Le bulletin de l'APMEP - N° 537

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Juillet, Août, Septembre 2020

Mathématiques et arts

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2020-2021 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Septembre 2020. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

AU FIL DES MATHS

APMEP

Pour un accord de guitare

Les problèmes de Papy Michel
Quand on apprend la guitare ou le piano, on découvre l'usage des accords dont on mémorise les doigtés, le plus souvent sans comprendre comment ils sont faits. On se contente de constater qu'ils « sonnent » bien. Et si les mathématiques y étaient pour quelque chose ?

Michel Soufflet

Qu'est-ce qu'un accord ?

Un accord est un groupement d'au moins trois sons joués simultanément. Si vous jouez trois notes au hasard, vous obtenez, en général, un résultat sonore qui n'est pas très agréable à entendre. Mais si par exemple vous essayez avec un *do*, un *mi* et un *sol*, vous obtiendrez un mélange harmonieux. C'est cet ensemble composé d'un *do*, d'un *mi* et d'un *sol* et d'une autre note plus grave que l'on appelle un accord de *do* (majeur).

Pourquoi ces trois notes s'accordent-elles entre elles ?

Imaginez que vous disposiez d'un générateur de fréquences capable de vous donner un son d'une fréquence n choisie au hasard. Ce son est, du point de vue mathématique, une fonction périodique du temps de période $\frac{1}{n}$. Elle est, si on simplifie au niveau de l'amplitude et de la phase, de la forme $\sin(2\pi nt)$. Si on émet simultanément trois notes de fréquence respective $4n$, $5n$ et $6n$, on obtient un son dont la fonction correspondante est de la forme :

$$f(t) = a\sin(2\pi 4nt) + b\sin(2\pi 5nt) + c\sin(2\pi 6nt).$$

Cette fonction est périodique et de période $\frac{1}{n}$: en effet, on a évidemment $f\left(t+\frac{1}{n}\right) = f(t)$.

Donc si on fait entendre simultanément trois notes de fréquence $4n$, $5n$, $6n$, on obtient un mélange de fréquence n, en divisant ces trois fréquences par 4, le même calcul nous montrera que si on mélange trois notes de fréquence respective n, $\frac{5n}{4}$, $\frac{3n}{2}$, on obtient une note de fréquence $\frac{n}{4}$.

Avec notre instrument, lorsque que l'on joue simultanément *do*, *mi* et *sol*, nous sommes dans cette situation car si n est la fréquence du *do*, $\frac{5n}{4}$ est presque celle du *mi*, et $\frac{3n}{2}$ presque celle du *sol*. Ces trois notes jouées ensemble forment ce qu'on appelle un accord de fréquence $\frac{n}{4}$.

La note de fréquence $\frac{5n}{4}$ est appelée la tierce et la note de fréquence $\frac{3n}{2}$ est appelée la quinte par les musiciens.

Un accord composé de la tonique de fréquence n, de sa tierce et de sa quinte est appelé un accord parfait.

Quelques termes utilisés par les musiciens

Harmonique

Il nous faut faire appel à un théorème de psychophysique, connu sous le nom de loi de Fechner[1] selon laquelle la sensation correspond au logarithme de la stimulation.

Nous percevons donc les sons suivant le logarithme de leurs fréquences.

1. Du nom de Gustav Theodor Fechner (1801-1887) philosophe et psychologue allemand.

C'est pour cela que les musiciens n'utilisent pas les fréquences mais les gammes pour repérer la hauteur des notes. Les fréquences $n_1 = N$, $n_2 = 2N$, $n_3 = 4N$, $n_4 = 8N$, $n_5 = 16N$ forment une suite géométrique : $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_4}{n_3} = \frac{n_5}{n_4}$.

Les hauteurs perçues correspondantes : h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 forment une suite arithmétique :

$$h_2 - h_1 = h_3 - h_2 = h_4 - h_3 = h_5 - h_4.$$

Fréquence	N	$2N$	$4N$	$8N$	$16N$	$32N$	$64N$
Hauteur perçue	h	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	$7h$
Note	*do*$_1$	*do*$_2$	*do*$_3$	*do*$_4$	*do*$_5$	*do*$_6$	*do*$_7$

Si un *do* de base a pour fréquence N alors celui situé à l'octave supérieure aura pour fréquence $2N$, le suivant pour fréquence $4N$ et celui d'après $8N$, etc.

Donc, si N est la fréquence d'un *do*, alors $\frac{N}{4}$ est celle du *do* situé deux octaves plus bas.

Pour une fréquence N donnée, les fréquences $2N$, $3N$, ..., kN sont appelées harmoniques de N.

Pour aller plus loin, il nous faut faire un retour historique (et simplifié) sur la manière dont se sont formées les gammes au fil du temps.

Gammes naturelles[2]

De ce que l'on vient de voir, il ressort que la recherche de l'accord parfait invite à construire une gamme dans laquelle les rapports de fréquences entre les notes sont des nombres rationnels. Ce fut sans doute la démarche de Zarlino au XVIe siècle :

Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Fréquence	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Dans cette gamme, l'accord de *do majeur* (*do*, *mi*, *sol*) est parfait. Toutes les fréquences des notes, y compris celles des gammes inférieures et supérieures, sont des nombres de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$ où a, b, c sont des entiers relatifs. Elles forment le groupe multiplicatif noté $< 2, 3, 5 >$.

Exemple :

- pour la gamme supérieure : le *fa* aura pour fréquence $\frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3} = 2^3 \times 3^{-1} \times 5^0$ et le *mi* $\frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2} = 2^{-1} \times 3^0 \times 5^1$;
- pour la gamme inférieure : le *si* aura pour fréquence $\frac{15}{8} \div 2 = \frac{15}{16} = 2^{-4} \times 3^1 \times 5^1$ et le *mi* $\frac{5}{4} \div 2 = \frac{5}{8} = 2^{-3} \times 3^0 \times 5^1$.

Une autre gamme naturelle, encore plus ancienne, 2 500 ans déjà, est celle de Pythagore :

Note	*do*	*ré*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
Fréquence	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Ici les nombres sont de la forme $2^a \times 3^b$ (groupe multiplicatif noté $< 2, 3 >$)

Cette gamme est construite de telle sorte que toutes les notes s'obtiennent, à une octave près, en partant de la note *ré* et en jouant les trois quintes successives au-dessus et les trois en dessous.

Exemple : quinte au-dessus du *ré* : $\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$: on obtient un *la*.

Quinte en dessous du *ré* : $\frac{9}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$; cette note est le *sol* de la gamme inférieure puisque $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$.

Ces gammes naturelles, qui ne sont pas les seules, ne sont utilisées que par quelques solistes, car pour produire ces notes, il faut être en mesure d'avoir un impact sur la justesse de l'instrument. C'est le cas du chanteur, du trombone à coulisse ou encore des instruments de la famille à cordes frottées (violoncelle, violon...).

2. Les musiciens parlent aussi de tempérament inégal.

La gamme tempérée[3]

Cette gamme, créée par Jean-Sébastien Bach en 1722 dans *le clavier bien tempéré*, est quasiment la seule gamme utilisée de nos jours. La plupart des instruments de musique sont fabriqués sur cette base. L'intervalle entre deux *do* consécutifs est divisé en douze petits écarts appelés demi-tons :

Note	*do*	*do* $\sharp$	*ré*	*mi* $\flat$	*mi*	*fa*	*fa* $\sharp$	*sol*	*sol* $\sharp$	*la*	*si* $\flat$	*si*	*do*
Demi-ton	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6
Fréquence	1	q	a	d	c			b					2

Pour simplifier, on choisit 1 comme fréquence fondamentale de la note *do*.

Nous allons calculer dans la suite q, a, b, c et d.

La deuxième ligne du tableau est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

La troisième, une suite géométrique de raison q tel que $q^{12} = 2$, c'est-à-dire $q = 2^{\frac{1}{12}}$.

La fréquence est fonction exponentielle de la hauteur (réciproque de la fonction $\log$), c'est donc une fonction du type $f(x) = a^x$ avec a tel que $a^6 = 2$, ce nombre a est $2^{\frac{1}{6}}$ soit environ 1,122 ce qui correspond à la fréquence de la note *ré*.

Un demi-ton correspond, en fréquence, au nombre $2^{\frac{1}{12}}$.

Pour la note *sol*, il faut trouver b tel que $b = a^{\frac{7}{2}}$ soit $b = 2^{\frac{7}{12}}$ soit environ 1,498. On est très proche du $\frac{3}{2}$ attendu pour la quinte.

L'accord majeur

Avec la gamme tempérée, le *mi* a pour fréquence $c = a^2 = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$ soit environ : 1,259. Cette fréquence est légèrement supérieure à la 5^{e} harmonique pure $\frac{5}{4} = 1{,}25$.

La gamme tempérée parvient à gagner en praticité parce qu'elle fait des concessions sur la justesse.

Dans cette gamme, l'accord de *do majeur* n'est pas pur, l'oreille humaine s'adapte très bien à ces petites différences y trouvant même une forme d'enrichissement.

L'accord mineur

Le *mi bémol*, 5^{e} harmonique de notre accord de *do mineur*, a pour fréquence $d = a^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}$ soit environ 1,189.

On voit que la 5^{e} harmonique « pure » de fréquence $\frac{5}{4} = 1{,}25$ est bien entre le *mi* et le *mi bémol*.

Les musiciens appellent *do mineur*, l'accord obtenu avec les trois notes, *do*, *sol*, *mi bémol*.

Dans la gamme de *do*, le *mi* s'appelle tierce majeure, c'est le plus près de la note $5N$, légèrement au dessus.

Le *mi bémol*, légèrement en dessous, est appelé tierce mineure.

Pour trouver les autres accords, il suffit de transposer :

- l'accord en *la mineur*, par exemple, s'obtient en retirant trois demi-tons à chacune des notes *do*, *mi bémol*, *sol* ; cela donne : *la*, *do*, *mi* ;
- L'accord en *ré majeur* en ajoutant un ton aux notes *do*, *mi*, *sol* ; on obtient *ré*, *fa dièse*, *la*.

Et l'accord de 7^{e} ?

Nous avons vu que l'accord majeur de la note de fréquence n est formé avec les notes de fréquence $2n$, $3n$, $5n$, et de leurs multiples. Si n correspond à un *do*, alors $4n$, $8n$, $16n$ correspondent à des *do* supérieurs ; $6n$, $12n$, $24n$ à des *sol* et $5n$, $10n$, $30n$ à des *mi*.

3. Les musiciens parlent aussi de tempérament égal.

La 7e harmonique, note de fréquence $7n$, est, dans la gamme tempérée, approximativement un *si bémol*. Si on ajoute à l'accord de *do majeur* (*do*, *mi* et *sol*) cette 7e harmonique, on obtient l'accord de *do7 majeur*, appelé accord de 7e. Le fait que ce ne soit qu'à peu près un *si bémol* rend l'accord de 7e légèrement faux à l'oreille d'un débutant alors qu'il apparaîtra enrichi à un musicien averti dont l'oreille s'est accoutumée.

Utilisation en classe

Si une collaboration avec le collègue de musique semble toute naturelle, n'oublions pas celle du collègue de physique pour mettre en pratique les accords.

Un travail sur les cordes vibrantes fait apparaître que, si on divise la longueur de la corde par deux on obtient l'octave supérieure, si on la divise par trois on obtient la quinte. Sur une guitare, la 12e barrette doit se trouver au milieu de la corde, la 7e près du tiers de cette corde car $2^{\frac{7}{12}}$ vaut environ 1,498, ce qui correspond à la quinte. Le rapport des fréquences entre les notes correspondant à deux barrettes successives est $2^{\frac{1}{12}}$, celui des longueurs est $2^{-\frac{1}{12}}$.

Du point de vue culturel, on voit que le terme « gamme naturelle » n'est pas sans lien avec la notion d'entier naturel puisque les rapports de fréquences entre les notes sont des nombres rationnels c'est-à-dire des rapports d'entiers naturels.

Avec un public d'élèves mélomanes, on peut envisager de proposer l'accord parfait dans la gamme de Zarlino que l'on distingue « à l'oreille » du même accord dans la gamme tempérée[4] et faire ainsi un parallèle entre nombres rationnels et entiers.

De mon point de vue, il faut, le plus souvent possible, privilégier tout ce qui peut donner du sens. L'accord de 7e en musique faisait partie de mon cours, toutes sections confondues, lorsque j'introduisais les logarithmes. Un jour, une élève de Terminale ES (spécialité maths) est venu me remercier à la fin de l'heure : elle venait de comprendre comment étaient constitués les accords qu'elle jouait sur son piano et en particulier pourquoi il fallait ajouter un *si bémol* à l'accord de *do majeur* pour obtenir celui de *do7*. Vingt ans plus tard, elle ne se rappellera sans doute pas que la fonction logarithme est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ mais peut-être se souviendra-t-elle que c'est une fonction qui transforme les produits en somme. Et que c'est la perception logarithmique des sons par l'être humain qui fait que le physicien évoque des fréquences tandis que le musicien perçoit des hauteurs de sons.

Le plus important est ce qui reste quand on a tout oublié !

la m. *ré m.* *sol 7*
ce qu'il faut de malheur pour la moindre chanson

sol 7 *do* *mi 7*
ce qu'il faut de sanglots pour un air de guitare

G. Brassens – Poème d'Aragon : Il n'y a pas d'amour heureux.

Références

[1] Michel Soufflet. *100 énigmes mathématiques de tous les jours*. Éditions Vuibert, 2014.

[2] Bernard Parzysz. « Musique et transformations. Analyse d'une œuvre contemporaine ». APMEP. In : *Bulletin Vert* nº 509 (2015).

[3] Yves Hellegouarch et Michel Soufflet. *Kreisleiriana*. IREM de Basse Normandie, 1985.

[4] Éric Decreux. *Mathématiques, sciences et musique*. Ellipses, 2008.

Michel Soufflet, professeur retraité, a été président de l'APMEP et animateur IREM de Basse Normandie.
michel.soufflet@unicaen.fr

4. Le livre, *Le son musical – Musique, acoustique et informatique*, de John Pierce publié chez Belin dans la collection *Pour la science* en 2000 est accompagné d'un CD qui permet de comparer ces différents accords, et ainsi de mieux ressentir l'accord parfait.

JEUX-Écollège 4

Une brochure APMEP pour la rentrée

Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège ! Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6ème. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou (parussion début octobre 2020)
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)
Prix public : 22 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2020 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur https://www.apmep.fr

NOM (établissement ou personne) : ....

Adresse : ....

Code Postal : .... *Ville :* .... *Pays :* ....

Téléphone : .... *Adresse courriel :* ....

Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : ....

Adresse de livraison : ....

Adresse de facturation : ....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1er degré ☐ 2e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : `contactrgpd@apmep.fr`.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur https://www.apmep.fr.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur `Chorus.pro` *; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :* ....

Date : .... *Signature :* .... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du nº 537

Mathématiques et arts

APMEP

www.apmep.fr