

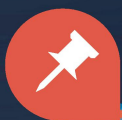
Le bulletin de l'APMEP - N° 537

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Juillet, Août, Septembre 2020

Mathématiques et arts



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2020-2021 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAUT.

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

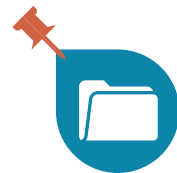
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2020. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



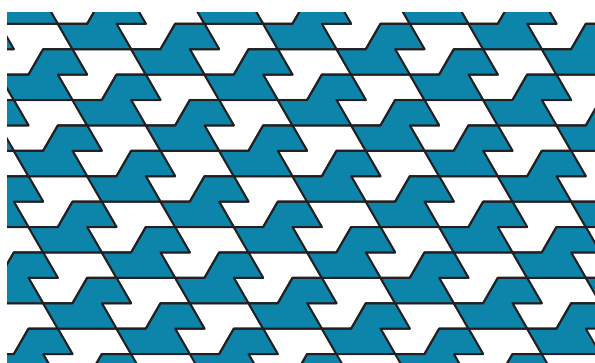
Soyez malin, devenez paveur !

Les pavages sont probablement l'un des carrefours les plus évidents de l'art et des mathématiques. D'un coup d'œil, le professeur de mathématiques perçoit la symétrie et la richesse d'un pavage. Loïc Terrier nous donne les clefs pour créer son propre pavage apériodique. . . papier-crayon ou console Python, l'équipe d'Au fil des maths publiera vos créations ou celles de vos élèves.

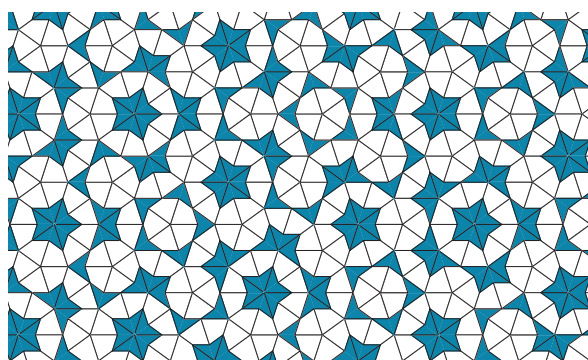
Loïc Terrier

Introduction

Si un pavage est trop symétrique, trop répétitif, trop simple en somme, il est peut-être agréable à regarder mais il ne contient aucun mystère.



Si au contraire notre cerveau ne perçoit pas de symétrie, nous classons le pavage comme « aléatoire » et nous n'allons pas chercher plus loin. L'équilibre parfait est — à mon avis — atteint avec les pavages « apériodiques » découverts (ou redécouverts) par Sir Roger Penrose¹.



Les symétries sont là, donnant une impression d'ordre agréable, mais nous ne saisissons pas l'agencement général car les pavés se combinent pour former des motifs plus grands qui eux-mêmes se combinent. . . à l'infini.

Un pavage périodique est par définition un pavage où le même motif se retrouve par translation. Plus précisément, il existe deux translations de vecteurs non colinéaires qui laissent le pavage invariant. Il s'ensuit que le tout se déduit d'une toute petite portion, le motif.

Un pavage apériodique échappe à cette tyrannie des translations !

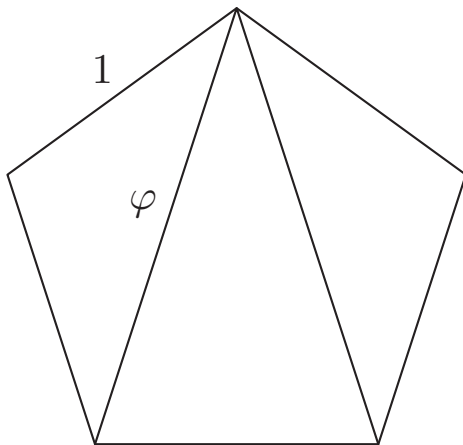
1. Ce mathématicien et physicien britannique a découvert ce pavage en 1974, environ dix ans avant que Daniel Shechtman n'observe pour la première fois les quasi-cristaux qui ont une structure similaire.



On pourrait penser que créer ce genre de pavage est une affaire sérieuse, réservée à des mathématiciens professionnels... Il n'en est rien, car nous pouvons nous inspirer du travail de Penrose. Pour cela, nous allons commencer par étudier un pavage voisin du sien.

Des triangles dans un pentagone

L'idée de base est la suivante : on considère les triangles obtenus lorsque l'on relie un sommet d'un pentagone régulier à tous les autres (on « triangule » le pentagone).



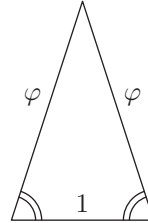
Si on considère un pentagone régulier de côté 1, alors la diagonale vaut $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. C'est le fameux nombre d'or, qui vérifie l'équation $\varphi^2 = \varphi + 1$ dont on se servira plus loin. Les deux triangles obtenus sont nommés dans [1] respectivement *triangle d'argent* et *triangle d'or*. Posons $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

- triangle d'argent :



$$\begin{aligned} \text{angles } (\alpha, \alpha, 3\alpha); \\ \text{côtés : } (1, 1, \varphi); \\ \text{aire } a_1 &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \times 1 \times \varphi \\ &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \varphi. \end{aligned}$$

- triangle d'or :



$$\begin{aligned} \text{angles } (2\alpha, 2\alpha, \alpha); \\ \text{côtés : } (1, \varphi, \varphi); \\ \text{aire } a_2 &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \times \varphi \times \varphi \\ &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) \varphi^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) (1 + \varphi). \end{aligned}$$

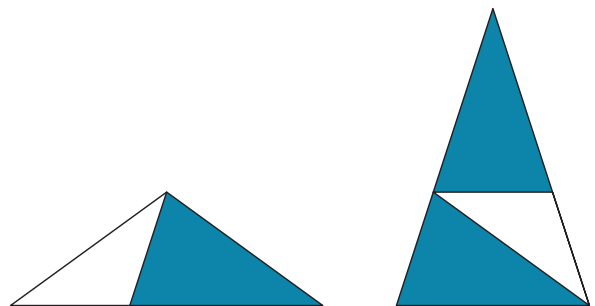
Remarquons au passage que l'aire du triangle d'or est φ fois plus grande que celle du triangle d'argent : $a_2 = \varphi a_1$.

Agrandissons à présent ces deux triangles : plus précisément, appliquons-leur une homothétie de rapport φ : leurs côtés sont multipliés par φ , leur aire par φ^2 .

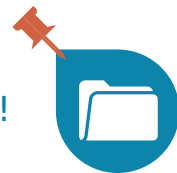
Le triangle d'argent agrandi a ses côtés égaux à φ , φ et $1 + \varphi$ et une aire $A_1 = a_1 \varphi^2 = a_1 (1 + \varphi) = a_1 + a_2$.

Le triangle d'or agrandi a ses côtés égaux à φ , $1 + \varphi$ et $1 + \varphi$ et une aire $A_2 = a_2 \varphi^2 = a_2 + a_2 \varphi = a_2 + a_1 \varphi^2 = a_2 + a_2 + a_1$.

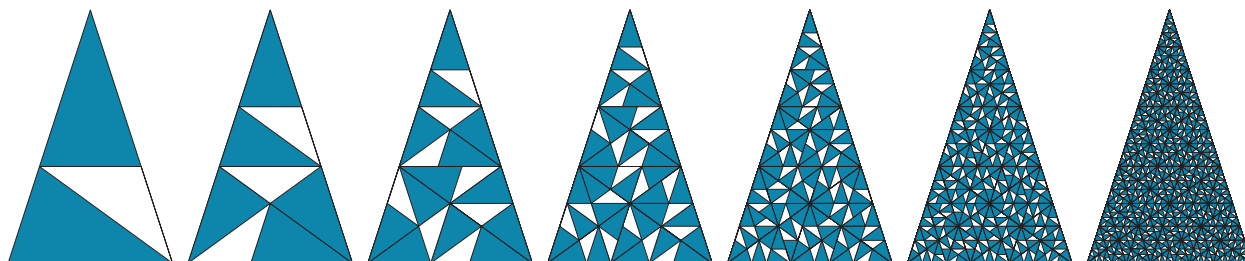
Un grand triangle d'argent vaut donc un or et un argent, tandis qu'un grand triangle d'or vaut deux ors et un argent, et on peut effectivement les découper ainsi :



Ce découpage est la clef du pavage : on part d'un simple triangle. On l'agrandit puis on le découpe, et on recommence... à l'infini !



La figure ci-dessous montre les sept premières étapes. On n'a pas procédé aux agrandissements pour des raisons de place !



De l'apparent désordre initial surgit une mystérieuse structure...

Pourquoi peut-on affirmer que ce pavage (infini) n'est pas périodique ?

S'il l'était, le même motif composé de k triangles d'or et de m triangles d'argent se répéterait à l'infini, et le quotient $\frac{\text{nombre de triangles d'or}}{\text{nombre de triangles d'argent}}$ tendrait vers $\frac{k}{m}$.

Comptons le nombre de triangles d'or et de triangles d'argent à chaque étape :

2 ors et 1 argent à l'étape une, puis 5 ors et 3 argents à l'étape deux, puis 13 ors et 8 argents... On retrouve la célèbre suite $(\mathcal{F}_n)$ de Fibonacci !

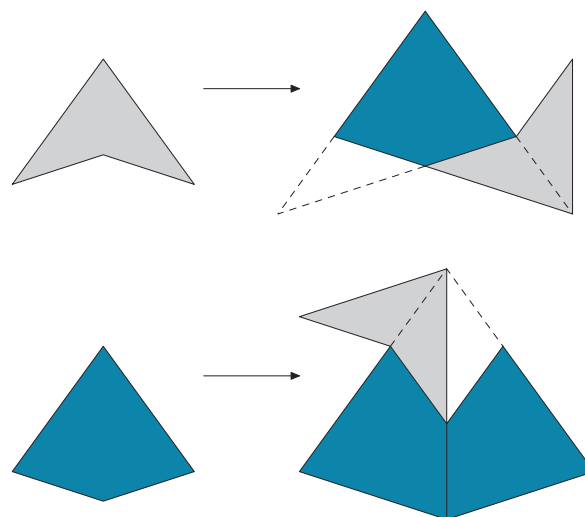
Si on note respectivement o_n et a_n le nombre de triangles d'or et d'argent à l'étape n , on a
$$\begin{cases} o_{n+1} = 2o_n + a_n \\ a_{n+1} = o_n + a_n \end{cases}$$
 On en tire la relation de récurrence d'ordre 2 : $o_{n+2} = 3o_{n+1} - o_n$ qui montre (après calculs) que $o_n = \mathcal{F}_{2n+1}$ puis $a_n = \mathcal{F}_{2n}$. En particulier, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{o_n}{a_n} = \varphi \dots$ qui est irrationnel !

Ceci prouve que ce pavage est effectivement apériodique.

Et le pavage de Penrose ?

Ce qu'on a obtenu semble assez différent, mais il s'agit en fait du même procédé, avec des règles de substitution légèrement différentes.

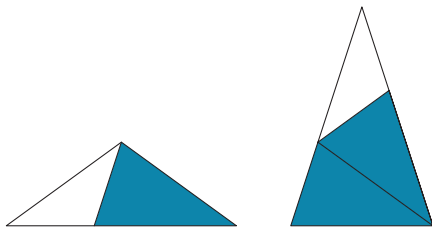
Les deux tuiles du pavage de Penrose sont appelées « fléchette » et « cerf-volant » : une fléchette est constituée de deux triangles d'argent, tandis qu'un cerf-volant est obtenu à l'aide de deux triangles d'or. En appliquant l'agrandissement de rapport φ , une fléchette va se décomposer en deux triangles d'or et deux triangles d'argent, soit une fléchette et un cerf-volant. Un cerf-volant donnera naissance à deux triangles d'argent et quatre triangles d'or, donc une fléchette et deux cerfs-volants.



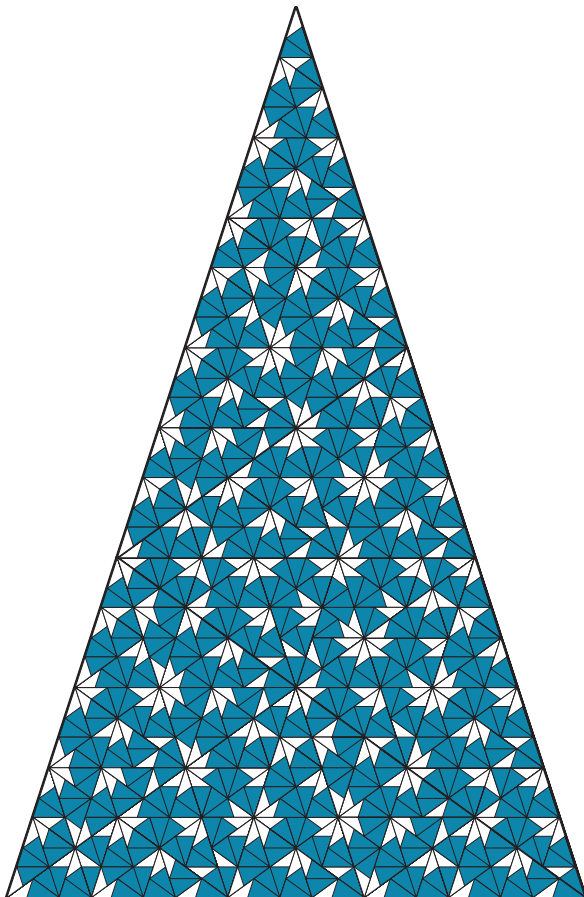


Pour que cela puisse effectivement marcher, il faut respecter quelques règles dans la configuration de départ. Les lecteurs intéressés tireront certainement grand plaisir au visionnage du petit film (16 min) d'animation [2].

Pour terminer ce paragraphe, remarquons qu'il existe plusieurs façons de découper les triangles d'or et d'argent, et que cela produit des pavages différents ! Par exemple, avec les découpages suivants :



On obtient, au bout de sept étapes :



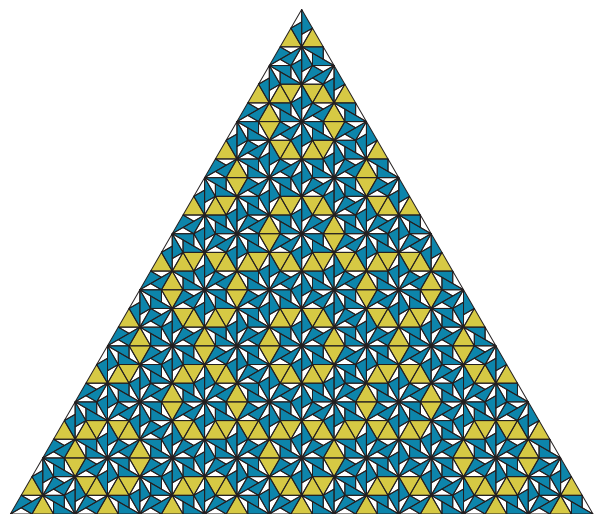
À vous de jouer !

Le principe de ces pavages par substitution repose sur le petit miracle permettant de découper les triangles en triangles du même type. On pourrait penser que le pentagone est un cas particulier et que cette propriété est l'un des tours dont le nombre d'or est friand. Il n'en est rien ! De tels découpages sont possibles avec l'hexagone, l'heptagone, l'octogone... et peut-être avec tout polygone régulier ?

On peut démontrer que, si le côté du polygone vaut 1, alors le produit des longueurs de deux diagonales quelconques peut s'écrire comme somme de longueurs de diagonales². Le cas du nombre d'or n'est pas isolé.

Pour l'hexagone, on a trois triangles possibles. On peut faire deux homothéties et chacune d'elles donne lieu à plusieurs découpages possibles : si on rajoute les possibilités offertes par les différentes symétries, cela fait déjà des centaines de pavages à découvrir !

Le pavage ci-dessous est l'un d'eux. Trouverez-vous les règles de substitution utilisées ?



Pour créer son pavage, la première étape consiste donc à choisir le nombre de côtés du polygone régulier et à déterminer tous les types de triangles

2. Cela découle des propriétés des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.



qu'on peut obtenir en reliant trois sommets. Ensuite, par exemple en s'aidant de GeoGebra, on trouve un découpage de chaque triangle. Mais une fois que cela est fait, comment créer son pavage ?

Avec Python

On peut bien sûr prendre sa règle, son compas, s'armer de courage et de patience et tout faire à la main (Escher le faisait !) On peut aussi utiliser un langage de programmation... Tiens, pourquoi pas Python ?

Un script et sa notice sont disponibles dans la version numérique de l'article pour ceux qui voudraient essayer. Moment de magie garanti quand on voit le pavage se former !

Conclusion

Il n'existe que dix-sept sortes de pavages périodiques, mais il y en a une infinité d'apériodiques ! On trouve d'ailleurs sur la toile une encyclopédie de pavages apériodiques [3]. Elle contient des dizaines de pavages de toutes sortes ! Reste à es-

pérer qu'un jour les designers s'emparent de ce trésor et le sortent au grand jour...

Références

- [1] Jean-Louis Brahem. *Histoires de géomètres... et de géométrie*. Éditions Le Pommier, 2011.
- [2] Alessandro Musesti et Maurizio Paolini. *Darts and kites in the sky of mathematics*. et .
- [3] F. Gähler, D. Frettlöh et E. Harriss. *Tilings encyclopedia*. .

.....◆.....

Loïc Terrier est adhérent de la dynamique régionale de Lorraine. Après avoir sévi de nombreuses années dans l'enseignement secondaire, il s'en est récemment évadé et tente à présent de convaincre ses élèves de classe préparatoire ECE (économique et commerciale, option économique) du lycée Henri Poincaré de Nancy que les mathématiques peuvent être amusantes... Il a animé des ateliers aux Journées Nationales de l'APMEP sur L^AT_EX, R et les flexagones.

loic.terrier@free.fr

© APMEP Septembre 2020

JEUX-Écollège 4

Une brochure APMEP pour la rentrée



Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège ! Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6^{ème}. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou (parution début octobre 2020)
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)
Prix public : 22 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2020 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) :
Adresse :
Code Postal : Ville : Pays :
Téléphone : Adresse courriel :
Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) :
Adresse de livraison :
Adresse de facturation :

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1^{er} degré ☐ 2^e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : contactrgpd@apmep.fr.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur [Chorus.pro](https://chorus.pro) ; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :

Date : Signature : Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS
secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du n° 537



Mathématiques et arts

Éditorial

Opinions

✦ Le pourquoi et le comment — Bernard Parzys

Pour un droit aux mathématiques ! — David Zerbib

Les représentations en barres : « *ni cet excès d'honneur, ni cette indignité* » — Richard Cabassut

Avec les élèves

✦ La magie des azulejos — Olivier Garrigue

Construction de connaissances spatiales en cycle 1 — M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet et S. Vansimpsen

Labo de maths dans un lycée polyvalent — Nathalie Braun

1 Ouvertures 44

Qui a (vraiment) le pouvoir au Parlement ? — Antoine Rolland 44

3 ✦ |OO|, vous avez dit |OO|? — Le collectif |OO| 49

3 ✦ La chute d'un tableau — Pierre Gallais 53

✦ Mathématiques du crochet et crochet mathématique — Bérénice Delcroix-Oger 57

7 ✦ Soyez malin, devenez paveur ! — Loïc Terrier 65

Récréations 70

10 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 70

Pour un accord de guitare — Michel Soufflet 73

20 Au fil du temps 77

Les énigmes de Luca Pacioli — Pierre Legrand 77

✦ Un musée des mathématiques — Valérie Larose 86

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 87

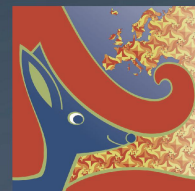
Matériaux pour une documentation 89

Bonus 94

Le musée de JSM — Jean-Sébastien Masset 94



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr