

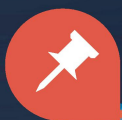
Le bulletin de l'APMEP - N° 537

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Juillet, Août, Septembre 2020

**Mathématiques et arts**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



**Au fil des maths**, c'est aussi une revue numérique augmentée :  
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à  
[aufilesmaths@apmep.fr](mailto:aufilesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

À ce numéro est jointe la plaquette  
*Visages 2020-2021 de l'APMEP.*

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directeur de publication** : Sébastien PLANCHENAUT.

**Responsable coordinateur de l'équipe** : Lise MALRIEU.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

**Illustrateurs** : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

**Équipe T<sub>E</sub>Xnique** : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2020. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



# Au fil des problèmes

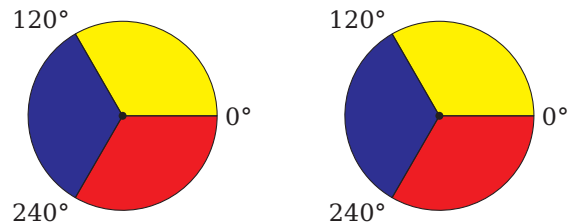
*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :  
[frederic.deligt2@gmail.com](mailto:frederic.deligt2@gmail.com)  
 ou par courrier à :  
 Frédéric de Ligt  
 3 rue de la Pierrière  
 17270 MONTGUYON*

*Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.*

**Frédéric de Ligt**

## 537-1 Mélangeur de couleurs (Ivan Riou)

Il existe trois couleurs fondamentales : le jaune, le bleu et le rouge. On appellera *ton* un mélange de ces trois couleurs selon certaines proportions. On construit un mélangeur de couleurs de la façon suivante : on part de deux palettes circulaires contenant chacune les trois couleurs fondamentales.



Les deux palettes sont initialement positionnées comme ci-dessus. On tourne chacune des deux palettes d'un angle compris entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$  dans le sens antihoraire, non nécessairement entier. Puis on vient récupérer la (les) couleur(s) présente(s) sur le secteur angulaire de  $90^\circ$  situé en bas à droite de chaque palette, appelé sous-palette pour obtenir deux tons intermédiaires. Enfin, on mélange les couleurs des deux sous-palettes associées à ces deux tons intermédiaires pour obtenir le ton final.



et



donnent



Par exemple : Palette 1 : ton intermédiaire n° 1 ;  
 Angle de rotation :  $48^\circ$  ;  
 20 % bleu et 80 % rouge.

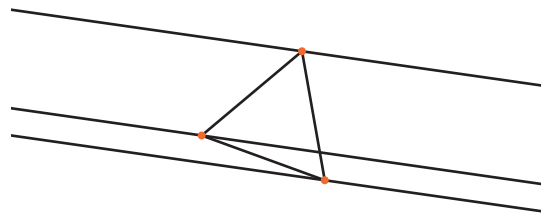
Palette 2 : ton intermédiaire n° 2 ;  
 Angle de rotation :  $333^\circ$  ;  
 30 % jaune et 70 % rouge.

Répartition du ton final par couleurs en pourcentages :  
 10 % de bleu, 75 % de rouge et 15 % de jaune.

On tourne chacune des deux palettes au hasard. Quelle est la probabilité que le *ton* final soit dominé par le rouge ?

## 537-2 Construction sous contrainte (Crux Mathematicorum)

Trois droites parallèles sont données.  
 Construire un triangle équilatéral avec un sommet sur chaque droite.



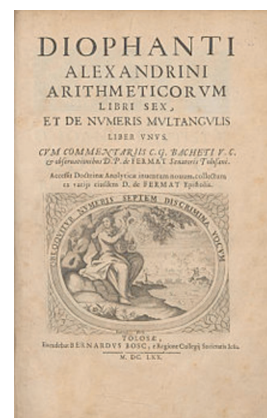


## 537-3 Deux équations diophantiennes (Denis Roussillat)

Résoudre en nombres entiers les deux équations :

$$x^2 + y^2 = 31z^2 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 = 29z^2 \quad (4)$$

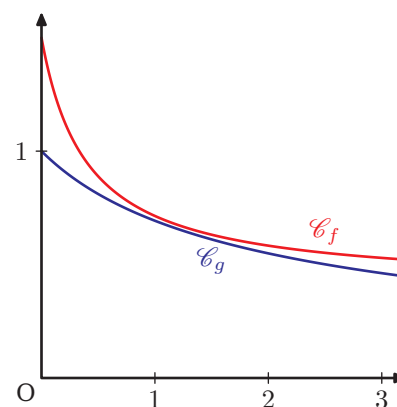


## 537-4 Une fonction homographique particulière

On note  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$  pour  $x > 0$  et  $g(0) = 1$ .

Démontrer que l'ensemble des fonctions homographiques, définies sur  $\mathbb{R}^+$  et qui majorent  $g$ , possède un plus petit élément.

Exemple d'une fonction homographique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  majorant la fonction  $g$  :  $f(x) = \frac{2x+3}{5x+2}$ .



## À propos des problèmes parus précédemment

### 531-1 Et le triangle équilatéral ?

En l'absence de réponse à cet énoncé je dépose sur le site une démonstration qui prouve l'impossibilité d'un tel pavage même si les côtés des triangles équilatéraux ne sont pas entiers.

### 532-2 L'unité en 2019 ?

Stéphane Magnan (Toulouse) a envoyé une solution différente de celles précédemment reçues. Il utilise deux propriétés d'hérédité : Si  $N$  s'écrit comme une somme d'entiers dont la somme des inverses vaut 1 alors il en est de même pour  $2N + 2$  et  $2N + 9$ . Partant de 11 on parvient ainsi à 2019.

Pour les énoncés parus dans le numéro 534, Ludovic Jany (Bolquère) a envoyé plus tardivement des solutions aux énoncés 534-2, 534-3 et 534-4.

### 535-1 Binero

Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) fait remarquer que la formule se trouve sur le site de l'OEIS Foundation (chercher A177790) : .

On peut trouver sa démonstration (pages 55 et 56) ici : .

Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), quant à lui, considère plus généralement le nombre  $B(n, k)$  de lignes à  $n$  termes valant 0 ou 1, commençant par un premier terme donné et comportant  $k$  termes égaux, sans qu'il n'y ait plus de deux termes égaux consécutifs et établit la relation :

$$B(n, k) = B(n-1, n-k) + B(n-2, n-k).$$



En ajoutant les conditions aux bords, il obtient à l'aide d'un programme récursif les valeurs de  $B(2n, n)$  jusqu'à  $n = 15$ . Le nombre demandé par l'énoncé est alors  $2B(2n, n)$  puisqu'il y a deux façons de choisir le terme initial.

### 535-2 Triangulation numérique

Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Ludovic Jany (Bolquère), Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Hervé Chastand (Saint-Aubin-de-Lanquais) partent tous de la même remarque, à savoir que :

$$\Delta_k - \Delta_{k+1} - \Delta_{k+2} + \Delta_{k+3} = 2.$$

Ajouté au fait que  $\Delta_1 = 1$ , ils obtiennent un moyen, certes peu économique en termes, mais simple de mise en application, d'écrire tout entier relatif, pair ou impair, comme combinaison à coefficients  $+1$  ou  $-1$  des premiers nombres triangulaires consécutifs.

### 535-3 Avec Fibonacci et Lucas

Jacques Vieulet (Ibos), Ludovic Jany (Bolquère), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Vincent Thill (Migennes) et Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) établissent par récurrence la relation  $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$  (ou une variante de cette relation) et concluent soit par une démonstration par récurrence sur l'égalité proposée soit par des sommations diverses.

Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) Jean-Paul Thabaret (Thonon-les-bains) et Philippe Achart (Antony) partent des expressions générales de  $F_n$  (formule de Binet) et de  $L_n$  puis somment des suites géométriques pour parvenir au résultat.

### 535-4 Un peu de géométrie tout de même

Pas moins de six méthodes ont été mises en œuvre. Une autre branche des mathématiques permet-elle autant de variétés d'approche ?

- Jacques Chayé (Poitiers) introduit une affinité orthogonale d'axe (AB) pour construire un triangle  $ABC_1$  dont l'image du point F est l'orthocentre. La propriété à démontrer est alors classique dans le triangle  $ABC_1$ . Une propriété de conservation d'égalité des angles lui permet ensuite de conclure.
- Hervé Chastand (Saint-Aubin-de-Lanquais) construit un triangle dont HDE est le triangle orthique et il peut alors utiliser la même propriété classique que Jacques Chayé.
- Jules Miewis (Mons), Jean-Paul Thabaret (Thonon-les-bains), Marc Roux (Nîmes), Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Ludovic Jany (Bolquère) passent par la géométrie analytique et des calculs de pentes.
- Philippe Achart (Antony) et Jacques Vieulet (Ibos) travaillent avec des rapports de longueurs à l'aide des théorèmes de Céva et de Thalès.
- Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) utilise quant à elle la loi des sinus et le théorème de Céva.
- Jacques Marot (Poitiers) et Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) se placent dans le cadre de la géométrie affine et utilisent des faisceaux et divisions harmoniques. Jacques Marot complète sa solution avec quelques pages bienvenues de révision sur ces notions.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : [▶](#) (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).



# JEUX-Écollège 4

## Une brochure APMEP pour la rentrée



Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

**JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège !** Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6<sup>ème</sup>. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

**Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.**

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou (parution début octobre 2020)  
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)  
Prix public : 22 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

### Abonnement 2020 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) : .....  
Adresse : .....  
Code Postal : ..... Ville : ..... Pays : .....  
Téléphone : ..... Adresse courriel : .....  
Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : .....  
Adresse de livraison : .....  
Adresse de facturation : .....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1<sup>er</sup> degré ☐ 2<sup>e</sup> degré  
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : [contactrgpd@apmep.fr](mailto:contactrgpd@apmep.fr).

**Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP** pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

**Règlement** : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur *Chorus.pro* ; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire : .....

Date : ..... Signature : ..... Cachet de l'établissement

**Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS**  
[secretariat-apmep@orange.fr](mailto:secretariat-apmep@orange.fr) SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

# Sommaire du n° 537



## Mathématiques et arts

|                                                                                                                           |    |                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ✦ Le pourquoi et le comment — Bernard Parzysz                                                                             | 3  | ✦ La chute d'un tableau — Pierre Gallais                                    | 53        |
| Pour un droit aux mathématiques! — David Zerbib                                                                           | 7  | ✦ Mathématiques du crochet et crochet mathématique — Bérénice Delcroix-Oger | 57        |
| Les représentations en barres : « <i>ni cet excès d'honneur, ni cette indignité</i> » — Richard Cabassut                  | 10 | ✦ Soyez malin, devenez paveur! — Loïc Terrier                               | 65        |
| ✦ La magie des azulejos — Olivier Garrigue                                                                                | 20 | Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt                                     | 70        |
| Construction de connaissances spatiales en cycle 1 — M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet et S. Vansimpsen | 31 | Pour un accord de guitare — Michel Soufflet                                 | 73        |
| Labo de maths dans un lycée polyvalent — Nathalie Braun                                                                   | 39 | Les énigmes de Luca Pacioli — Pierre Legrand                                | 77        |
| Qui a (vraiment) le pouvoir au Parlement? — Antoine Rolland                                                               | 44 | ✦ Un musée des mathématiques — Valérie Larose                               | 86        |
| ✦ <b>LOOL</b> , vous avez dit <b>LOOL</b> ? — Le collectif <b>LOOL</b>                                                    | 49 | Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau                                 | 87        |
|                                                                                                                           |    | Matériaux pour une documentation                                            | 89        |
|                                                                                                                           |    | <b>Bonus</b>                                                                | <b>94</b> |
|                                                                                                                           |    | Le musée de JSM — Jean-Sébastien Masset                                     | 94        |



Culture**MATH**

