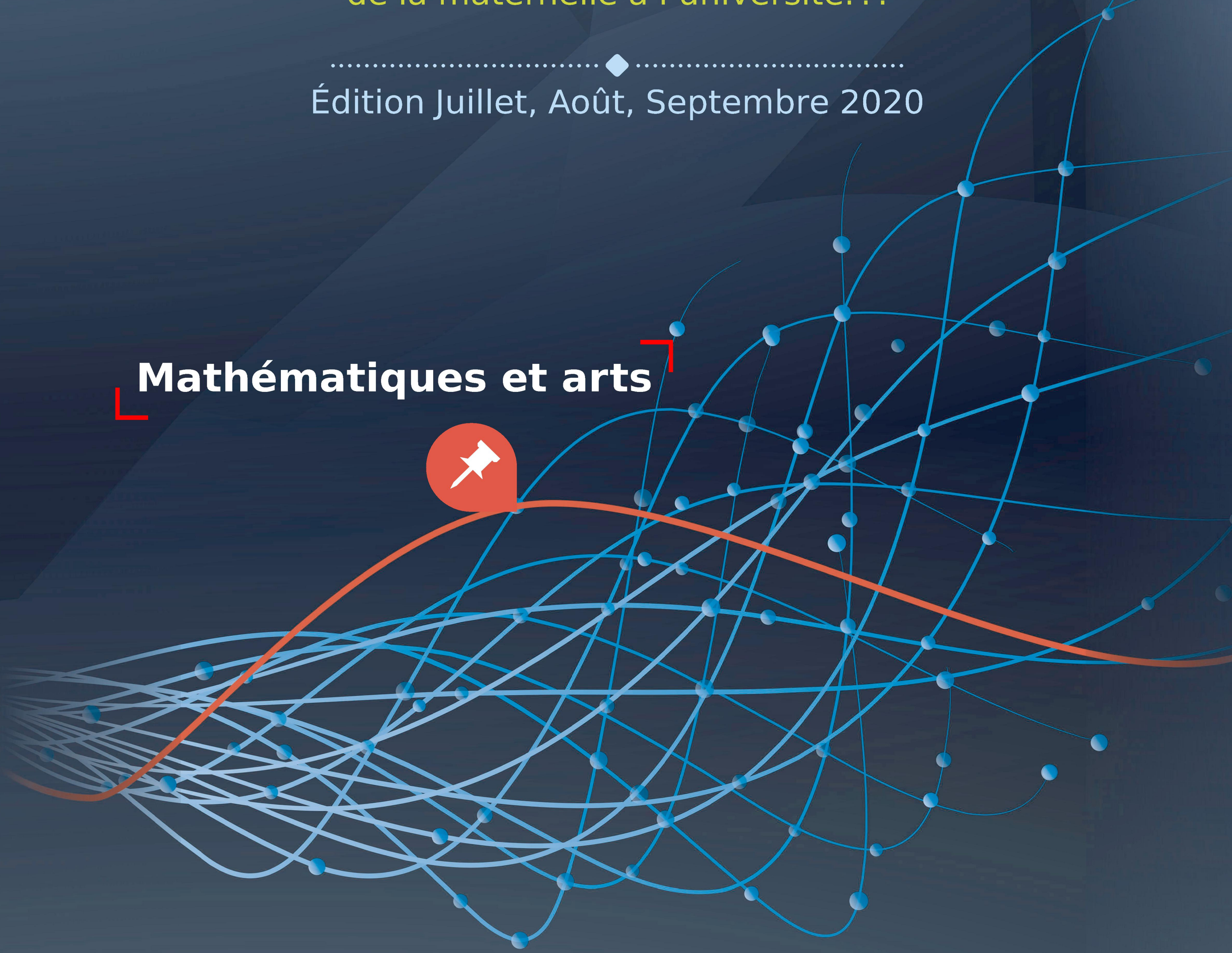
Le bulletin de l'APMEP - N° 537

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Juillet, Août, Septembre 2020

Mathématiques et arts



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2020-2021 de l'APMEP.

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

APMEP

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Septembre 2020. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Les énigmes de Luca Pacioli

Il peut arriver que certains ouvrages anciens fassent découvrir des problèmes intéressants et divertissants à ceux qui aiment chercher. Dans un recueil de Luca Pacioli, Pierre Legrand a déniché quelques problèmes très variés à découvrir !

Pierre Legrand

On a souvent écrit que les *Problèmes plaisants et délectables* [1] de Claude Gaspar Bachet, dont la première édition est de 1612, constituent le premier livre de quelque ampleur consacré aux récréations mathématiques. L'affirmation est exacte si l'on parle d'ouvrages imprimés, mais il existe un imposant manuscrit, nettement antérieur et longtemps oublié, dont les deux premiers tiers constituent un recueil de problèmes récréatifs. Son auteur est Luca Pacioli.

Le personnage

Le portrait ci-contre, qui aurait été peint en 1495 par Jacopo de Barbari, serait selon l'historien des sciences Carl Boyer la première représentation authentique d'un mathématicien. Il représente le franciscain italien Luca Pacioli (1447–1517), qui est célèbre à plus d'un titre.

Sa *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494), qui résumait les connaissances mathématiques de son temps et proposait des notations nouvelles, eut une influence décisive sur l'évolution du calcul algébrique.

On lui doit aussi le fameux *De divina proportione*[1], illustré d'une soixantaine de gravures faites d'après les dessins de son ami Léonard de Vinci, à qui il enseigna les mathématiques. Et son *Tractatus de computis et scripturis*[2] est l'ouvrage fondateur de la comptabilité en partie double.

Une étrange histoire

À une date située entre 1496 et 1508, donc au moins une dizaine d'années avant sa mort, Luca Pacioli écrivit un ouvrage d'un peu plus de six cents pages, le *De viribus quantitatis*[3], qui resta au stade du manuscrit.

1. La « *divine proportion* » est le nombre d'or.
2. *Traité des calculs et des écritures.*
3. *Des pouvoirs de la quantité.*

On ignore pourquoi ce texte, précédé d'une longue dédicace, donc destiné à la publication, a été laissé sous le coude par son auteur, puis oublié pendant plus de quatre siècles. On sait seulement qu'il fut retrouvé en 1924 sur les rayons de l'université de Bologne par un historien des sciences, Amedeo Agostini, et qu'avant d'atterrir dans la bibliothèque de l'université, il avait appartenu à un chanoine bibliophile, Giovanni Giacomo Amadei, mort en 1768.

Agostini consacra au document retrouvé un long article [2] fort bien fait… qui resta sans lendemain. Il fallut attendre 1997 pour que l'on se préoccupe à nouveau du manuscrit. Mais cette fois le redécouvreur était un Américain [4], David Singmaster, connu entre autres par ses deux livres sur le *Rubik's Cube*. Il s'employa activement à diffuser sa trouvaille. Une traduction anglaise parut en 2007 et un fac-similé du manuscrit en 2009.

Du coup les Italiens s'y intéressèrent enfin pour de bon : en 2011 parut dans une édition à l'intention du grand public l'ouvrage [3] dont la couverture est reproduite ci-contre [5].

Le manuscrit

En dépit de son titre latin, l'ouvrage est écrit en italien. Le texte est en trois parties : la première traite de 81 énigmes arithmétiques, la seconde de 80 problèmes géométriques suivis de 54 problèmes de mécanique, la troisième est un bizarre pot-pourri dont je parlerai plus loin.

Pacioli et Bachet

Agostini affirme que « *presque tous les problèmes de Bachet trouvent leur pendant dans le manuscrit de Pacioli* ». Le « presque tous » (*quasi tutti*) semble résulter d'un léger excès de ferveur patriotique : il s'agirait plutôt d'un gros tiers, ce qui n'est déjà pas si mal.

Il est donc raisonnable de se demander si Bachet avait lu le *De viribus quantitatis*. Il y a de sérieuses raisons de penser que non. Tout d'abord, ce texte n'a jamais été imprimé avant 2007 et sa diffusion, si diffusion il y a eu, n'a pu être que confidentielle. Ensuite, Bachet (qui, par parenthèse, maîtrisait parfaitement l'italien) n'hésitait pas à se référer notamment à Tartaglia (1499–1557) et Cardan (1501–1576),

4. Le lecteur malveillant peut rapprocher cette histoire de celle de l'astronome turc que raconte Saint-Exupéry. En 1909, lors d'un congrès, le savant avait annoncé la découverte de la planète du Petit Prince. Mais il était en costume national et personne ne l'avait pris au sérieux. Il refit la même communication en 1920, cette fois en complet-veston, et ce fut un triomphe.

5. Amusant (mais pas toujours de lecture facile) et bien fait. *Peccato che questo libro sia scritto in italiano !*

quitte à leur rendre un hommage parfois acidulé. On ne voit pas pourquoi il n'aurait pas agi de même avec Pacioli.

Bachet n'a d'ailleurs jamais fait mystère de ses sources, comme le montre la mention faite sur la page de titre de son livre : « *partie recueillis de divers auteurs, partie inventés de nouveau*[6] *avec leur démonstration* ». L'originalité de son travail était moins dans le choix des problèmes que dans son souci d'étudier leurs variantes ou leur généralisation et surtout de donner à leur solution un support mathématique irréprochable.

Des sources communes

Selon toute vraisemblance Pacioli, Tartaglia, Bachet et leurs successeurs ont puisé dans un fonds commun transmis de génération en génération, parfois depuis l'Antiquité, fonds qu'ils ont au fur et à mesure enrichi. Le *De viribus quantitatis* contient d'ailleurs un certain nombre d'exercices figurant déjà chez Fibonacci (*Liber Abaci*, 1202) ou même chez Alcuin [4] (*Propositiones ad acuendos juvenes*, vers 800).

Delle forze naturali cioé de Arithmetica[7]

Ces énigmes arithmétiques sont transcrites ici selon les notations algébriques actuelles car dans leur texte originel elles sont fort difficiles à lire. Il faut en effet se rappeler que l'algèbre de l'époque était « rhétorique » (autrement dit : pas de formules, mais des phrases, voir [5]), que la représentation d'une inconnue par une lettre et les symboles usuels restaient à inventer... et que Pacioli fut un des tout premiers à créer un embryon de formalisation.

L'intérêt de ces problèmes, dont la numérotation suit celle de l'auteur, est pour nous très variable. Les numéros 11 à 21, par exemple, reposent sur des égalités algébriques souvent simplettes. Voici le numéro 11 :

Problème nº 11

1. Le cobaye choisit un nombre que le meneur de jeu devra deviner.
2. Le cobaye le partage en deux parties qu'il n'indique pas : $x = y + z$.
3. Il calcule de tête y^2, puis z^2, puis $2yz$.
4. Il annonce leur somme.

Le meneur de jeu n'a plus qu'à en extraire la racine pour avoir le résultat.

Nous sommes tentés d'y voir un usage trivial de l'égalité $(y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2$. Mais essayez pour voir de faire une formulation purement rhétorique de ce problème !
Voici d'abord quelques énoncés peu connus.

Problème nº 1

Le meneur de jeu donne à ses deux cobayes n pièces de monnaie ($n > 2$) et leur demande de se les répartir à leur guise, chacun prenant au moins une pièce. Puis il met sur la table $n(n+1)$ pièces et s'en va en demandant au premier de retirer du tas le double du nombre de pièces qu'il avait choisies, et au second de retirer du tas n fois le nombre de pièces qu'il avait choisies. Il revient, compte le tas restant (r pièces) et annonce combien de pièces chacun avait pris.

6. Le « *de nouveau* » n'a pas ici le sens d'une répétition ; il marque au contraire qu'il s'agit d'une nouveauté véritable.
7. *Des forces naturelles c'est-à-dire de l'Arithmétique*. En italien moderne, *aritmetica* s'écrit sans h et *cioè* avec un accent grave.

- Si le premier cobaye a pris a pièces et le second en a pris b, le meneur de jeu doit donc calculer a et b connaissant $n = a + b$ et $r = n(n+1) - 2a - nb$. On a donc deux équations à deux inconnues, ce qui pour nous règle le problème : $\begin{cases} a+b & = & n \\ 2a+nb & = & n(n+1)-r \end{cases}$ En multipliant la première équation par n et en soustrayant la seconde au résultat, il vient : $(n-2)a = r - n$, soit $a = \dfrac{r-n}{n-2}$ et $b = n - a$.
- Pacioli ne dispose pas du calcul algébrique, mais il a une méthode ingénieuse ; il en indique l'idée générale et détaille le cas $n = 10$ pour ($a = 3$, $b = 7$) et ($a = 7$, $b = 3$). Voici, avec des notations modernes, comment il procède.

  De $r = n(n+1) - 2a - nb$, il tire $r = (a+b)(n+1) - 2a - nb$, puis $r = (n-1)a + b$ d'où $\boxed{\dfrac{r}{n-1} = a + \dfrac{b}{n-1}}$.

  Si $\dfrac{r}{n-1}$ n'est pas entier, comme $1 \leqslant b \leqslant n-1$, on a $a = \left[\dfrac{r}{n-1}\right]$, en désignant par $[x]$ la partie entière de x.

  Si $\dfrac{r}{n-1}$ est entier, $\dfrac{b}{n-1}$ l'est aussi et, comme $1 \leqslant b \leqslant n-1$, on a $b = n-1$ et $a = 1$.

Remarque : les problèmes n° 2 à n° 6 sont du même genre, à ceci près qu'au lieu de partager un total en deux, on le partage en trois, quatre ou même cinq parts.

Problème n° 9

On demande au cobaye d'effectuer les opérations suivantes :

1. penser un nombre (entier) ;
2. lui ajouter sa moitié et dire si le résultat est entier ;
3. s'il ne l'est pas, l'arrondir à la hauteur inférieure ;
4. ajouter au nombre ainsi obtenu sa moitié et dire si le résultat est entier ;
5. s'il ne l'est pas, l'arrondir à la hauteur inférieure ;
6. diviser ce nouveau résultat par 9, annoncer le quotient (au sens de la division euclidienne).

Le meneur de jeu devine alors le nombre choisi.

Comme le cobaye doit diviser à deux reprises par 2, on peut subodorer que la valeur modulo 4 du nombre x choisi joue un rôle important. Posons $x = 4a + b$, b valant 0, 1, 2 ou 3. En désignant par $[u]$ la partie entière de u, autrement dit l'entier v tel que $v \leqslant u < v + 1$, on obtient le tableau suivant :

x	$\dfrac{3x}{2}$		$\left[\dfrac{3x}{2}\right]$	$\dfrac{3}{2}\left[\dfrac{3x}{2}\right]$		$\left[\dfrac{3}{2}\left[\dfrac{3x}{2}\right]\right]$	$\left[\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{3}{2}\left[\dfrac{3x}{2}\right]\right]\right]$
$4a$	$6a$	entier	$6a$	$9a$	entier	$9a$	a
$4a+1$	$6a+\dfrac{3}{2}$	non entier	$6a+1$	$9a+\dfrac{3}{2}$	non entier	$9a+1$	a
$4a+2$	$6a+3$	entier	$6a+3$	$9a+\dfrac{9}{2}$	non entier	$9a+4$	a
$4a+3$	$6a+\dfrac{9}{2}$	non entier	$6a+4$	$9a+6$	entier	$9a+6$	a

On voit sur le tableau que le résultat final du processus est le quotient de la division euclidienne de x par 4, soit $\left[\dfrac{x}{4}\right]$, partie entière de $\dfrac{x}{4}$.

Pour avoir x, on multiplie le résultat par 4 et on lui ajoute :

0 si les réponses ont été *entier-entier* ;

1 si les réponses ont été *non entier-non entier* ;

2 si les réponses ont été *entier-non entier* ;

3 si les réponses ont été *non entier-entier*.

Là encore Pacioli ne donne pas de formule générale, mais les idées directrices et des exemples.

Remarque : ce problème figure déjà chez Fibonacci ; on le retrouve ensuite chez Bachet, qui donne des variantes et une démonstration détaillée.

Les problèmes n° 7 et n° 10 en sont proches.

Problème n° 22 : *« a trovare un numero pensato non più de 105 »*

1. Le cobaye choisit un entier strictement positif x ($x \leqslant 105$) que le meneur de jeu devra deviner.
2. Le cobaye annonce successivement les restes r, s et t de la division de x par 3, 5 et 7.

Le meneur de jeu peut alors trouver x.

Si les trois restes sont nuls, $x = 105$. Sinon est x est le reste de la division de $z = 70r + 21s + 15t$ par 105.

C'est un cas particulier du problème des « restes chinois ». Si x est divisible par 3, 5 et 7, il est divisible par leur produit, 105, donc $x = 105$. On écarte désormais ce cas.

On vérifie aussitôt que 3 divise $z - r$; il divise $x - r$ d'après la définition même de r, donc aussi $z - x$. On montre de la même façon que 5 et 7 divisent $z - x$. Ainsi $z - x$ est divisible par 3, 5 et 7, donc par leur produit 105 et, comme x est strictement inférieur à 105, x est le reste de la division de z par 105.

Problème n° 32, première partie

Trouver deux entiers dont le produit ait pour écriture décimale $111\ldots 11$.

- Prenons d'abord un cas simple : $1\,111 = 1\,100 + 11 = 11 \times 101$.
- De même : $111\,111 = 111\,000 + 111 = 111 \times 1\,001$; mais on peut aussi écrire selon le même principe : $111\,111 = 110\,000 + 1\,100 + 11$, donc $111\,111 = 11 \times 10\,101$.
- Dans le cas d'une liste de douze 1, on peut couper cette liste en tranches de taille égale de quatre façons : tranches de longueur 2, 3, 4 ou 6. Cela donne quatre décompositions en produit de deux facteurs, par exemple $111\,100\,000\,000 + 11\,110\,000 + 1\,111$, qui donne la décomposition :

$$111\,111\,111\,111 = 1\,111 \times 100\,010\,001.$$

- Plus généralement, si l'écriture est de longueur non première $n = pq$, le nombre $111\ldots 11$ est non premier : il suffit de grouper les 1 en p paquets de longueur q pour en tirer une décomposition en deux facteurs.
  Par exemple : $111\,111\,111 = 111\,000\,000 + 111\,000 + 111 = 111 \times 1\,001\,001$.

Signalons que si n est premier, le nombre ne l'est pas forcément : le plus petit n pour lequel $111\ldots 11$ est premier est 17.

Pacioli se limite à deux exemples, dont il exhibe sans trop s'expliquer deux décompositions en produit, différentes de celles que nous avons trouvées :

$$111\,111 = 777 \times 143 \quad \text{et} \quad 111\,111\,111\,111 = 900\,991 \times 123\,321.$$

Problème n° 32, seconde partie

Trouver deux entiers dont le produit ait pour écriture décimale 10 101 010 101.

Pacioli se contente d'indiquer que 10 101 010 101 est divisible par 900 991, sans qu'on sache d'où sort le résultat. Commençons par une situation plus simple :

$$1\,010\,101 = 1\,010\,000 + 101 = 101 \times 10\,001.$$

Dans le cas étudié par Pacioli, on peut écrire :

$$10\,101\,010\,101 = 10\,101\,000\,000 + 10\,101 = 10\,101 \times 1000001.$$

Le lecteur pourra aisément vérifier que le raisonnement s'étend au cas où l'écriture du nombre comporte un nombre pair de « 1 ».

Problème n° 35

Le meneur de jeu distribue à ses trois cobayes A, B et C respectivement 12, 24 et 36 jetons. Il leur tourne le dos pendant que chacun des trois prend l'un des trois objets X, Y et Z qui sont sur la table. Puis, toujours le dos tourné, il demande aux détenteurs des objets X, Y et Z de mettre sur la table respectivement la moitié, le tiers et le quart de leurs jetons, et d'en faire un seul tas. Il se retourne alors, compte les jetons déposés et en déduit qui a chaque objet.

Si on appelle $12x$, $12y$, $12z$ respectivement les nombres de jetons donnés aux détenteurs des objets X, Y et Z, le meneur de jeu trouve sur la table $6x + 4y + 3z$ jetons. Il lui suffit alors d'avoir mémorisé le tableau ci-dessous.

(X, Y, Z)	(A, B, C)	(A, C, B)	(B, A, C)	(B, C, A)	(C, A, B)	(C, B, A)
(x, y, z)	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 1, 3)$	$(2, 3, 1)$	$(3, 1, 2)$	$(3, 2, 1)$
$6x + 4y + 3z$	23	24	25	27	28	29

Lecture du tableau : si par exemple 27 jetons se trouvent sur la table, alors l'objet X était à B, Y était à C et Z à A.

Quelques problèmes célèbres

Les problèmes 49 à 52 sont des variantes des « *Trois voyages du chameau* » d'Alcuin [6].

Les problèmes 53 et 55 portent sur l'énigme des « Trois vases » [1], qu'on trouve ensuite chez Tartaglia, Cardan, Bachet et quantité d'auteurs jusqu'à notre époque.

Le problème 61 est celui des « Trois maris jaloux », déjà présent chez Alcuin [4] et Chuquet. Il a été repris jusqu'à nos jours avec des variantes par la plupart des traités de récréations mathématiques.

Della forza et virtu lineale et geometrica[8]

Cette seconde partie du manuscrit a suscité un intérêt nettement moindre que la première. Agostini n'en parle pas, non plus que le livre italien récent que nous avons mentionné. On le comprend dans une large mesure, car beaucoup des problèmes traités sont des paraphrases de propositions figurant dans les *Éléments* d'Euclide. Elle a pourtant un certain intérêt, comme le montrent les exemples ci-après.

8. En italien moderne : *Della forza e virtù lineare e geometrica.*

Problème n° 21

Construction approchée d'un heptagone régulier.

Pacioli donne deux approximations du côté α d'un heptagone régulier inscrit dans un cercle :

- la distance du centre aux côtés d'un hexagone régulier inscrit ;
- la moitié de la longueur des côtés d'un triangle équilatéral inscrit.

Le lecteur vérifiera aisément que l'une et l'autre sont égales à $R\frac{\sqrt{3}}{2}$ où R est le rayon du cercle. La valeur exacte de α est $2R\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Or $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \approx 0{,}867\,77$ alors que $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866\,03$. L'approximation est donc par défaut et fort bonne (environ 0,2 % d'erreur relative).

Problèmes 52 à 58

Construire avec la règle et le compas un carré de même aire qu'un polygone donné.

Résumons la démarche en zigzag suivie par l'auteur :

1. construire un rectangle de même aire qu'un triangle donné (figure 1) ;
2. construire un carré de même aire qu'un rectangle donné (figure 2) ;
3. construire un carré dont l'aire soit la somme des aires de deux carrés donnés (figure 3) ;
4. décomposer le polygone en triangles, effectuer pour chacun d'eux les étapes 1 et 2, puis itérer l'étape 3.

L'étape 1 est évidente sur la figure 1 ci-contre.

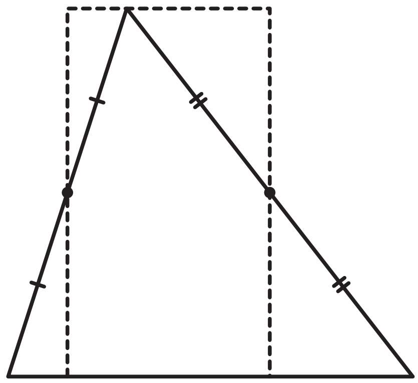


Figure 1

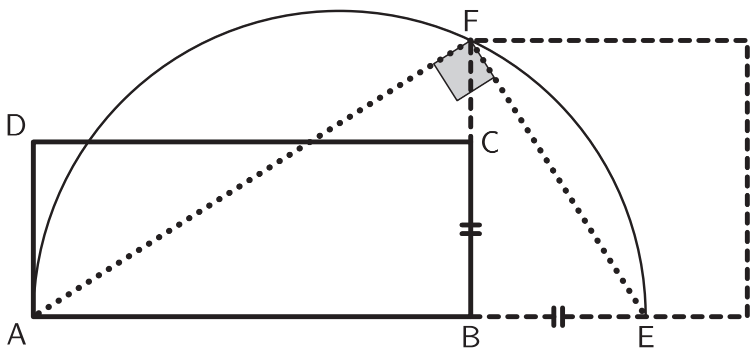


Figure 2

La construction de l'étape 2 se fait comme suit : avec les notations de la figure 2, on prolonge le côté [AB] du rectangle d'une longueur BE égale à BC, puis on trace un demi-cercle de diamètre [AE], qui coupe en F la perpendiculaire issue de B à (AB). La relation classique [9] $\text{BF}^2 = \text{AB} \times \text{BE}$ dans le triangle rectangle EAF montre que l'aire d'un carré construit sur [BF] est égale à celle du rectangle initial.

9. Elle se déduit immédiatement de la similitude des deux triangles ABF et FBE.

L'étape 3 est une conséquence directe du théorème de Pythagore : il suffit de placer les deux carrés donnés comme sur la figure 3 pour rendre le résultat évident.

Quant à l'étape 4, elle est un intéressant exemple d'itération avant la lettre : à partir de la décomposition du polygone en triangles, on a obtenu à partir de chaque triangle un carré. Le processus de la figure 3 permet de remplacer deux carrés par un seul ; il ne reste plus qu'à recommencer autant de fois que nécessaire.

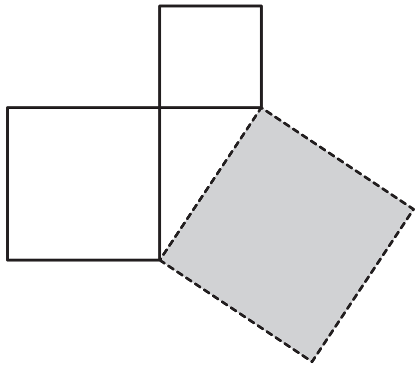
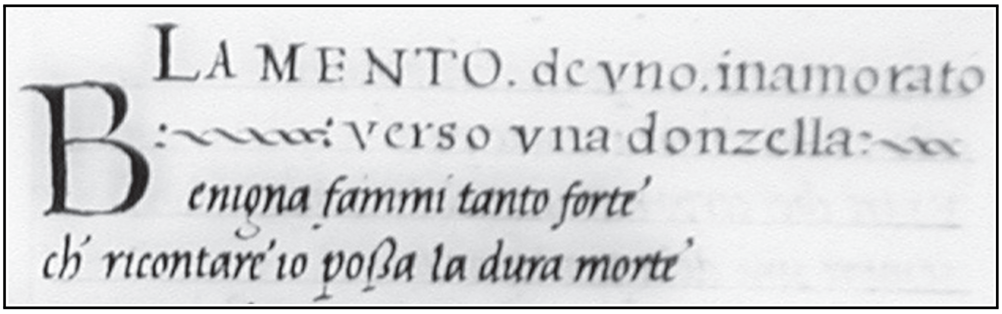


Figure 3

De documenti morali utilissimi

Dans cet étrange pêle-mêle on trouve à peu près n'importe quoi. Dans l'ordre :

- vingt-trois proverbes ;
- un poème d'amour [10] (image ci-dessous) ;



LAMENTO. de vno. inamorato
B:verso vna donzella:
enigna fammi tanto forte
ch' ricontare io poßa la dura morte

- une nouvelle série de proverbes ;
- des recettes d'encre sympathique et de cryptographie ;
- des recettes de couleurs, de parfums, de produits de beauté ;
- une quantité de tours de magie, parmi lesquels l'œuf de Colomb (voir ci-contre) ;
- et, assez surprenant, une recette pour faire des copies au carbone.

L'œuf de Colomb. Gravure de William Hogarth (1752).

10. Le mot *donzella* (rare maintenant) veut dire *demoiselle* plutôt que *donzelle*. Mais soupirer après l'une ou après l'autre, est-ce vraiment l'affaire d'un moine ?

Le manuscrit se termine par une rubrique *DE PROBLEMATIBUS ET ENIGMATA*. Ses premières énigmes visent le public lettré. On y trouve notamment un beau palindrome [11] :

ROMA TIBI SUBITO MOTIBUS IBIT AMOR

(Rome, vers toi viendra vite l'amour).

Les énigmes rassemblées à la fin sont de niveau nettement plus modeste : selon l'aimable formule de l'auteur, elles sont là *per l'amore de molti idioti*.

Conclusion

Au terme de cet article, je me sens plongé dans une perplexité qui est sans doute aussi celle du lecteur. Il est quasiment impossible de rendre compte en quelques pages d'un manuscrit aussi foisonnant et aussi peu construit. Pour tenter de le faire, j'ai utilisé *senza vergogna* les trois textes donnés en références [2, 3, 7]. Comme le dit un des proverbes de Luca Pacioli : *Chi non robba* [12] *non fa robba* (Qui ne vole pas ne fait pas de profits).

Références

Pour avoir de larges extraits (de lecture difficile), aller sur le site uriland.it, puis cliquer sur LUDOMATEMATICA et enfin sur *DE VIRIBUS QUANTITATIS*.

[1] Pierre Legrand. « Problèmes plaisants et délectables ». APMEP. In : *Bulletin Vert* nº 516 (2015).

[2] Amedeo Agostini. « Il *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli ». In : *Periodico di Matematiche* Volume IV (1924)., p. 165-192.

[3] Dario Bressanini et Silvia Toniato. *I giochi matematici di Fra' Luca Pacioli*. editioni Dedalo. ISBN : 978-8822068231.

[4] Pierre Legrand. « Énigmes carolingiennes ». APMEP. In : *Bulletin Vert* nº 512 (2015).

[5] Pierre Legrand. « Une histoire de notations ». APMEP. In : *Bulletin Vert* nº 520 (2016).

[6] Philippe Langlois. « Les trois voyages du chameau ». APMEP. In : *Bulletin Vert* nº 511 (2014).

[7] Tiago Hirth. « Luca Pacioli and his 1500 book *De Viribus Quantitatis* ». . Mém. de mast. Universidade de Lisboa, 2015.

Pierre Legrand a depuis longtemps un rôle actif au sein de l'APMEP, il a écrit de nombreux articles dans le Bulletin Vert.

pierre.legrand078@orange.fr

11. Un palindrome (de palin, à rebours, et dromos, parcours) est un texte qui peut être lu indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche.
12. En italien moderne, c'est *ruba* et non *robba*.

JEUX-Écollège 4

Une brochure APMEP pour la rentrée

Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège ! Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6ème. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou (parussion début octobre 2020)
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)
Prix public : 22 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2020 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur https://www.apmep.fr

NOM (établissement ou personne) : ....
Adresse : ....
Code Postal : .... *Ville :* .... *Pays :* ....
Téléphone : .... *Adresse courriel :* ....
Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : ....
Adresse de livraison : ....
Adresse de facturation : ....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1er degré ☐ 2e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : `contactrgpd@apmep.fr`.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur https://www.apmep.fr.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur `Chorus.pro` *; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :* ....

Date : .... *Signature :* .... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du nº 537

Mathématiques et arts

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr