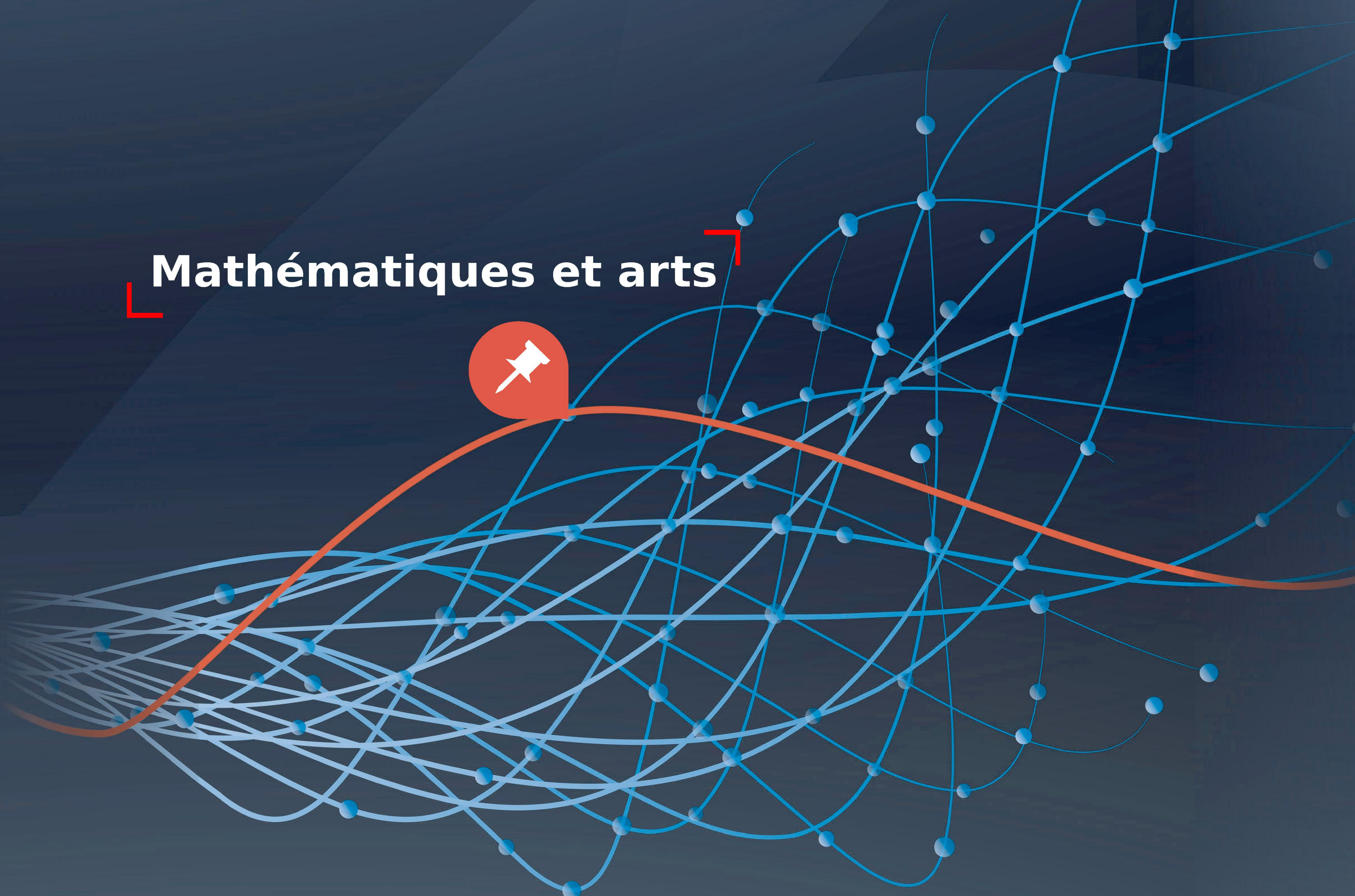
Le bulletin de l'APMEP - N° 537

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Juillet, Août, Septembre 2020

Mathématiques et arts



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2020-2021 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Septembre 2020. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Mathématiques du crochet et crochet mathématique

Si on vous a dit crochet, vous pensez aux traditionnels napperons ? Bérénice Delcroix-Oger nous fait découvrir de splendides œuvres d'art et les mathématiques qui s'y cachent...

Bérénice Delcroix-Oger

Les origines du tricot au crochet sont incertaines. Cependant, son existence est avérée dans la forme qu'on lui connaît à partir du XVII[e] siècle. Le crochet a connu un premier âge d'or sous l'Angleterre victorienne avec notamment le développement en Irlande d'une dentelle au crochet appelée *guipure irlandaise*.

Outre son utilisation pour la fabrication d'objets en dentelles et de pièces d'habillement, notamment avec les carrés Granny, le crochet est de nos jours très utilisé pour la représentation de personnages et objets en 3D, appelés *amigurumi* et importés du Japon au début des années 2000. Cet article présente une autre utilisation récente du crochet : le crochet mathématique. Mais tout d'abord, qu'est-ce que le tricot au crochet ? Le tricot au crochet est très différent du tricot aux aiguilles, tant par le matériel que par les techniques utilisées. En effet, si le tricot aux aiguilles est pratiqué sur deux aiguilles, en gardant sur celles-ci toutes les mailles d'un rang, le tricot au crochet n'utilise qu'une seule aiguille au bout recourbé, appelée crochet, sur laquelle il n'y a qu'une seule maille.

Figure 1. *Crochets.*

Cette différence fait qu'au lieu de faire avancer un « front de mailles », le crochet avancera en spirale ou en aller-retour suivant le type de réalisation souhaité (voir figure 2). S'il y a une différence du point de vue de la réalisation, et de sa facilité, entre tricot au crochet et tricot aux aiguilles, il n'y en a pas au niveau de la géométrie du rendu final. Toutes les réalisations présentes dans cet article peuvent donc être réalisées selon les deux techniques. J'ai choisi ici de les réaliser au crochet en mailles serrées, parce que cela permet d'obtenir un résultat plus rigide, moins élastique qu'avec d'autres points classiques, qui permet de visualiser plus aisément les surfaces réalisées. Dans les diagrammes qui suivront, une maille serrée, qui a globalement l'aspect d'un π, sera modélisée par un triangle pointant vers le bas de la maille.

Figure 2. *Illustration de crochet plat et de crochet rond. Sur chaque réalisation une maille est entourée en vert.*

Nous présenterons dans cet article l'apport réciproque entre mathématiques et tricot. D'une part, en effet, l'étude mathématique de surface permet leur réalisation précise sous forme de tricot. D'autre part, le tricot est un outil très efficace pour la représentation de surfaces mathématiques.

Quelques figures géométriques au crochet

Commençons d'abord par les formes géométriques basiques pouvant être obtenues en crochet.

La forme la plus simple est incontestablement le rectangle. Il est obtenu en aller-retour en tricotant une maille au-dessus de chaque maille. Un exemple est présenté en figure 3.

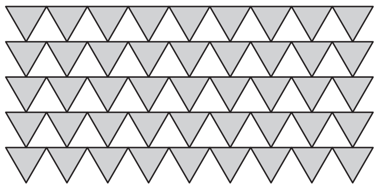


Figure 3. *Diagramme d'un rectangle.*

Remarquez ici que la taille de la maille limite le type de représentations possibles, de la même manière qu'un écran est limité par la taille d'un pixel. Il sera donc techniquement impossible d'obtenir un rectangle de n'importe quelle taille. Celui-ci ne pourra qu'être approximé, d'autant plus finement que le fil utilisé sera fin. Ceci n'est pas très grave : l'intérêt du crochet n'est pas dans la représentation au millimètre près d'un rectangle de taille donnée, ce pour quoi l'impression 3D sera toujours plus efficace, mais dans la représentation proportionnée de surface.

Cette pixellisation due à la technique employée se ressent principalement pour la réalisation de triangles. Ainsi, les triangles auront leurs bords plus ou moins crénelés. Les propriétés homothétiquement stables, c'est-à-dire stables par agrandissement et réduction, comme le fait d'être rectangle ou isocèle, pourront en revanche être représentées fidèlement : l'angle droit est obtenu en faisant toujours une maille au-dessus de la maille de l'angle et la symétrie du diagramme se traduira toujours par une symétrie de l'objet obtenu. Des exemples de diagrammes sont présentés en figure 4.

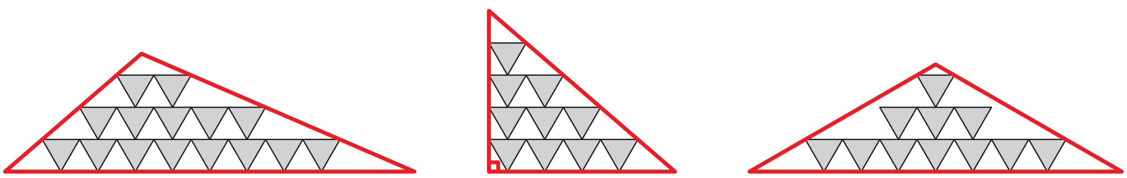


Figure 4. *Diagrammes d'un triangle quelconque, d'un triangle rectangle et d'un triangle isocèle.*

Après le rectangle et le triangle, la figure géométrique la plus simple est le disque. Une première manière de l'obtenir serait de pixelliser le cercle de la même manière que sur un écran d'ordinateur [1]. Il existe cependant une autre manière de procéder en prenant en compte les symétries du cercle. En effet, le cercle est invariant par rotation : il est possible de prendre cette invariance en compte en tricotant non plus en aller-retour, mais de manière circulaire.

Le schéma de tricot du disque est un schéma classique que vous trouverez facilement dans les ouvrages spécialisés. L'incantation est toujours la même quelle que soit la grosseur du fil : on commence par un disque de 6 mailles puis l'on tricote 2 mailles dans une au tour suivant, puis 3 mailles dans 2 à celui d'après, et ainsi de suite. Ici, l'expression « tricoter $n+1$ mailles dans n » peut sembler déroutante, mais il s'agit de tricoter une maille dans toutes les mailles sauf une, dans laquelle on tricotera deux mailles. Le choix de la maille dans laquelle faire cette augmentation peut sembler anodin, mais influera sur la forme finale. En effet, si l'augmentation a toujours lieu au début du groupe de mailles considéré, la forme obtenue sera entre l'hexagone et le disque. Le diagramme correspondant est représenté en figure 5.

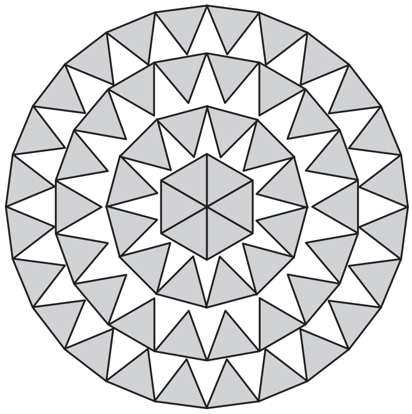


Figure 5. *Diagramme de crochet du disque.*

Pour des raisons pratiques, les mailles non centrales sont représentées par des trapèzes courbés. Cependant, ce diagramme soulève plusieurs questions :

1. Comment être sûr que l'on obtienne bien une approximation du disque, et non d'un ovale par exemple ?
2. Que se passe-t-il si l'on change les paramètres : si l'on commence avec un autre nombre de mailles, ou si l'on augmente le nombre de mailles différemment ?

Tout d'abord, nous noterons h la hauteur de la maille et l sa plus grande largeur, en haut de la maille. Pour connaître le lien entre l et h, on suppose d'abord que le disque obtenu au premier tour est effectivement un disque (et non un cône par exemple). Cela impose la relation $2\pi h = 6l$. Au n-ième rang, le périmètre du disque obtenu est lN_n où N_n est le nombre de mailles de ce rang d'une part. D'autre part, le rayon du disque alors obtenu est nh : on a donc aussi la relation $2\pi nh = lN_n$. L'unique solution de ce système d'équations est alors $N_n = 6n = N_{n-1} + 6$, qui conduit au diagramme usuel.

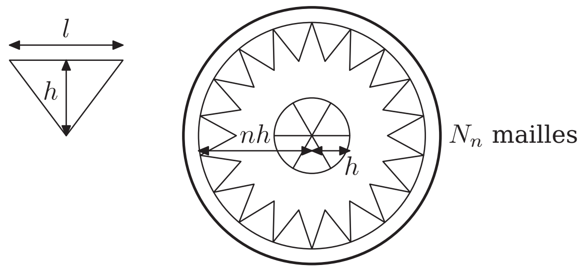


Figure 6. *À gauche, une maille ; à droite, la modélisation mathématique du diagramme du disque.*

Cependant, nous partons ici d'un cercle de 6 mailles : que se passe-t-il si nous augmentons ou diminuons ce nombre initial ?

Si le nombre de mailles initiales est inférieur à 6, le premier cercle formé est plus petit que $2\pi h$: nous obtenons alors un cône.

En effet, notant θ l'angle au sommet du cône obtenu, on a les relations suivantes :

$$2\pi h \sin(\theta) = lN_1 \quad (1)$$
$$2\pi nh \sin(\theta) = lN_n, \quad (2)$$

ce qui donne $N_n = nN_1 = N_{n-1} + N_1$. Prenant par exemple $\theta = 30°$, on a $2\pi h \sin(\theta) = \pi h = 3l$, d'après ce qui précède : le cône d'angle 30° est alors obtenu en faisant d'abord un cercle de 3 mailles puis augmentant de 3 mailles à chaque rang.

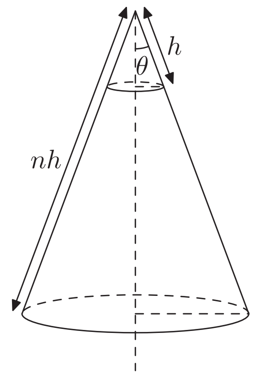


Figure 7. *Cône d'angle θ.*

Notez que, comme signalé plus haut, il n'y a qu'un nombre fini de θ effectivement réalisables.

Si le nombre de mailles initiales est supérieur à 6, le périmètre du premier cercle formé est plus grand que $2\pi h$: on obtient alors une surface qui a une singularité et qui est euclidienne partout ailleurs. Cela veut dire que le voisinage de chaque point de cette surface, excepté le centre, ressemble à un bout de plan. C'est ici qu'apparaît l'avantage du tricot sur un écran de pixels : il permet de modéliser des surfaces qui ne peuvent pas être représentées dans le plan. Pour obtenir la surface précédente à partir de tissu, il faudrait coudre ensemble deux disques en tissu sur lesquels des morceaux auraient été enlevés, comme en figure 8.

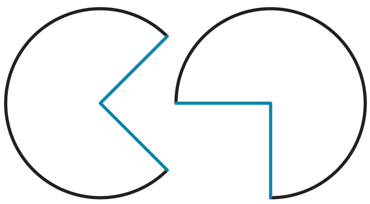
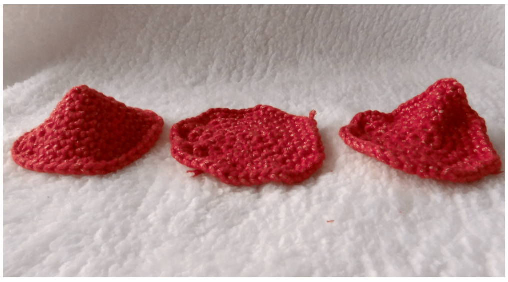


Figure 8. *Disques de tissu à recoller suivant la ligne bleue pour obtenir une surface correspondant à une réalisation dont le nombre de mailles initial est supérieur à* 6.

Que se passe-t-il maintenant si l'on change la manière d'augmenter le nombre de mailles d'un rang à l'autre ?

Supposons que $N_n = f(N_{n-1})$, avec $N_0 = 0$ par convention. On a vu plus haut que :

- si $f(x) = x + b$, l'objet obtenu est un disque si $b = 6$, un cône si $b < 6$ et une composée de deux pacmans sinon ; le point commun de ces trois cas est que, mis à part au centre, le voisinage de tout point ressemble à un morceau de plan ; on obtient donc une surface *euclidienne* ;
- si $f(x) = ax$, avec $a > 1$, la surface obtenue est *hyperbolique*. Nous traiterons ce cas dans la section suivante.



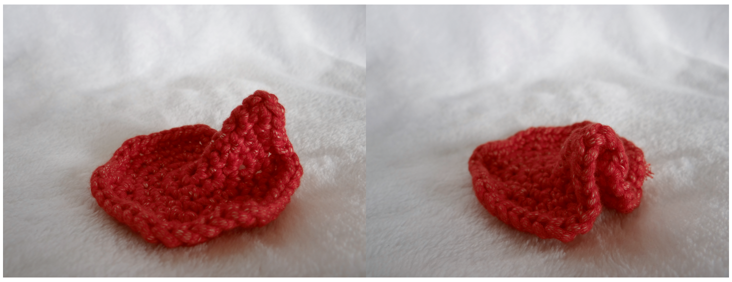


Figure 9. *À gauche, réalisations pour $b = 4$, $b = 6$ et $b = 8$. À droite, détails pour $b = 8$.*

Nous ne parlerons pas ici du cas de la sphère, mais celui-ci a été traité à différentes reprises sur la toile (▶, ▶).

Crochet hyperbolique

La plupart des espaces considérés dans la vie courante sont euclidiens, il existe cependant d'autres types de géométrie. Le globe terrestre est ce qui s'appelle un *espace sphérique* : deux navettes partant dans la même direction se rapprocheront toujours. Imaginez maintenant un monde où deux navettes se dirigeant dans la même direction s'éloigneraient, au contraire, l'une de l'autre. Un espace vérifiant cette propriété est un *espace hyperbolique*. C'est ce type d'espace que l'on obtient en crochetant a mailles dans chacune des mailles du rang précédent, pour $a > 1$. Des réalisations concrètes de ce genre de surface sont représentées figure 10.

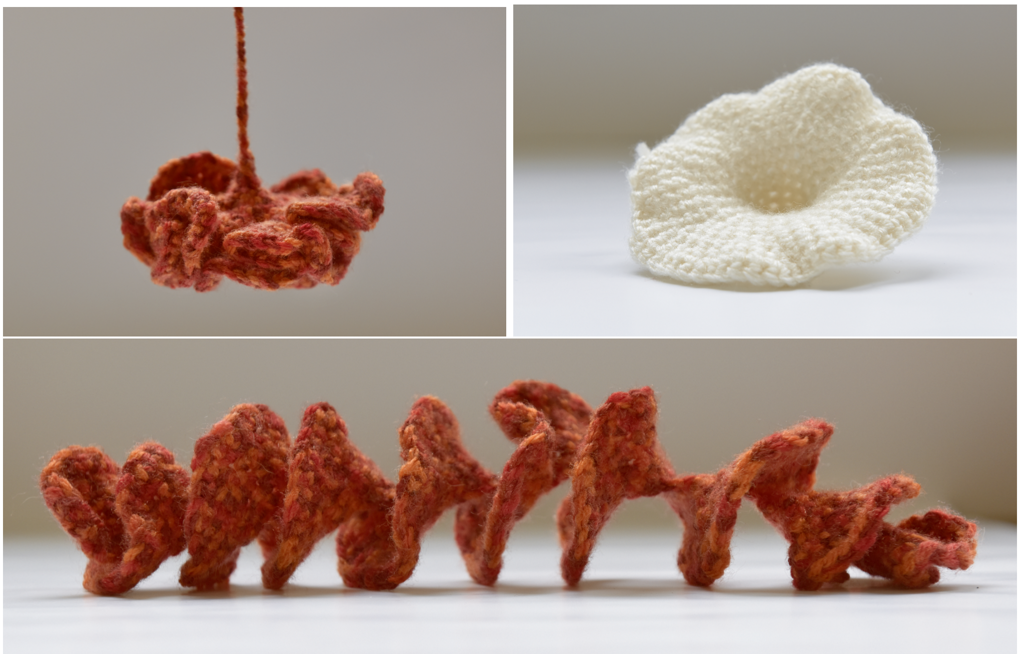


Figure 10. *Trois surfaces hyperboliques, photographiées par Éric Le Roux, UCBL.*

Les surfaces hyperboliques du type de celle représentée en figure 11 sont appelées *pseudo-sphères hyperboliques* et ont été utilisées pour représenter des coraux lors de l'exposition *coral reef*.

Figure 11. *Pseudo-sphère hyperbolique.*

Pour plus d'informations sur le crochet hyperbolique, de nombreux tutoriels et réalisations sont disponibles sur des blogs [2, 3, 4]. Henderson et Taimida étudient de plus dans l'article [5] le plan hyperbolique.

Ruban de Möbius, bouteille de Klein et surface de Boy

Le tricot est aussi d'une redoutable efficacité pour la représentation spatiale de surfaces non orientables. L'exemple le plus simple d'une telle surface est le *ruban de Möbius*. Il est possible de le construire en prenant une bande de papier dont on recolle ses extrémités en les faisant coïncider comme indiqué ci-dessous.

Figure 12. *Modèle du ruban de Möbius.*

Figure 13. *Ruban de Möbius photographié par Éric Le Roux, UCBL.*

La surface est dite *non-orientable* parce qu'il est impossible de distinguer un dessus et un dessous : si l'on commence à colorier l'un des côtés d'une couleur, tout le ruban de Möbius sera uniforme à la fin de la coloration. Cette surface a notamment été rendue célèbre par le tableau correspondant d'Escher, dans lequel des fourmis la parcourent.

L'avantage du tricot sur le papier est qu'il permet de créer un ruban de Möbius sans aucune couture, ni collage. Pour ce faire, il suffit de piquer dans l'arrière de la première maille du rang à la fin du premier rang et de continuer à tricoter en rond. Une réalisation au crochet d'un ruban de Möbius est visible sur la figure 13.

Une autre surface non orientable réalisable au tricot avec une seule couture est la bouteille de Klein. Elle peut être obtenue en recollant ensemble les bords d'un ruban de Möbius, comme indiqué figure 14.

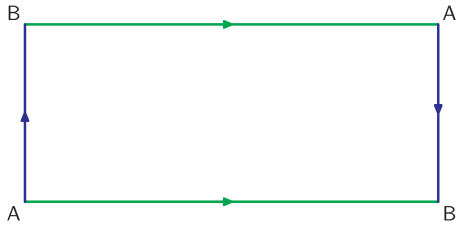


Figure 14. *Modèle de la bouteille de Klein.*

Figure 15. *Bouteille de Klein.*

Le recollement des côtés bleus donne un ruban de Möbius qui a un unique bord vert. On recolle ensemble les points de ce bord de part et d'autre du ruban. Le résultat obtenu est visible figure 15. Le nom « bouteille » vient du fait qu'elle peut être obtenue en reliant le fond d'une bouteille à son goulot.

Une dernière surface non orientable réalisable au tricot sans couture est la surface de Boy. Elle peut être décrite comme le recollement du bord d'un disque sur le bord d'un ruban de Möbius. Il est donc possible de la réaliser en tricotant un ruban de Möbius puis en diminuant petit à petit le diamètre du tricot. Lors de cette opération, la surface s'auto-intersecte, c'est-à-dire qu'il faut faire passer les mailles au travers du tricot déjà réalisé.

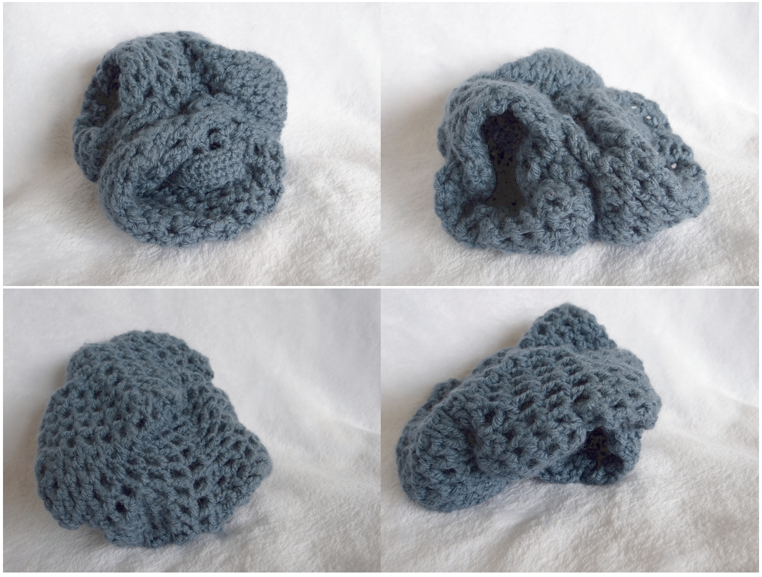


Figure 16. *Surface de Boy sous différents angles.*

En conclusion, il y a un apport réciproque entre mathématiques et tricot. L'étude mathématique de surfaces permet leur réalisation d'une part. D'autre part, le tricot est un fabuleux médium pour la réalisation facile et concrète des surfaces mathématiques dans un matériau économique et souple. Pour finir, nous n'avons présenté ici qu'une partie des réalisations possibles : de nombreux autres objets mathématiques ont été réalisés, tels que les nœuds et entrelacs (▶), les surfaces de Seifert (▶, ▶), des automates cellulaires, des représentations de nombres premiers, et beaucoup d'autres (▶, ▶).

Figure 17. Coral Forest à *la Lehigh University Art Galleries. Photo ©IFF, de* ▶.

Références

[1] F. Boucher. « Cercles discrets ». APMEP. In : *Au fil des maths* n° 530 (2018), p. 50-66.

[2] *Blog* Math and Fiber. ▶.

[3] *Blog of Daina Taimina*. ▶.

[4] *Blog* The Home of Mathematical Knitting. ▶.

[5] D. Henderson et D. Taimida. « Crocheting the Hyperbolic Plane ». In : *Mathematical Intelligencer* Volume 23. N° 2 (2001), p. 17-28.

Bérénice Delcroix-Oger est maître de conférence à l'Université de Paris, à l'Institut de Recherche en Informatique Fondamentale (IRIF). Elle est spécialisée en combinatoire algébrique, et réalise des surfaces au crochet à ses heures perdues.

bdelcroix@irif.fr

*
* *

JEUX-Écollège 4

Une brochure APMEP pour la rentrée

Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège ! Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6ème. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou (parussion début octobre 2020)
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)
Prix public : 22 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2020 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur https://www.apmep.fr

NOM (établissement ou personne) : ....
Adresse : ....
Code Postal : .... *Ville :* .... *Pays :* ....
Téléphone : .... *Adresse courriel :* ....
Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : ....
Adresse de livraison : ....
Adresse de facturation : ....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1er degré ☐ 2e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : `contactrgpd@apmep.fr`.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur https://www.apmep.fr.

- ☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- ☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- ☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur `Chorus.pro` *; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :* ....

Date : .... *Signature :* .... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du nº 537

Mathématiques et arts

APMEP

www.apmep.fr