Le bulletin de l'APMEP - N° 536

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2020

Les jeux sont faits !

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

En raison de la situation sanitaire incertaine,
les Journées Nationales 2020,
initialement prévues du 17 au 20 octobre 2020,
sont reportées en 2021, à Bourges, du 16 au 19 octobre

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX †, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD & Olivier REBOUX †
Dépôt légal : Juin 2020. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

AU FIL DES MATHS

APMEP

La Tour d'Hanoï

Vive les casse-tête ! La Tour d'Hanoï, vous connaissez ? Les auteurs nous présentent ce jeu et s'intéressent à l'aspect mathématique de son fonctionnement reposant sur la numération binaire.

Michel Boutin & Frédéric de Ligt

La Tour d'Hanoï[1] est un casse-tête inventé par le mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891) qui en a fait don au Conservatoire national des arts et métiers de Paris[2] en 1888. Ce casse-tête est constitué par une planchette sur laquelle on a fixé trois tiges ; sur l'une d'elles on a enfilé huit disques de diamètres décroissants, le plus petit en haut de la pile et le plus grand en bas.

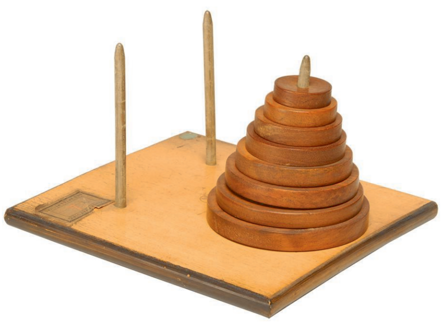


Figure 1. *Tour d'Hanoï sortie de sa boîte, et installée. © Musée des arts et métiers, Cnam, Paris / Photo Michèle Favareille [1].*

L'objectif du joueur est de transposer tous les disques d'une tige à une autre en respectant des règles de déplacement très précises : à chaque coup, le joueur prend un disque sur une tige et l'enfile sur une autre. Celle-ci pourra être soit vide, soit occupée par une pile d'un ou plusieurs disques. Dans ce cas, le joueur ne doit pas recouvrir un disque de diamètre inférieur à celui qu'il est en train de déplacer. Ainsi, un disque, quelle que soit sa grandeur, est toujours posé sur un plus grand que lui.

Un peu d'histoire

La Tour d'Hanoï est le seul jeu inventé par Édouard Lucas qui est entré dans la postérité. La première édition fut commercialisée en 1883 avec ce titre très curieux et apparemment très mystérieux : « La Tour d'Hanoï véritable casse-tête annamite. Jeu rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam). Mandarin du Collège Li-Sou-Stian ! »

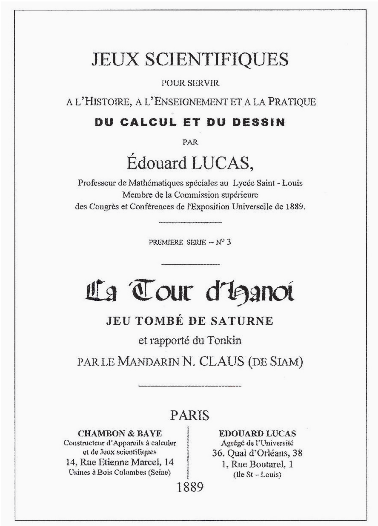
Figure 2. *Boîte de la Tour d'Hanoï. (hauteur : 10 cm, largeur : 14,5 cm, longueur : 15 cm, masse : 365 g.) © Musée des arts et métiers, Cnam, Paris / Photo Michèle Favareille [1].*

Le mystérieux professeur N. Claus (de Siam) fut rapidement identifié : il s'agit de Lucas d'Amiens[3], professeur au lycée Saint-Louis.

1. Cette contribution est extraite d'un article paru dans la revue *Le Vieux papier* [1].
2. .
3. Le lecteur averti d'*Au fil des maths* aura reconnu l'anagramme de l'auteur.

Nombre de déplacements

Dans le fascicule nº 3 de la série « Jeux scientifiques », intitulé « La Tour d'Hanoï, jeu tombé de Saturne » paru en 1889 [2, 3] sous le chapitre « L'exposant des puissances », Lucas donne une méthode simple pour calculer le nombre N de déplacements selon le nombre n d'étages : $N = 2^n - 1$.


JEUX SCIENTIFIQUES
POUR SERVIR
A L'HISTOIRE, A L'ENSEIGNEMENT ET A LA PRATIQUE
DU CALCUL ET DU DESSIN
PAR
Édouard LUCAS,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint - Louis
Membre de la Commission supérieure
des Congrès et Conférences de l'Exposition Universelle de 1889.

PREMIERE SERIE – Nº 3

La Tour d'Hanoi
JEU TOMBÉ DE SATURNE
et rapporté du Tonkin
PAR LE MANDARIN N. CLAUS (DE SIAM)

PARIS
CHAMBON & BAYE
Constructeur d'Appareils à calculer
et de Jeux scientifiques
14, Rue Etienne Marcel, 14
Usines à Bois Colombes (Seine)

EDOUARD LUCAS
Agrégé de l'Université
36. Quai d'Orléans, 38
1, Rue Boutarel, 1
(Ile St – Louis)

1889

Figure 3. *Page de titre du livret « Jeux scientifiques nº 3 » : La Tour d'Hanoï.*

Pour une tour de 8 étages, on a $2^8 - 1 = 255$ déplacements. Pour une tour de 64 étages, on a un nombre de manœuvres égal à $2^{64} - 1$, c'est un nombre de 20 chiffres. Cette valeur étant fastidieuse à calculer au XIXᵉ siècle, Lucas donne un moyen pour connaître le nombre de chiffres du résultat : $\mathrm{E}\left(\log(2^{64})\right) + 1$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Dans le même fascicule, il justifie mathématiquement la formule proposée pour le nombre de déplacements de la Tour d'Hanoï comportant 3 tiges et n disques.

Quel que soit le nombre de disques, le plus grand d'entre eux n'est déplacé qu'une seule fois, mais le reste de la tour doit changer deux fois de tige, la première fois pour libérer le disque le plus bas et la seconde pour le recouvrir sur une autre tige. Ainsi, la totalité des déplacements, pour une tour de n disques est toujours égale à la somme de 1 déplacement (celui du grand disque) et de deux fois le nombre de déplacements correspondants à une tour de $n - 1$ disques. Par exemple pour 4 disques, on a les trois plus petits à déplacer (7 coups), puis le plus grand disque (1 coup), puis une seconde fois les trois plus petits (7 coups). On a donc $N_4 = 7 + 1 + 7 = 15$ déplacements. Ainsi $N_n = N_{n-1} + 1 + N_{n-1} = 1 + 2N_{n-1}$. Cette relation permet d'initier une suite récurrente dont la conclusion permettra d'établir une relation mathématique pour calculer directement le nombre de coups à effectuer pour déplacer n disques d'une tige à une autre : $N_n = 2^n - 1$.

Codage binaire et ternaire des déplacements

Le déplacement des disques suit inéluctablement un protocole précis qui fut décrit dès 1884 par le petit-neveu d'Édouard Lucas, Raoul Olive : *« Pour monter la tour sur trois tiges, quel que soit le nombre d'étages, il faut faire continuellement tourner le disque le plus petit, toujours dans le même sens de rotation circulaire tous les deux coups »*. En respectant ce protocole, la suite des déplacements peut être exprimée par une suite de nombres binaires dont le nombre de chiffres est égal au nombre de disques. La suite des nombres binaires qui correspond à celle des décimaux est appelée code binaire naturel.

Décimal		0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire naturel	2^0	0	1	0	1	0	1	0	1
	2^1	0	0	1	1	0	0	1	1
	2^2	0	0	0	0	1	1	1	1

Figure 4. *Code décimal, code binaire naturel. Le binaire naturel est un code pondéré, par exemple :*
$$6 = 0(2^0) + 1(2^1) + 1(2^2).$$

Mais on peut organiser une suite de nombres binaires de plusieurs manières dont l'une d'elles, appelée code binaire réfléchi, est caractérisée par ses propriétés d'adjacence : quand on passe d'un nombre au suivant, un seul chiffre binaire change (0 en 1 ou 1 en 0). Cette propriété fut mise à profit en 1872 par un clerc de notaire lyonnais du nom de Louis Gros pour modéliser le fonctionnement du baguenaudier, un autre casse-tête beaucoup plus ancien. Près d'un siècle plus tard, en 1947, un ingénieur américain, Frank Gray, a utilisé ce même code dans un brevet d'invention où il décrit un système capable de transmettre des informations par impulsions électriques pour le compte de la société Bell Telephone Laboratories. Le code binaire réfléchi est connu depuis cette époque sous le nom de code de Gray [4].

Binaire réfléchi (code de Gray)	d0	0	1	1	0	0	1	1	0
	d1	0	0	1	1	1	1	0	0
	d2	0	0	0	0	1	1	1	1

Figure 5. *Code binaire réfléchi (dit code de Gray).*

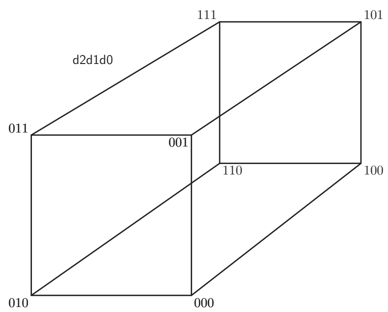


Figure 6. *Graphe montrant une propriété du code de Gray : un seul bit (binary digit) change d'état quand on passe d'un sommet à un des trois adjacents, par exemple : de 000 à un des trois sommets 001, 010 ou 100.*

Le code de Gray a un intérêt dans de nombreux domaines y compris dans les jeux, en particulier pour modéliser les déplacements des disques de la Tour d'Hanoï. Les déplacements des disques correspondent à une succession de nombres binaires. Considérons une tour à trois disques (d0 pour le plus petit, d1 pour le moyen et d2 pour le plus grand), et trois tiges (A, B, C).

Au départ, les disques sont sur la tige A. Sur la figure 7 on montre la succession des sept déplacements à partir de la situation codée 000. Le premier déplacement consiste à transposer le disque d0 de la tige A vers la tige B. Cette nouvelle situation est alors codée 001. En effet, seul le disque d0 a changé de position. La succession des coups pour déplacer la tour d'une tige à une autre revient à écrire le code de Gray quel que soit le nombre de disques.

Le plus petit disque se déplace une fois sur deux, toujours dans le même sens, et les autres sont mis sur la seule tige disponible permettant de ne jamais recouvrir un disque plus petit. En partant de la tige A, pour un nombre impair de disques (3 dans ce cas), si le cycle du petit disque est A–B–C–A–B alors la position finale de la tour sera la tige B ; en partant en sens inverse, A–C–B–A–C, la tour sera transposée en C. Pour un nombre pair de disques le scénario est inversé.

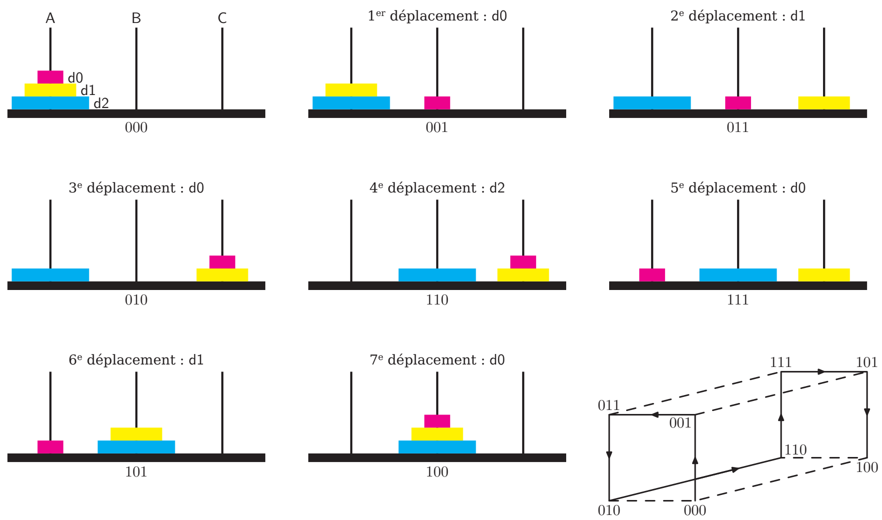


Figure 7. *Codage binaire réfléchi du déplacement des disques pour une tour 3 disques–3 tiges. Le graphe en bas à droite montre le cycle hamiltonien du déplacement des disques [1].*

La plupart des nombreuses publications au sujet de la Tour d'Hanoï sont des approches mathématiques ; par exemple, les deux articles publiés dans la revue *Pour la science*, par Jean Lefort [5] en 2008, et Jean-Paul Delahaye [6] en 2015, modélisent les déplacements des disques par un graphe, ce qui permet d'indiquer clairement tous les déplacements possibles quelle que soit la phase de jeu. Ils soulignent aussi la correspondance entre la Tour d'Hanoï et les structures fractales. Par exemple, sur la figure 8, les trois graphes montrent les positions pour trois types de tour avec un disque (I), deux disques (II) ou trois disques (III). Pour trois disques, les sommets du triangle correspondent aux positions des disques de départ ou à l'arrivée : AAA si les trois disques sont sur la tige A ; BBB s'ils sont sur la tige B ; CCC, sur la tige C. Le caractère de droite du code à chacun des sommets indique toujours où se trouve le petit disque d0, le caractère central indique la position d1, et le caractère de gauche donne la position d2, c'est-à-dire du grand disque.

Quelques exemples de déplacements :

AAA, les trois disques sont sur la tige A ;

AAA vers AAB, d0 passe de la tige A à la tige B ;

AAB vers ACB, d1 passe de la tige A à la tige C ;

ACB vers ACC, d0 passe de la tige B à la tige C.

Deux disques sont alors sur la tige C, etc. jusqu'à BBB.

Ces graphes indiquent toutes les possibilités pour déplacer la tour d'une tige à une autre. Les plus courts chemins suivent les côtés du triangle. En partant de la tige A sur laquelle on a les trois disques AAA, si on part à gauche on arrive sur le sommet AAB (c'est-à-dire que le petit disque est sur la tige B et les autres restent sur la tige A), si on part à droite on arrive sur le sommet AAC (alors le petit disque est sur la tige C, et les autres sont restés sur la tige A). En partant du sommet AAA on peut aller en AAC, puis en AAB, etc.

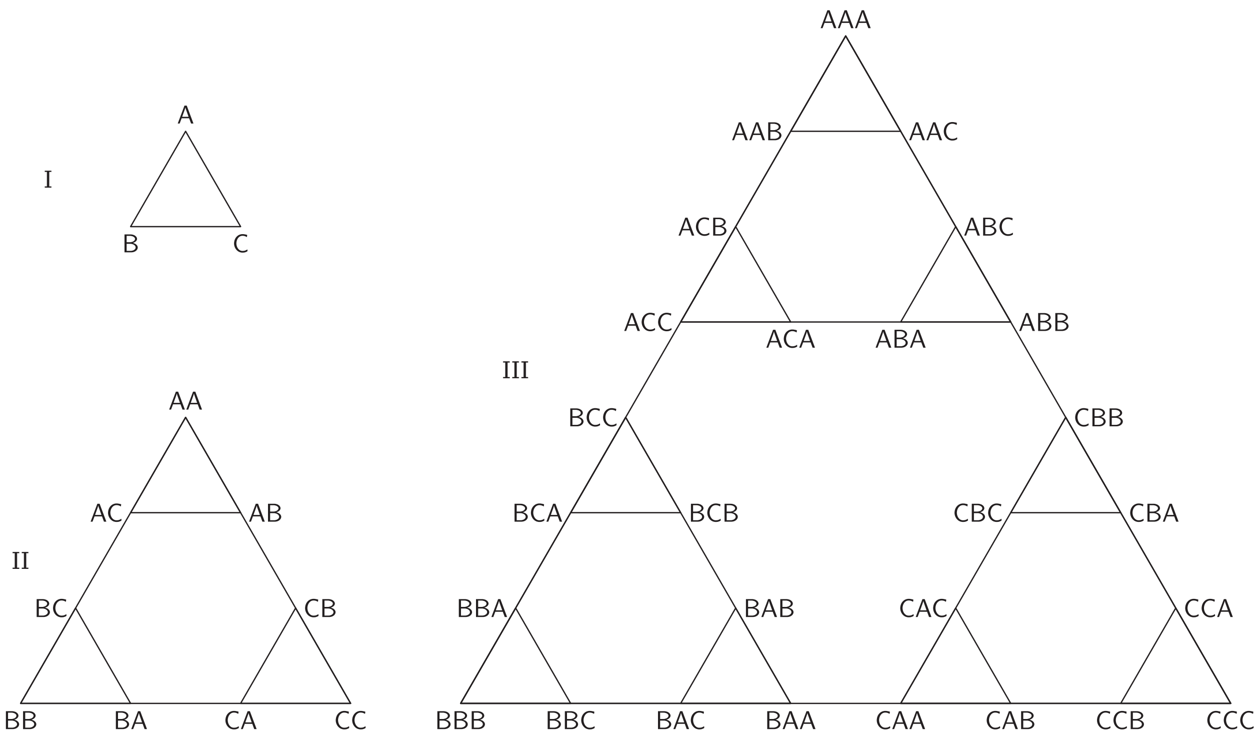


Figure 8. *Différents graphes de déplacements. Graphes relatifs aux déplacements pour une tour : un disque (I) ; deux disques (II) ; trois disques (III). Sur ces graphes, le codage des sommets est ternaire.*

Par exemple de AAA en BBB, on peut suivre les sommets AAA–AAC–ABC–ABB–CBB–CBC–CAC–CAA–BAA–BAC–BBC–BBB ; les règles de déplacement sont respectées, mais le chemin suivi n'est pas le plus court. À partir de ces graphes, on voit la naissance d'une structure fractale qui se préciserait en augmentant le nombre de disques.

Références

[1] Michel Boutin. « Les jeux dans les collections du Conservatoire national des arts et métiers de Paris, 4–La Tour d'Hanoï et le baguenaudier ». In : *Le Vieux papier* nº 431 (janvier 2019). Planches en couleur IX et X, p. 25-26.

[2] Michel Boutin. « Les jeux dans les collections du Conservatoire national des arts et métiers de Paris, 1–Le Jeu icosien (1859) ». In : *Le Vieux papier* nº 428 (avril 2018). Planche couleur I, p. 433-441.

[3] Édouard Lucas. *La Tour d'Hanoï, jeu tombé de Saturne*. Ce fascicule est le troisième numéro de la collection des « jeux scientifiques » qui en contient six ; tous édités à l'occasion de l'exposition universelle de 1889. Chambon & Baye et Édouard Lucas, Paris, 1889.

[4] François Sauvageot. « Quadrature ». In : *Au fil des maths* nº 528 (avril-juin 2018), p. 55-62.

[5] Jean Lefort. « La tour de Hanoï, des jeux d'esprit pour la science ». In : *Dossier pour la science* nº 59 (2008), p. 91-93.

[6] Jean-Paul Delahaye. « Les tours de Hanoï, plus qu'un jeu d'enfants ». In : *Pour la science* nº 457 (novembre 2015), p. 108-114.

Michel Boutin est enseignant en génie électrique à la retraite.

mb.boutin@wanadoo.fr

Frédéric de Ligt enseigne les mathématiques au lycée Élie Vinet de Barbezieux.

frederic.deligt2@gmail.com

*

* *

Courrier des lecteurs de Jean-François Mugnier

J'ai lu encore avec plaisir le nº 535 de Au fil des maths. *J'ai eu un peu de mal à comprendre les explications du flexagone (pp. 35-36), mais j'ai réussi ! Ne voulant pas découper ma revue, j'ai photocopié les deux pages et j'ai réussi à les coller recto-verso bien en face, mais avec deux épaisseurs de papier, ce n'est pas génial. . .*

Aussi, serait-il possible d'avoir, sur le site, un fichier constitué de deux pages qui pourraient être imprimées recto-verso de telle façon que les deux dessins tombent bien en face l'un de l'autre ? Vos informaticiens seraient-ils capables d'un tel miracle ? Cela fera la joie de nos petits-enfants !

Merci beaucoup et avec tous mes encouragements.

Réponse de la rédaction

Quelle bonne idée ! Nous vous remercions d'y avoir pensé. Nous avons déposé le fichier dans la revue numérique, imprimable en recto-verso. Amusez-vous bien !

* *

*

Sommaire du nº 536

Les jeux sont faits !

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr