

Le bulletin de l'APMEP - N° 536

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2020

Les jeux sont faits !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

**En raison de la situation sanitaire incertaine,
les Journées Nationales 2020,
initialement prévues du 17 au 20 octobre 2020,
sont reportées en 2021, à Bourges, du 16 au 19 octobre**

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX †, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD & Olivier REBOUX †

Dépôt légal : Juin 2020. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Le changement dans la continuité : applications du théorème des valeurs intermédiaires à des problèmes géométriques du plan

Le théorème des valeurs intermédiaires, emblème de l'analyse en Terminale, montre toute sa puissance pour résoudre aussi nombre de problèmes géométriques. C'est le programme que nous proposent Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Patrice Lassère en jouant à ranger des galettes dans des boîtes ou en les découpant.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty & Patrice Lassère

Introduction

« *Le changement dans la continuité* », voilà un slogan qui convient bien au personnel politique : dans les programmes électoraux proposés, on annonce qu'on veut bien changer des choses, car le changement est présenté comme un progrès, mais pas trop brusquement pour ne pas effrayer, en particulier sans « rupture » par rapport à l'existant, c'est-à-dire de manière « continue ». En procédant ainsi, on passe par toutes les étapes intermédiaires entre la situation de départ et celle à laquelle on veut arriver. En mathématiques, il y a un théorème simple d'analyse qui exprime cela, c'est ledit « théorème des valeurs intermédiaires » (TVI en abrégé). Il est présenté en annexe page 50 mais sa signification est simple : si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue de la variable réelle x dans $[a; b]$, toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ sont « visitées » par la fonction f .

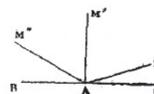
Ce résultat, qui relève de l'analyse élémentaire (que les formations anglo-américaines appellent le *calculus*), a des applications dans des situations où on ne l'y attend pas, notamment dans des problèmes d'essence géométrique. C'est ce que nous voulons présenter dans cette note avec quelques exemples dans le plan (nos sources d'inspiration ont été les références [1, 2, 3]).

C'était déjà, en 1849, la philosophie d'Adrien-Marie Legendre lorsque, dans ses « *Éléments de Géométrie* », il définit l'angle droit à la page 7 que nous reproduisons ci-dessous.

THÉORÈME.

Par un point pris sur une droite on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.

En effet, supposons qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A, elle formera deux angles adjacents MAC, MAB, dont l'un MAC, d'abord très-petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.



L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra donc plus grand que cet angle; par conséquent il y aura une position AM' de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Nous nous appuyons sur l'intuition géométrique des hypothèses de continuité requises, il n'est pas question ici de les démontrer mathématiquement.





La même température à des points antipodaux, est-ce possible ?

Proposition

Sur la Terre, il existe en chaque instant deux endroits du globe diamétralement opposés où la température est la même. . . c'est même vrai sur n'importe quel méridien ou parallèle de la Terre.

Bizarre non ? Voyons comment le TVI va nous conduire à ce résultat.

Plaçons-nous sur un méridien terrestre quelconque, c'est-à-dire sur un grand cercle (passant par les pôles) de la sphère que constitue la Terre ; sur la figure 1, nous en avons choisi un.

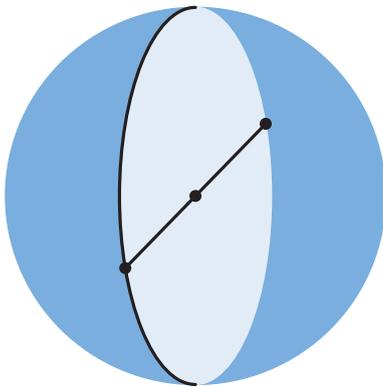


Figure 1. Un méridien terrestre.

Le long des points de ce méridien, plusieurs quantités varient de manière « continue », par exemple : la température, la pression, l'altitude par rapport au niveau de la mer. Supposer la continuité de ces quantités en fonction de la variable qui est le point où ces fonctions sont évaluées est une hypothèse physique raisonnable, ce que nous faisons ici. Choisissons comme exemple la fonction température. Eh bien, aussi étonnant que cela puisse paraître, il y a nécessairement deux points antipodaux sur ce même méridien qui sont à la même température ! Rappelons que deux points du cercle sont dits antipodaux ou diamétralement opposés lorsque les coordonnées

angulaires α des points diffèrent de π si les angles sont mesurés en radians (ou de 180° si les angles sont mesurés en degrés), ou encore si la corde qui les relie est un diamètre.

Soit \mathcal{C} le cercle de rayon 1 et de centre l'origine, c'est ce qui modélise notre méridien. Désignons par f la fonction température sur le cercle.

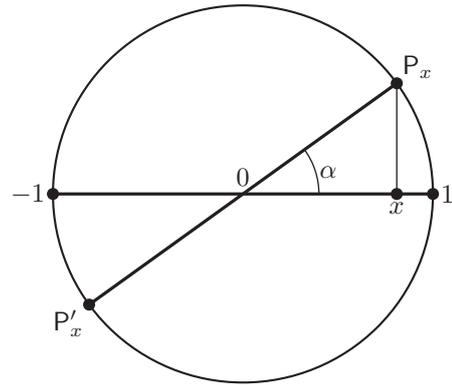


Figure 2. Deux points diamétralement opposés.

Définissons une nouvelle fonction continue $g : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante : pour tout point x entre -1 et 1 , soit P_x le point du demi-cercle supérieur obtenu comme intersection avec la perpendiculaire issue du point x sur l'axe horizontal, et donc de coordonnées cartésiennes $(x, \sqrt{1-x^2})$. Soit P'_x le point diamétralement opposé à P_x (voir figure 2). Posons

$$\begin{aligned} g(x) &= (\text{température en } P_x) - (\text{température en } P'_x) \\ &= f(x, \sqrt{1-x^2}) - f(-x, -\sqrt{1-x^2}). \end{aligned}$$

Les valeurs de la fonction continue g aux extrémités de l'intervalle $[-1 ; 1]$ sont opposées ; en effet

$$\begin{aligned} g(-1) &= f(-1, 0) - f(1, 0) ; \\ g(1) &= f(1, 0) - f(-1, 0). \end{aligned}$$

Par application du TVI à g sur $[-1 ; 1]$, il y a nécessairement un point x^* en lequel g s'annule. En conséquence, vu la définition de g ci-dessus, les températures aux points diamétralement opposés P_{x^*} et P'_{x^*} sont les mêmes.

Ce résultat a de quoi surprendre. . . et il surprend. Il pourrait même être étendu à deux fonctions,





comme la température et la pression : il y a nécessairement deux points antipodaux où la température et la pression sont les mêmes. Ces résultats découlent d'un théorème général dû à K. BORSUK, mathématicien polonais (1905–1982), et S. ULAM, mathématicien américain d'origine polonaise (1909–1984).

Peut-on livrer une galette dans une boîte carrée ?

Thomas se fait un peu d'argent de poche les fins de semaine en confectionnant des galettes¹ puis en les faisant livrer à ceux qui les commandent. Il n'est pas très adroit ni très expérimenté, ses galettes ont donc une forme parfois bizarre, mais elles sont d'un seul tenant quand même ; disons pour fixer les idées que le bord de la galette est une courbe fermée simple. Avant de les livrer, Thomas doit protéger ses galettes en les disposant dans des cartons plats rectangulaires dont il relève les bords. Il n'a aucune difficulté à le faire, les rebords du carton étant tangents à la galette sur les quatre côtés. Il pourrait même choisir l'orientation des côtés du rectangle en se fixant un angle θ par rapport à un axe horizontal Ox de référence (voir figure 3) ; c'est le rectangle « optimal » (« optimal » au sens où c'est, dans la direction θ , la boîte d'aire minimale contenant la galette) associé à cette disposition.

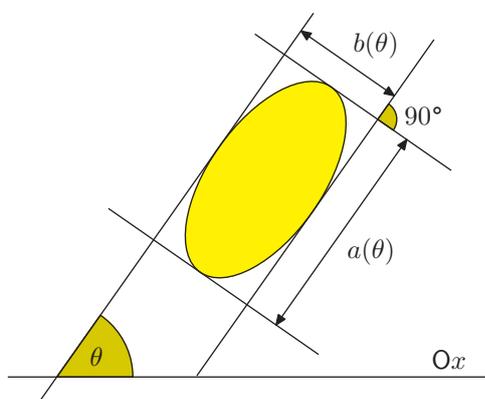


Figure 3. Le rectangle optimal dans la direction θ .

Pour des questions d'esthétique, Thomas aimerait bien que son carton soit carré et non pas seulement rectangulaire.

Question

En jouant sur l'angle θ , serait-il possible de déformer continûment le rectangle en carton associé de manière à avoir un carré ?

La réponse est oui, c'est encore une application du TVI, en supposant que le rectangle, c'est-à-dire en fait ses côtés $a(\theta)$ et $b(\theta)$, varie de manière continue avec θ , ce qui est une hypothèse raisonnable.

Soit $a(\theta)$ et $b(\theta)$ les côtés du rectangle de carton « optimal » associé à l'angle θ . En changeant θ en $\theta + 90^\circ$, ce qui jouait le rôle de $a(\theta)$ est tenu par $b(\theta)$ et vice versa.

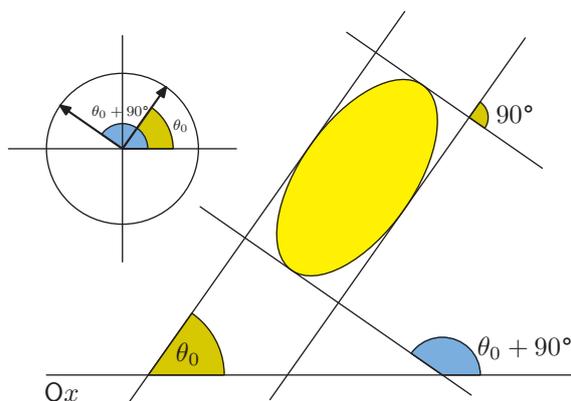


Figure 4. Échange des rôles entre $a(\theta)$ et $b(\theta)$.

Posons $f(\theta) = a(\theta) - b(\theta)$, θ variant de θ_0 (configuration initiale) à $\theta_0 + 90^\circ$ (configuration finale après une rotation de 90°). D'après ce que nous avons dit au-dessus, $f(\theta_0 + 90^\circ) = -f(\theta_0)$. Par application du TVI, il existe donc un angle θ^* entre θ_0 et $\theta_0 + 90^\circ$ pour lequel $f(\theta^*) = 0$, soit $a(\theta^*) = b(\theta^*)$; ainsi, par déformation continue, en passant de la « configuration rectangle » associée à θ_0 à celle associée à $\theta_0 + 90^\circ$, on est passé par une « configuration carrée » associée à θ^* (voir figure 5).

1. On peut adapter avec des crêpes en Bretagne, taloak au Pays basque, ou encore des pizzas...



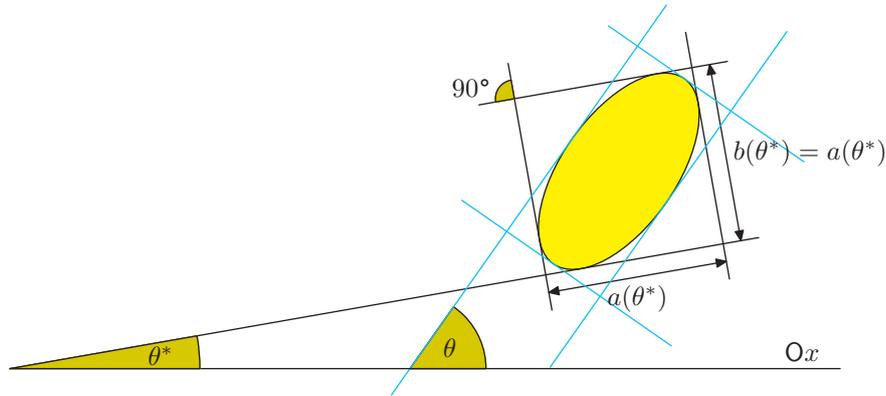


Figure 5. La boîte est carrée pour l'angle θ^* .

Peut-on couper une galette en deux parties égales d'un seul coup de couteau ?

La galette que Manon et Léa se sont fait livrer n'est pas ronde, elle est assez déformée même... Pourtant elles souhaitent la diviser en deux parts égales, et ce d'un seul coup de couteau.

Question

Est-il possible de diviser une galette en deux parts égales, et ce d'un seul coup de couteau ?

Eh bien, oui, quel que soit l'angle de coupe θ du couteau. Voici comment.

Coinçons tout d'abord la galette entre deux droites parallèles, faisant un angle θ avec un axe de référence Ox fixé, tangentes à la galette. Le couteau, assez long, également symbolisé par une ligne droite faisant un angle θ avec l'axe Ox , est déplacé de la position où toute la galette est à droite du couteau (sens de la flèche sur la figure 6) à la position où toute la galette est à gauche du couteau.

L'aire de la galette se trouvant à gauche du couteau varie de 0 à l'aire totale de la galette, de manière continue (c'est là notre hypothèse). En conséquence, il y a bien une position intermédiaire où l'aire de la partie de galette qui se trouve à gauche du couteau est égale à l'aire de la partie de galette qui se trouve à droite.

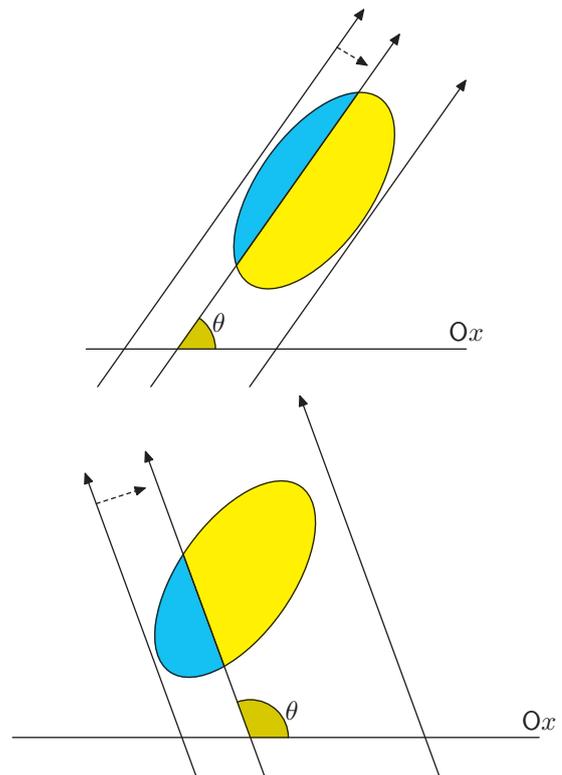


Figure 6. Déplacement du couteau.

Manon et Léa pourraient préférer la croûte constituant le bord de la galette. En suivant le même raisonnement que pour l'aire, et en faisant l'hypothèse raisonnable de la variation continue de la longueur d'un morceau du bord de la galette, il est possible de couper cette galette, d'un seul coup de couteau, de manière que les deux parts aient la même longueur de croûte.



La réponse aux questions posées ci-dessus est valable quel que soit l'angle θ .

Question plus difficile

Est-il possible de choisir l'angle de coupe θ de sorte que l'aire et la longueur de la croûte soient égales pour les deux morceaux résultants ?

La réponse est positive, voici pourquoi.

Pour une plage d'angles $[\theta_0; \theta_0 + 180^\circ]$, soit L_θ une ligne de coupe de la galette en deux parties égales. Cette droite « varie continûment » avec θ . . . C'est un argument un peu subtil de continuité qu'il faut accepter, il se manifeste de la façon suivante : désignons par $g(\theta)$ et $d(\theta)$ les longueurs des croûtes des deux parties de la galette, respectivement celle « à gauche » de L_θ et celle « à droite » de L_θ (voir figure 7).

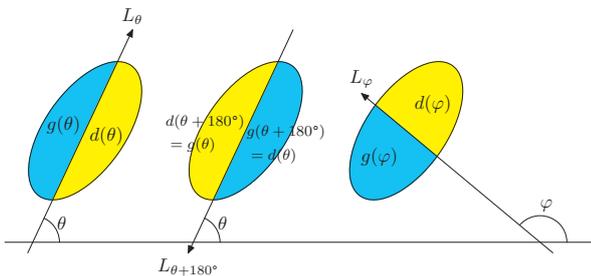


Figure 7. Les fonctions $\theta \mapsto g(\theta)$ et $\theta \mapsto d(\theta)$.

Ces fonctions g et d sont des fonctions continues de θ . Progressivement avec θ , ce qui est à gauche de L_θ devient à droite de celle-ci, de sorte que, finalement, $g(\theta_0 + 180^\circ) = d(\theta_0)$ et $d(\theta_0 + 180^\circ) = g(\theta_0)$. Appliquons le TVI à la fonction $e : [\theta_0; \theta_0 + 180^\circ] \ni \theta \mapsto e(\theta) = g(\theta) - d(\theta)$; elle est continue et $e(\theta_0 + 180^\circ) = -e(\theta_0)$. Il existe donc θ^* entre θ_0 et $\theta_0 + 180^\circ$ tel que $e(\theta^*) = 0$, soit $g(\theta^*) = d(\theta^*)$. Comme L_{θ^*} coupait déjà la galette en deux parties égales, le tour est joué.

Satisfaites de leur galette, Manon et Léa en commandent une deuxième. . . mais au moment de la sortir de la boîte de livraison, la galette se défait en deux. . . Elles ont donc deux morceaux disjoints, désignés par A et B sur la figure 8, dont la forme n'est certes pas trop compliquée, comme pour les galettes précédentes.

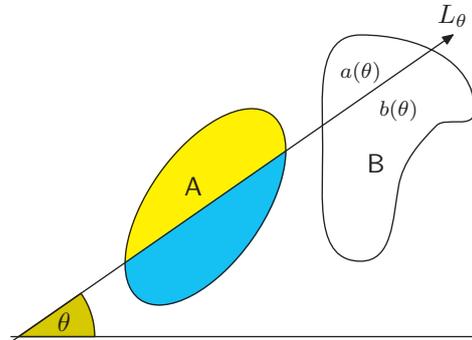


Figure 8. La ligne de coupe L_θ rencontre les deux galettes A et B.

Question

Est-il possible de diviser les deux morceaux disjoints A et B en deux parts égales, et ce d'un seul coup de couteau ?

La réponse est positive, comme nous allons le voir à présent. Le raisonnement est semblable à celui vu un peu plus haut (pour la division de l'aire et de la croûte d'une seule galette en deux parties égales).

Pour une plage d'angles $[\theta_0; \theta_0 + 180^\circ]$, soit L_θ une ligne de coupe du morceau A en deux parties égales. Cette droite « varie continûment » avec θ (c'est une hypothèse « physique » acceptable ici). Désignons par $a(\theta)$ et $b(\theta)$ les parties du morceau B, respectivement celle « à gauche » de L_θ et celle « à droite » de L_θ (voir figure 8). Ces fonctions a et b sont des fonctions continues de θ . Progressivement avec θ , ce qui est à gauche de L_θ devient à droite de celle-ci, de sorte que, finalement, $a(\theta_0 + 180^\circ) = b(\theta_0)$ et $b(\theta_0 + 180^\circ) = a(\theta_0)$. Appliquons le TVI à la fonction $e_B : [\theta_0; \theta_0 + 180^\circ] \ni \theta \mapsto e_B(\theta) = a(\theta) - b(\theta)$; elle est continue et $e_B(\theta_0 + 180^\circ) = -e_B(\theta_0)$. Il existe donc θ^* entre θ_0 et $\theta_0 + 180^\circ$ tel que $e_B(\theta^*) = 0$, soit $a(\theta^*) = b(\theta^*)$. En conséquence, L_{θ^*} coupe le morceau B en deux parties égales, et comme L_{θ^*} coupait déjà le morceau A en deux parties égales (définition même des L_θ), on a bien ce qu'on voulait.

Ce qui a été développé au-dessus n'est qu'un théorème d'existence. . . Pas facile de déterminer L_{θ^*} ;





on laisse à Marion et Léa (qui ont le coup d'œil) le soin de procéder à cette coupe « optimale » (ou à peu près).

Le lecteur se convaincra facilement que ce qui a été étendu à deux morceaux ne peut l'être à trois : avec trois morceaux disjoints de galette, on ne peut pas, en général, couper les trois en deux parties égales d'un seul coup de couteau (par exemple si les centres de trois disques disjoints ne sont pas alignés comme dans la figure ci-dessous).

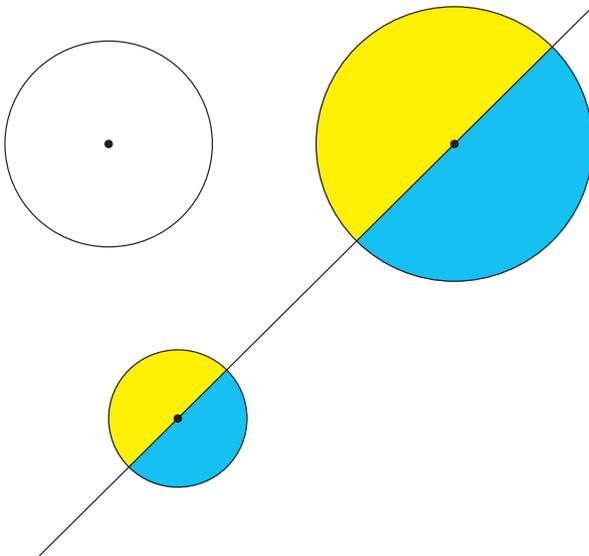


Figure 9. Pas de découpe égalitaire pour trois galettes circulaires lorsque leurs centres ne sont pas alignés.

Et si on essayait de couper une galette en quatre parties égales en seulement deux coups de couteau ?

Manon et Léa, maintenant devenues expertes en « coupes optimales » de galettes, ont décidé d'inviter leurs copains Maxime et Théo à partager une nouvelle galette. Lycéens ou étudiants, ils n'ont pas les moyens d'acheter plusieurs galettes, alors ils en commandent une seule, grande. Question : est-il possible de couper cette galette en quatre morceaux égaux, en (seulement) deux coups de couteau perpendiculaires ? La réponse est encore

oui, l'argumentation toujours basée sur le TVI comme dans les cas précédents. Voyons comment.

Considérons L_θ qui coupe la galette en deux parts égales, ainsi que $L_{\theta+90^\circ}$ qui coupe aussi la galette en deux parts égales (rappelons qu'une telle ligne de coupe existe pour tout angle θ).

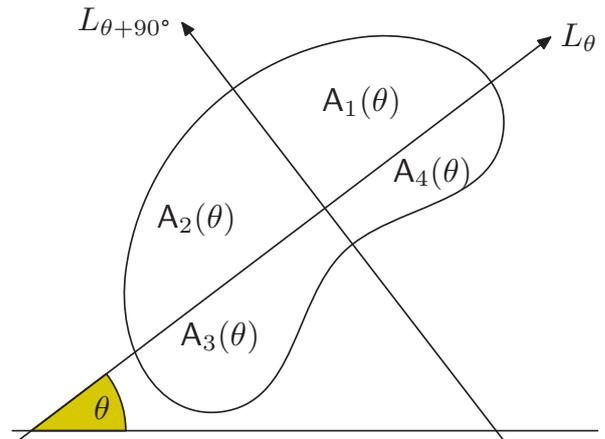


Figure 10. Découpe de la galette et aires associées pour une valeur de θ .

La galette est divisée en quatre morceaux A_1 , A_2 , A_3 et A_4 (voir figure 10) qui vérifient :

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad ; \quad A_2 + A_3 = A_1 + A_4.$$

Il en résulte facilement, par simples manipulations algébriques, que $A_1 = A_3$ et $A_2 = A_4$. Notre objectif sera atteint si on démontre que $A_1 = A_2$ pour un certain θ .

Pour chaque angle de coupe θ , on définit alors $f(\theta) = A_1(\theta) - A_2(\theta)$. En passant de θ_0 à $\theta_0 + 90^\circ$, ce qui était le morceau A_1 devient A_2 et ce qui était A_2 devient A_3 ; en somme,

$$\begin{aligned} f(\theta_0 + 90^\circ) &= A_1(\theta_0 + 90^\circ) - A_2(\theta_0 + 90^\circ) \\ &= A_2(\theta_0) - A_1(\theta_0). \end{aligned}$$

Ainsi $f(\theta_0 + 90^\circ)$ et $f(\theta_0)$ sont de signes contraires. En faisant l'hypothèse, raisonnable, que ces fonctions A_1 et A_2 (et donc f) varient continûment avec θ , l'application du TVI conduit à l'existence



de θ^* entre θ_0 et $\theta_0 + 90^\circ$ tel que $f(\theta^*) = 0$, soit

$$A_1(\theta^*) = A_2(\theta^*)$$

(et par suite $A_3(\theta^*) = A_4(\theta^*)$).

Manon, Léa, Maxime et Théo sont rassurés... Ne voulant léser personne, ils peuvent bien partager la galette en quatre parts égales, en seulement deux coups de couteau perpendiculaires. Ils tireront au sort celle ou celui d'entre eux qui procédera effectivement à la double coupe « égalitaire ».

Problème du carré inscrit dans une courbe du plan

Peut-on inscrire un carré dans une courbe fermée simple (c'est-à-dire qui ne passe pas deux fois par le même point) du plan ? (cf. figure 11).

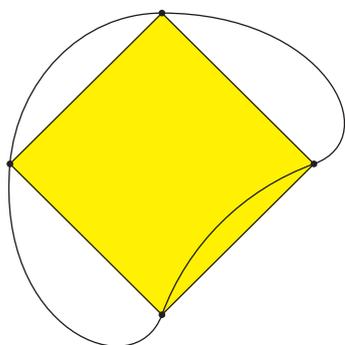


Figure 11. Un carré inscrit dans une courbe fermée.

Carré inscrit dans une courbe du plan

Voilà un problème géométrique qui, dans toute sa généralité, n'est pas encore résolu. Il est dû originellement à O. TOEPLITZ (1911), a fait l'objet d'une abondante littérature, rassemblant notamment tous les cas où la réponse est connue comme positive (voir [4] § 2.62 « *The inscribed square problem* » pour une revue récente de l'état de l'art).

Le lecteur se convaincra facilement de la nécessité d'avoir une courbe fermée... De plus, les cas simples suivants sont assez faciles à traiter :

- carrés et cercles : il y a une infinité de solutions (c'est-à-dire de carrés inscrits dans ces courbes) ;
- triangles rectangles : deux solutions ;
- triangles avec angles aigus : trois solutions ;
- triangles avec un angle obtus : une solution.

Pour d'autres courbes comme l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la résolution du problème est également facile : un carré inscrit est celui dont les sommets sont $(\pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}})$.

Plus généralement dans le même registre, le mathématicien A. EMCH a, dès 1913, répondu positivement pour des ovales (c'est-à-dire les courbes frontières de convexes à bords lisses).

Nous résolvons ci-dessous le problème du carré inscrit dans le cas particulier où la courbe est délimitée par le graphe d'une fonction continue et l'axe des abscisses (voir la figure 12).

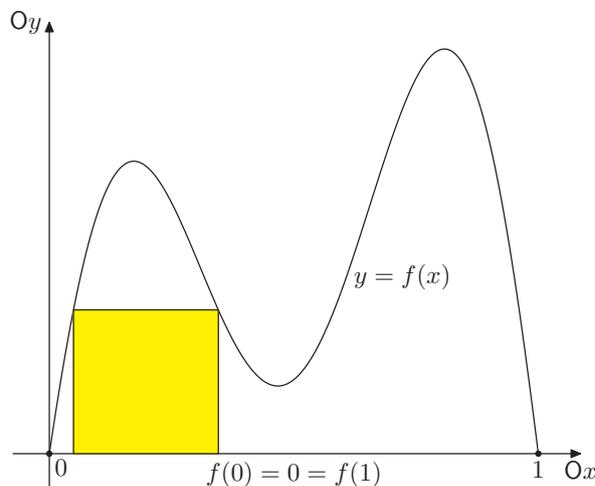


Figure 12. On inscrit un carré entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

Plus précisément, voici l'énoncé du résultat.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, et f est strictement positive sur $]0; 1[$. Alors on peut inscrire sous le graphe de f un carré avec deux sommets sur le graphe et deux sur l'axe des abscisses Ox .

Un sommet sur $]0; 1[$, d'abscisse x , sera solution de notre problème lorsque $f(x) = f[x + f(x)]$. Il





s'agit donc de montrer que la fonction φ définie par $x \mapsto \varphi(x) = f(x) - f[x + f(x)]$ s'annule sur $]0; 1[$.

Afin que φ soit bien définie, on prolonge la définition de f à toute la droite réelle \mathbb{R} en posant : $f(x) = 0$ pour tout $x \notin]0; 1[$. Ainsi φ est une fonction bien définie et continue sur \mathbb{R} .

f étant continue sur $]0; 1[$, vu les hypothèses faites sur f (en 0 et 1 notamment), il existe $a \in]0; 1[$ tel que $f(a) = \max_{x \in]0; 1[} f(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Comme la fonction $g : x \mapsto g(x) = x + f(x)$ est continue et vérifie $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, le TVI nous permet d'affirmer qu'il existe $b \in]0; 1[$ tel que $g(b) = a$.

Observons que

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) - f[a + f(a)] \\ &= f(a) - f[g(a)] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

puisque a est un maximiseur de f , puis que

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= f(b) - f[b + f(b)] \\ &= f(b) - f[g(b)] \\ &= f(b) - f(a) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

toujours parce que a est un maximiseur de f . Invoquons à nouveau le TVI, pour φ cette fois, sur le segment d'extrémités a et b (lequel est contenu dans $]0; 1[$) ; il s'ensuit l'existence de $c \in]0; 1[$ tel que $\varphi(c) = 0$. CQFD.

On peut facilement étendre la méthode et le résultat au cas d'une courbe formée du graphe de f et de son symétrique (voir la figure 13). En effet, on procède comme au-dessus avec les nouvelles fonctions $g : x \mapsto g(x) = x + 2f(x)$ et $x \mapsto \varphi(x) = f(x) - f[x + 2f(x)]$. On arrive ainsi à inscrire sous le graphe de f un rectangle dont la longueur est double de la largeur, avec deux sommets sur le graphe et deux sur l'axe des abscisses Ox . En adjoignant à ce rectangle son symétrique par rapport à l'axe Ox , on obtient un carré inscrit

dans la courbe fermée constituée du graphe de f et de son symétrique.

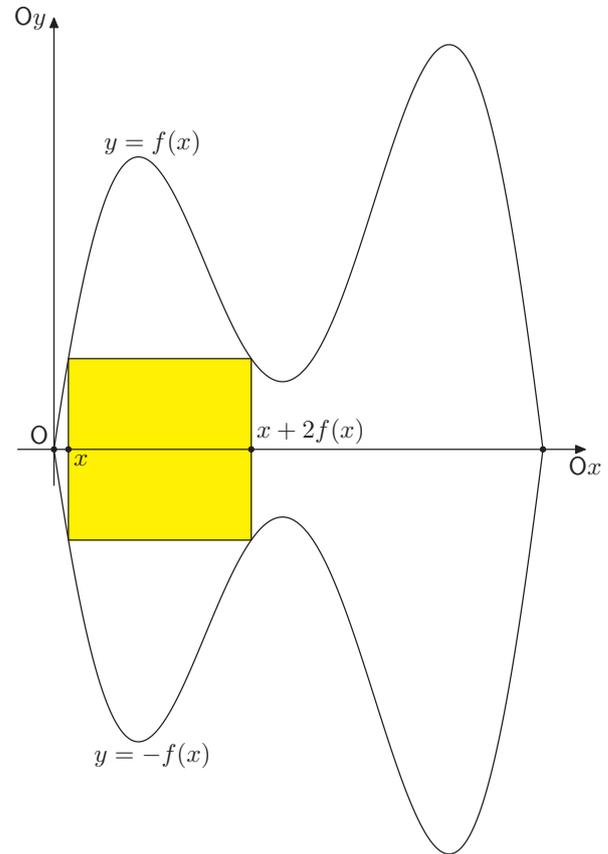


Figure 13. Encore un carré inscrit dans la courbe fermée déduite du graphe de f .

Annexe

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI), ou théorème de BOLZANO

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle réel $[a; b]$. Alors, pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

C'est un résultat facile à comprendre, à visualiser et à faire accepter : en passant de a à b et en suivant les valeurs de f , on doit visiter toutes les valeurs prises entre $f(a)$ et $f(b)$. Il est tout aussi facile à réaliser qu'on ne peut se dispenser de la continuité (même si cette notion n'est perçue que dans un sens physique ; bref on ne peut pas se



permettre des « sauts » dans les valeurs de f ², pas plus qu'on ne peut se dispenser du fait que $[a; b]$ est d'un seul tenant.

En termes un peu plus pompeux, on dirait : « *L'image continue d'un intervalle est un intervalle* ». Si $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$, l'image de $[a; b]$ par f est l'intervalle $[m; M]$; $f(a)$ et $f(b)$ font partie de cet intervalle (sans qu'on sache *a priori* laquelle de ces deux valeurs est la plus petite), il en est donc de même de tout point de l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$.

Souvent, le TVI est appliqué dans le contexte suivant : $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle réel $[a; b]$, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, par exemple $f(b) = -f(a)$; alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

Le TVI, que l'on demande d'exploiter dès les classes de Terminale des lycées, est un outil mathématique essentiel et d'utilisation commode dans les exercices de niveau L1 et L2 des universités (voir [6] par exemple) ou de préparations de concours (cf. [7]).

Références

- [1] W. G. Chinn et N. E. Steenrod. *Topologie élémentaire. Géométrie des fonctions de segments, de courbes, de cercles et de disques*. Éditions Dunod, 1970.
- [2] Yu. A. Shashkin. « Fixed points ». In : *Mathematical World*. Vol. 2. The American Mathematical Society, 1991. ISBN : 978-0-8218-9000-4.

- [3] J. Tanton. « A dozen areal maneuvers ». In : *Math Horizons* (novembre 2000), p. 26-30.
- [4] F. Kennard. *Unsolved Problems in Mathematics*. AMF Publishing, 2015. ISBN : 978-1-3129-3811-3.
- [5] J.-B. Hiriart-Urruty. « Dérivation et primitivation, quand tu nous tiens... » In : *Bulletin de l'APMEP* n° 509 (2014), p. 340-348.
- [6] J.-B. Hiriart-Urruty. *Mathematical Tapas. Vol. 1 (for Undergraduates)*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2016. ISBN : 978-3-3194-2185-8.
- [7] P. Lassère. « Petit bestiaire » d'exercices de mathématiques avec leur corrigé, à l'usage de l'oral voire de l'écrit de certains concours (agrégation externe, interne & CAPES). Publication interne. Université Paul Sabatier, 2008.



Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (alias JBHU) est professeur émérite à l'Université Paul Sabatier de Toulouse. Son domaine de recherche est l'optimisation. Il a aussi publié de nombreux ouvrages mathématiques (de recherche ou pour l'enseignement). Il est également impliqué dans la diffusion des sciences et des mathématiques en particulier au travers de l'association Fermat Science.

jbhu@math.univ-toulouse.fr

Patrice Lassère est professeur agrégé (PRAG) à l'Université Paul Sabatier de Toulouse. Son domaine de recherche est l'analyse complexe.

patrice.lassere@math.univ-toulouse.fr

© APMEP Juin 2020

2. Bien sûr, une fonction peut vérifier la conclusion du TVI (« l'image d'un intervalle est un intervalle ») sans qu'elle soit continue sur cet intervalle, une fonction dérivée en est un exemple typique. Pour ces différences et subtilités, voir [5].



Sommaire du n° 536

Les jeux sont faits !

Éditorial

Opinions

Pourquoi une seconde spécialité mathématique ?
— Sébastien Planchenault

La trace écrite — Les traces écrites en mathématiques — Alain Vesin

Plaidoyer pour les RMC — Lise Malrieu

Avec les élèves

Transformations littérales et manipulations en Quatrième — Morgan Gilot

✦ Carrés magiques aux cycles 2, 3 et 4 — Jean Toromanoff

✦ Jeu de go en cours de mathématiques — Antoine Fenech

✦ Des jeux à stratégie gagnante pour apprendre à raisonner — Georges Mounier

1 Ouvertures 38

Comment les IREM ont donné un sens à ma vie ☺
— Sylvie Alory 38

3 Le changement dans la continuité — Jean-Baptiste Hiriart-Urruty & Patrice Lassère 43

3 Des problèmes inspirés du livre *Les mathématiques et le réel* — Thérèse Gilbert 53

✦ 5 Les jeux d'évasion — Sébastien Dumortier 58

11 Récréations 67

✦ Faire du calcul mental en jouant avec le *Chamboul'math* — Gérard Martin 67

19 ✦ La Tour d'Hanoï — Michel Boutin & Frédéric de Ligt 71

19 Le calcul mathématique — Olivier Longuet 76

✦ Jouons avec les nombres d'une suite de Fibonacci — Dominique Souder 77

25 ✦ Vous prendrez bien un *Petit Vert* ? — Daniel Vagost 84

31 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 86

Au fil du temps 89

35 Matériaux pour une documentation 89



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr