

Le bulletin de l'APMEP - N° 537

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Juillet, Août, Septembre 2020

Mathématiques et arts



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2020-2021 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2020. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Le pourquoi et le comment

Dans cette opinion sur la relation entre arts et mathématiques, Bernard Parzysz montre comment les mathématiques peuvent être source d'exploration et de création artistique, facilitant la compréhension des œuvres, tout en laissant une part au mystère et à l'inexplicable.

Bernard Parzysz

Nous le savons, les mathématiques sont à même de nous fournir des grilles de lecture nous permettant de mieux comprendre le monde qui nous entoure, de découvrir « *les choses qui sont cachées derrière les choses* », comme le fait dire Jacques Prévert au peintre de *Quai des Brumes* (Marcel Carné, 1938). C'est également vrai en ce qui concerne l'art, et mes incursions — ou devrais-je dire excursions ? — dans des domaines variés qui lui sont liés m'ont maintes fois permis de le vérifier et de découvrir ainsi des richesses insoupçonnées. Mes échanges avec des spécialistes (musiciens, peintres, architectes, archéologues...) m'ont également convaincu qu'un bagage scientifique relativement modeste peut être un moyen de communication efficace entre des domaines différents et procurer à chacune des parties une vision à la fois plus étendue et plus profonde d'une œuvre, en nous mettant à même d'approcher — même si ce n'est que de façon partielle et incomplète — ses « pourquoi » et ses « comment ».

Il m'est tout d'abord apparu que, dans quelque domaine que ce soit, réaliser une œuvre d'art implique de satisfaire à des règles, liées au genre d'œuvre que l'on veut créer : une fugue, un sonnet ou un haïku obéissent à des principes de com-

position, un tableau repose sur une organisation de sa surface, le bois et la pierre ne se laissent pas sculpter n'importe comment, etc. C'est ainsi qu'André Gide a pu écrire que « *l'art naît de contraintes* », et le styliste Christian Lacroix préciser que « *dans l'art, la contrainte est un instrument pour aller plus loin* ». C'est d'ailleurs en poussant cette idée à l'extrême qu'a été créé l'Ouvroir de Littérature Potentielle (OuLiPo), au sein duquel a notamment œuvré Georges Perec¹. C'est à l'OuLiPo que Jean Lescure a inventé la méthode d'écriture « S + 7 », où dans un texte on remplace chaque substantif par le septième qui le suit dans un dictionnaire donné, méthode qui nous évoque bien sûr la notion de translation ; c'est là aussi que Raymond Queneau a eu l'idée de son livre *Cent mille milliards de poèmes* [1], dont le titre s'explique grâce à la combinatoire d'une structure arborescente. Dans ces contraintes, les outils mathématiques ont souvent un rôle à jouer, en permettant d'accéder aux principes sous-jacents — mais implicites — régissant l'œuvre, à leur fonctionnement (le « comment »), et même, parfois, à leur raison d'être (le « pourquoi »). À l'appui de mon propos, je prendrai maintenant trois petits exemples vécus.

1. Par exemple, son roman *La disparition* (1969, Gallimard) n'utilise jamais la voyelle e, et son autre roman *Les Revenentes* (1972, Julliard) n'utilise au contraire que cette seule voyelle.



En musique, d'abord

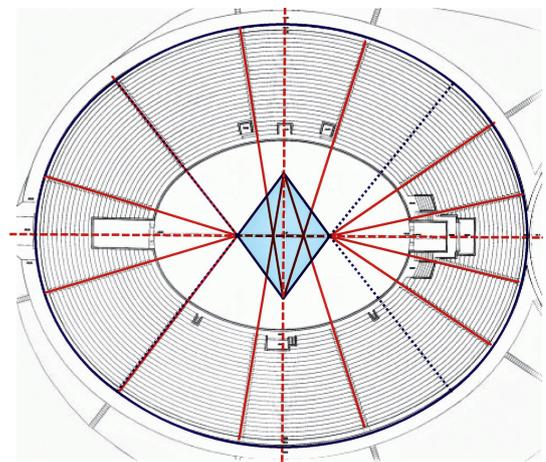
Dans une fugue, une même petite phrase mélodique (le sujet), se fait entendre tout le long de l'œuvre. Lorsqu'elle est reprise à l'unisson ou à l'octave elle reste inchangée, mais lorsqu'elle est reprise à la quinte elle est légèrement modifiée. Pourquoi ? Ici apparaissent la notion de tonalité (sous-ensemble de 7 notes parmi les 12 de l'échelle), celle de tonalités voisines (parties d'intersection maximale), et tout s'explique. Il arrive aussi que le sujet soit « renversé » (les intervalles conservent la même amplitude, mais les intervalles montants deviennent descendants et inversement) ; il arrive même qu'il devienne « rétrograde » (énoncé à l'envers, de la dernière à la première note), et on peut même combiner ces deux modifications en un renversement rétrograde [2]. On aura reconnu, avec ces quatre formes, un groupe isomorphe au « groupe du matelas », celui des symétries du rectangle². À l'écoute d'une œuvre de Bach, par exemple, attendre et repérer les diverses apparitions du sujet sous diverses formes procure assurément un sentiment de connivence avec le compositeur, et on ne sait ce qu'il faut admirer le plus, ou le résultat, ou la façon dont Bach a procédé pour l'obtenir. On se rend alors compte que son génie s'appuie sur une connaissance approfondie des règles de la tonalité et du contrepoint.



Les quatre apparitions du sujet du début de l'Art de la Fugue.

En architecture ensuite

On sait que les amphithéâtres romains sont — dit-on couramment — « de forme elliptique » [3], et que la construction de l'ellipse par la « méthode du jardinier » remonte à Apollonius³. Rien n'empêche donc de penser que les amphithéâtres sont effectivement elliptiques... sauf si on entreprend d'en construire un. Pourquoi ? Parce que tout autour de l'arène se situe la *cavea*, zone de gradins où viendront s'asseoir les spectateurs. Or, tracer différentes rangées de gradins avec des ellipses de mêmes foyers conduit à créer un espace plus large vers les extrémités du grand axe, et plus étroit vers les extrémités du petit axe. Si on veut avoir le même confort sur tout le pourtour — comme on peut effectivement le constater sur place —, on va être contraint de changer la position des foyers pour chaque rangée. Et ici on peut imaginer qu'un architecte romain a eu un jour une illumination⁴. Laquelle ? Celle de substituer aux ellipses des ovales à quatre centres.



Plan de l'amphithéâtre d'Avenches (Suisse).

Ainsi, sans modifier la position des centres, on pouvait obtenir toute une famille de courbes équidistantes. Et du coup le problème géométrique était résolu de façon élégante, uniquement grâce à des tracés de cercles. Cerise sur le gâteau : l'ovale de l'amphithéâtre est pratiquement indiscernable de l'ellipse de mêmes sommets [4].

2. Encore appelé groupe de Klein.
 3. Proposition 52 du livre III des *Coniques*.
 4. Travaux de J.-C. Golvin,



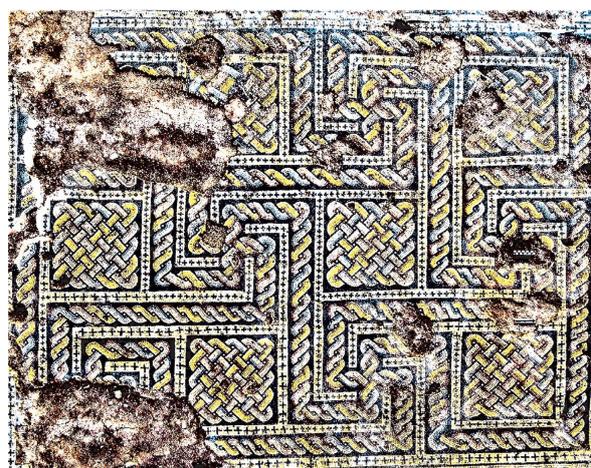
Dans le domaine des arts décoratifs enfin

Je me suis notamment intéressé à la mosaïque d'époque romaine à décor dit « géométrique ». Selon Wikipedia, « *la distinction entre art décoratif et bel art est surtout fondée sur la fonctionnalité, les intentions, l'importance, le statut d'œuvre unique ou de production liée à un seul artiste* » [5]. Pour un pavement de mosaïque, la fonctionnalité est indubitable : il est fait pour qu'on marche dessus et fournit un sol résistant facile à nettoyer, les intentions sont de faire voir l'opulence du commanditaire, l'importance résulte du fait que seules les pièces d'apparat en étaient revêtues, le statut d'œuvre unique va de soi et l'artiste (le *pictor*) conçoit le décor, prépare et supervise le travail de la petite équipe qui posera le pavement. Le même article de Wikipedia précise que « *ce champ inclut tous les artisanats de l'architecture d'intérieur et de la décoration d'intérieur* », ce qui est bien en accord avec la mosaïque.

J'ai eu récemment l'opportunité d'étudier la totalité des pavements mosaïqués d'une villa romaine de la seconde moitié du IV^e siècle située à Rabaçal, près de Coimbra au Portugal [6], ce qui m'a permis d'effectuer un travail extensif sur un ensemble décoratif complet et cohérent, et de confronter mes hypothèses antérieures à de nouveaux exemples. Une particularité du décor de cette villa m'a notamment frappé : l'omniprésence de l'élément décoratif appelé « tresse ». L'abondance des tresses à deux, trois, quatre ou cinq brins a ainsi été pour moi l'occasion d'entreprendre une étude approfondie de leur composition et de leur mise en place.

Dans la mosaïque romaine, la tresse sert essentiellement de bordure de séparation entre différents panneaux, et à ce titre elle est perçue par les archéologues spécialistes du décor comme un élément banal et sans grand intérêt. C'est pourtant un motif qui vaut la peine qu'on s'y attarde,

car c'est l'un des lieux où l'on voit le mieux le travail du maître mosaïste, que ce soit dans la façon dont la tresse est mise en place à partir de tesselles⁵ isolées disposées très régulièrement en quinconce, la gestion des différents brins dans les bifurcations et les croisements, le camouflage des brins « orphelins » dans des endroits discrets, la répartition des différentes couleurs ou l'organisation générale de la surface. Celles de Rabaçal m'ont assurément passionné et j'y ai trouvé des réponses à beaucoup de « comment » que je me posais à propos de la mosaïque, même si je ne sais toujours pas pourquoi il y a tant de tresses dans le décor de cette villa ; peut-être s'agissait-il d'une spécialisation du mosaïste, ou d'un symbole, ou d'une fixation du propriétaire ?



Tresses du panneau 7 du triclinium de Rabaçal [6, fig. 214].

Bien sûr, s'efforcer de comprendre comment une œuvre artistique a été réalisée est insuffisant à dire pourquoi elle est belle, mais cela montre au moins qu'elle est le résultat d'un travail et d'une recherche : « *le génie ne fait rien que d'apprendre d'abord à poser des pierres, ensuite à bâtir, que de chercher toujours des matériaux et de travailler toujours à y mettre la forme* » [7]. Et, comme le chantait naguère Georges Brassens, « *sans technique un don n'est rien qu'une sal' manie* » [8].

5. Les petits éléments de pierre, de verre ou de céramique qui constituent la mosaïque.



J'espère avoir pu montrer, sur ces exemples, que les mathématiques constituent une voie particulièrement intéressante d'exploration, dans le domaine artistique comme dans bien d'autres. C'est pourquoi je plaide depuis longtemps pour une ouverture aussi large que possible de l'enseignement de notre discipline à des domaines d'application variés, par exemple en utilisant l'étude d'œuvres d'art comme source de problèmes. Certains élèves s'apercevront alors peut-être que la géométrie, l'algèbre, l'analyse, la statistique et les probabilités⁶ peuvent s'avérer des outils efficaces si l'on ne veut pas se contenter de rester seulement à la surface des choses, et ils pourront même avoir envie d'aller au-delà en fréquentant les lieux où l'art se donne à voir. Les collègues des autres disciplines ont bien évidemment un rôle incontournable à jouer dans cette démarche, aussi bien pour apporter leur point de vue que pour prévenir d'éventuelles dérives. Et je suis convaincu qu'ainsi tout le monde aurait à y gagner.

Références

[1] Raymond Queneau. *Cent mille milliards de poèmes*. Réédité en septembre 2006. Gallimard, juillet 1961. ISBN : 2-07-010467-2.

[2] Bernard Parzysz. « Musique et transformations. Analyse d'une œuvre contemporaine ». In : *Bulletin de l'APMEP* 509 (2014), p. 295-308.

[3] *Amphithéâtre romain*. Wikipedia .

[4] Bernard Parzysz. « Des ellipses... sans ellipses : les amphithéâtres romains ». In : *Bulletin de l'APMEP* 479 (2008), p. 772-780.

[5] *Arts décoratifs*. Wikipedia .

[6] Bernard Parzysz et Miguel Pessoa. *Les mosaïques de la villa romaine de Rabaçal. Formes et couleurs. Parcours géométrique*. Penela (Portugal) : Direction générale du Patrimoine, 2019.

[7] Friedrich Nietzsche. *Humain, trop humain*. aphorisme 192. Chap. IV.

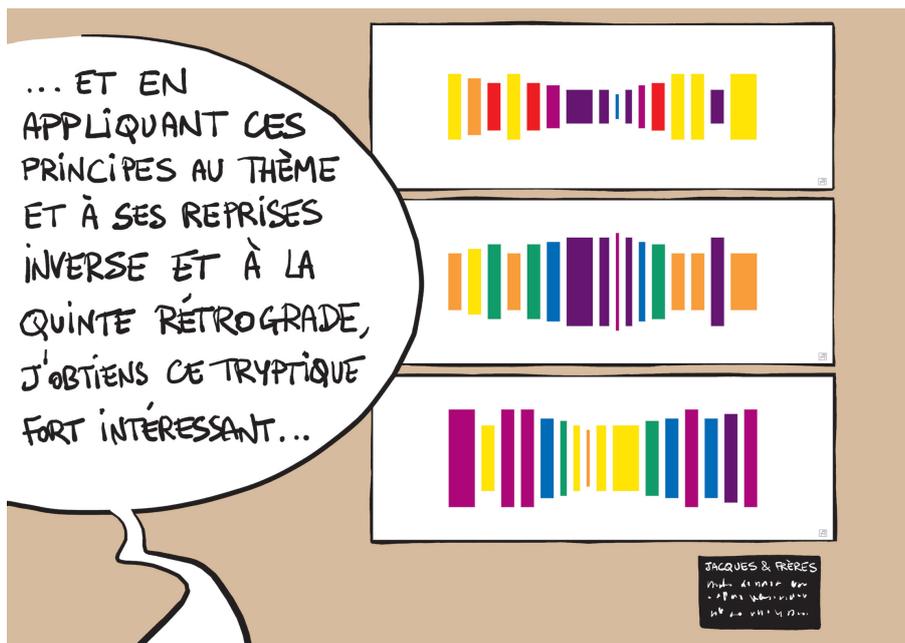
[8] Georges Brassens. *Le mauvais sujet repenti*. Paris : Éditions Ray Ventura, 1955.



Bernard Parzysz est professeur émérite de l'université d'Orléans, membre du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz) de l'université Paris-Diderot, et animateur à l'IREM de Paris-Diderot. Il collabore avec fidélité aux publications de l'APMEP.

parzysz.bernard@wanadoo.fr

© APMEP Septembre 2020



Jacques & frères.

6. J'ai effectivement été amené à les utiliser tour à tour lors de mes « incursions » dans les domaines artistiques.



JEUX-Écollège 4

Une brochure APMEP pour la rentrée



Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège ! Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6^{ème}. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou (parution début octobre 2020)
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)
Prix public : 7,7 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public



Abonnement 2020 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) :
Adresse :
Code Postal : Ville : Pays :
Téléphone : Adresse courriel :
Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) :
Adresse de livraison :
Adresse de facturation :

Catégorie professionnelle : étudiant stagiaire 1^{er} degré 2^e degré
 service partiel contractuel enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : contactrgpd@apmep.fr.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

- 60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- 56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- 65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- 64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

par chèque par mandat administratif par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur [Chorus.pro](https://www.chorus.pro) ; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :

Date : Signature : Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS
secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du n° 537

Mathématiques et arts

Éditorial

Opinions

✦ Le pourquoi et le comment — Bernard Parzysz

Pour un droit aux mathématiques ! — David Zerbib

Les représentations en barres : « *ni cet excès d'honneur, ni cette indignité* » — Richard Cabassut

Avec les élèves

✦ La magie des azulejos — Olivier Garrigue

Construction de connaissances spatiales en cycle 1 — M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet et S. Vansimpson

Labo de maths dans un lycée polyvalent — Nathalie Braun

1 Ouvertures 44

Qui a (vraiment) le pouvoir au Parlement ? — Antoine Rolland 44

3 3

✦ |00|, vous avez dit |00|? — Le collectif |00| 49

✦ La chute d'un tableau — Pierre Gallais 53

✦ Mathématiques du crochet et crochet mathématique — Bérénice Delcroix-Oger 57

7 ✦ Soyez malin, devenez paveur ! — Loïc Terrier 65

Récréations 70

10 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 70

Pour un accord de guitare — Michel Soufflet 73

20 Au fil du temps 77

Les énigmes de Luca Pacioli — Pierre Legrand 77

20 ✦ Un musée des mathématiques — Valérie Larose 86

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 87

31 Matériaux pour une documentation 89

Bonus 94

39 Le musée de JSM — Jean-Sébastien Masset 94



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr