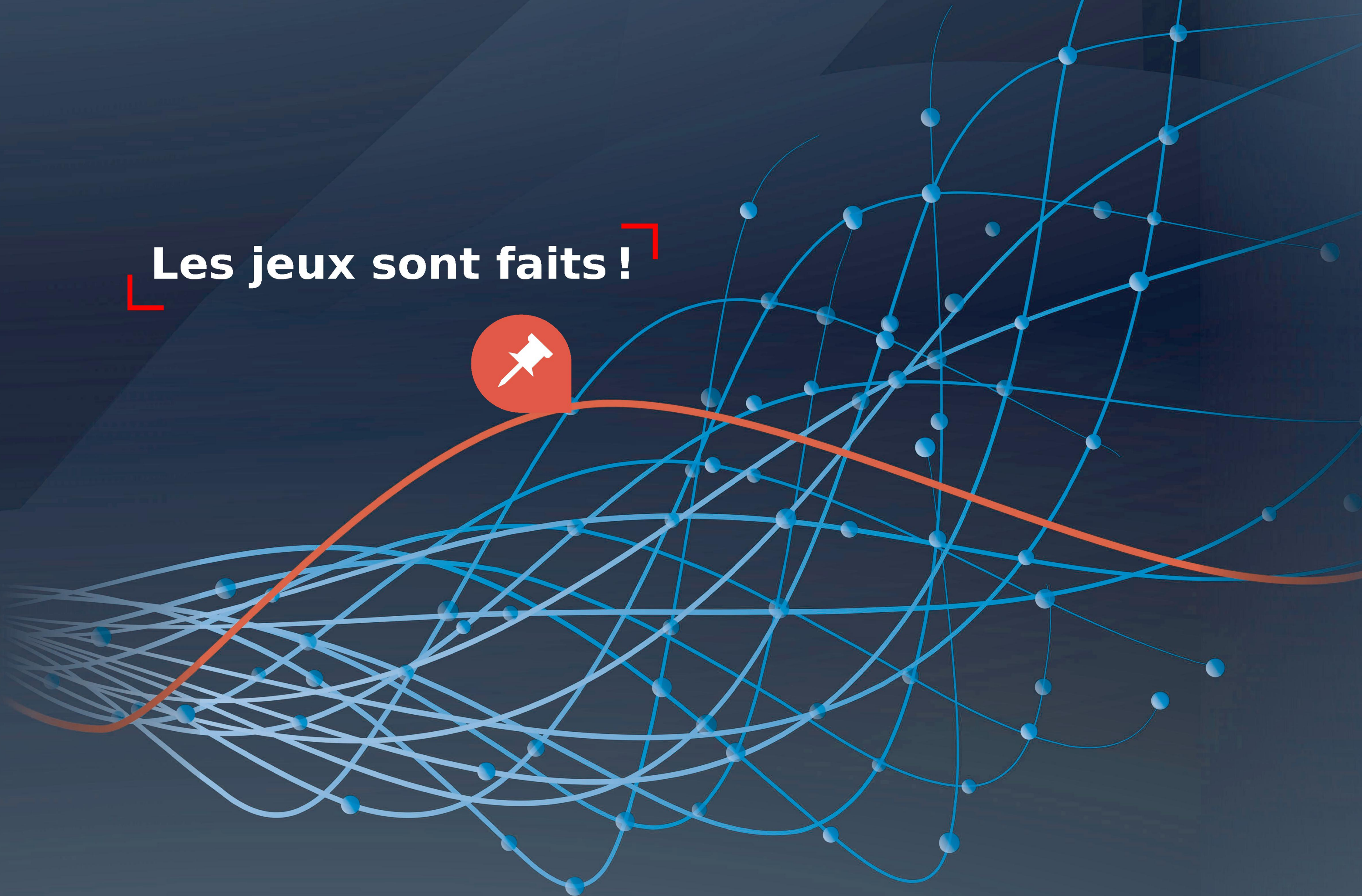
Le bulletin de l'APMEP - N° 536

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2020

Les jeux sont faits !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

https://afdm.apmep.fr

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

En raison de la situation sanitaire incertaine,
les Journées Nationales 2020,
initialement prévues du 17 au 20 octobre 2020,
sont reportées en 2021, à Bourges, du 16 au 19 octobre

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT.*

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU.*

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY.*

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO.*

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.*

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX †, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD & Olivier REBOUX †

Dépôt légal : Juin 2020. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

APMEP

Des jeux à stratégie gagnante pour apprendre à raisonner

« Jeux à stratégie gagnante », vous connaissez ? Georges Mounier vous en propose quelques-uns à tester avec vos élèves dans les classes ou entre ami(e)s !

Georges Mounier

La course à vingt

Vous connaissez peut-être déjà le jeu de *la course à vingt* ?

On dispose d'un tas, initialement vide, que chacun des deux joueurs alimente à tour de rôle en y ajoutant un ou deux cailloux. Le premier qui arrive à vingt a gagné.

Le site de l'IREM de Lyon permet d'y jouer en ligne.

La course à vingt a été étudiée par G. Brousseau et observée à de nombreuses reprises. Initialement, elle visait à introduire avec les élèves l'algorithme de la division [1].

Le jeu dans la classe se déroule en quatre phases :

- explication de la procédure ;
- jeu à un contre un. « *Au cours de cette dialectique de l'action, l'enfant organise ses stratégies, construit une représentation de la situation qui lui sert de modèle et de guide pour prendre ses décisions. Cet ensemble de relations [. . .] peut rester tout à fait implicite : l'enfant joue selon ce modèle avant d'être capable de le formuler.* » ;
- jeu à une équipe contre une équipe, chacune des deux équipes est représentée par un élève, l'équipe discute de la stratégie que doit appliquer son représentant. « *Pour gagner, il ne suffit pas qu'un élève sache jouer (c'est-à-dire qu'il ait un modèle implicite) mais il doit indiquer à ses coéquipiers quelle stratégie il propose [. . .]. Son seul moyen d'action est de formuler ces stratégies.* » ;
- jeu de la découverte : les enfants énoncent des propositions qui sont discutées. « *. . . déroulement fictif [. . .]*

  — *on est sûr de gagner si on peut dire* 17 *[. . .]*

  — *je ne suis pas d'accord, il y a des fois où on a joué* 17 *et on n'a pas gagné.* » [2]

Après quelques parties, vous découvrirez en effet que, si vous jouez le premier, il existe une stratégie qui vous permet de toujours gagner !

C'est un jeu dit *inverse*. Le joueur qui arrive à 17 est sûr d'avoir gagné car l'adversaire à qui vous laissez cette position ne peut jouer que 18 (ou 19) et alors il vous suffit d'ajouter 2 (ou 1) pour obtenir 20 et gagner. Une analyse rétrograde permet de déterminer les positions gagnantes successives : 14 est une position gagnante car quoi que joue l'adversaire (15 ou 16) je peux obtenir la position gagnante 17. La suite des positions gagnantes est finalement : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Celui qui commence peut donc gagner à tous les coups : il lui suffit de dire 2, puis, quoi que joue l'adversaire, de dire 5, 8, etc. s'il connaît la suite des positions gagnantes par cœur ; ou de dire 2, puis d'ajouter 1 (respectivement 2) lorsque l'adversaire ajoute 2 (respectivement 1).

La course à vingt fait partie de ce que l'on appelle les jeux à stratégie gagnante.

Comment définir les jeux à stratégie gagnante ?

Dans l'un de ses ouvrages [3], Jacques Bouteloup définit les jeux à stratégie gagnante ainsi : *« Ce sont des jeux à deux joueurs (adversaires), et la règle du jeu est la même pour les deux joueurs.*

1. *La règle du jeu définit, pour toute position A donnée à l'un des joueurs, celles qu'il peut obtenir en jouant : les images de la position A ;*
2. *On est forcé de jouer, sauf si on ne peut plus. Dans ce cas, aucun coup respectant la règle du jeu n'est possible, on dit qu'on est bloqué ;*
3. *Dans un jeu direct, le joueur bloqué est le perdant. Dans un jeu inverse, il est le gagnant ;*
4. *Le graphe du jeu est progressivement fini (tous ses chemins sont de longueur finie). »*

Il précise aussi comment jouer :

« Un joueur connaît la stratégie (c'est un expert) s'il sait déduire d'une position non élément du noyau une position qui y appartient.
Dans le jeu direct.

- *Placé devant une position n'appartenant pas au noyau, ce joueur laisse à son adversaire une position du noyau (position perdante), et reçoit donc de lui une position n'y appartenant pas (position gagnante), il est le gagnant ;*
- *Placé devant une position appartenant au noyau, ce joueur joue un coup d'attente, espérant une faute de son adversaire : que celui-ci lui offre une position n'appartenant pas au noyau.*

Le cas du jeu inverse est plus complexe. » [3]

Karine Bécu-Robinault (ENS de Lyon) écrit [2] : *« Les jeux à stratégie gagnante font appel à des opérations mentales qui aident au développement de la pensée formelle :*

- *décentrage : pour élaborer une stratégie gagnante, il faut imaginer ce que jouera l'autre joueur, se mettre à sa place (ce qui est assez proche de la capacité à envisager des contre-arguments opposés dans le cas d'un travail sur l'argumentation) ;*
- *généralisation : pour élaborer une stratégie gagnante, il faut :*
  - *prendre en compte tous les coups que pourra jouer l'adversaire,*
  - *se dégager des particularités de la partie jouée pour envisager d'autres parties possibles ;*
- *prévision : pour élaborer une stratégie gagnante, il faut poser des hypothèses* — si mon adversaire fait ceci. . . — *et en envisager les conséquences : mettre en place le* Si . . . Alors. *»*

D'autres exemples de jeux à stratégie gagnante

Comment ne pas être chocolat ?

La méchante sorcière a pris une plaque de chocolat et déposé un poison mortel sur l'un des quatre carrés d'angles. Elle veut proposer un jeu à Blanche-Neige : *« Tu vois, lui dit-elle, j'ai déposé du poison sur le carré hachuré. Je te propose les règles du jeu suivantes :*

1. *chacune, à tour de rôle, va prendre la plaque et en détacher une partie en la coupant suivant une ligne droite du quadrillage. Elle mange le morceau qu'elle a détaché ;*
2. *celle qui mange le carré empoisonné meurt ! »*

Mais la sorcière est aussi bête que méchante, elle ne sait pas que Blanche-Neige connaît une façon de jouer pour ne pas manger le carré mortel. Et toi, comment vas-tu jouer pour ne pas être empoisonné ? [4]

Comment jouer pour gagner ?

Pour gagner, il faut laisser un carré. Celui qui a un rectangle non carré devant lui peut toujours le transformer en carré. Celui qui a un carré ne peut que le transformer en rectangle non carré. Donc si la situation de départ n'est pas un carré, celui qui commence doit gagner s'il applique la stratégie gagnante.

Le jeu suivant a été popularisé par le film d'Alain Resnais *L'année dernière à Marienbad* (1961). Il s'agit d'un cas particulier du jeu dit de *Nim à tas*.

Marienbad

On dispose de quatre tas ou rangées contenant respectivement 7, 5, 3 et 1 allumette(s). Chaque joueur, à tour de rôle, enlève une ou plusieurs allumettes, dans un seul tas. Celui qui enlève la dernière a perdu.

À vous de jouer et de trouver la stratégie gagnante ! On trouve une analyse sur le site de Thérèse Eveilleau !

Dornim

On dispose d'un damier, la case d'arrivée est située en bas à gauche du damier. On utilise un seul pion qui sert pour les deux joueurs. Un joueur pose ce pion sur une case quelconque du damier (la case de départ [1]) ; l'autre joueur commence alors à jouer. Les déplacements autorisés, aussi longs que souhaité, ont lieu dans une (seule) des directions :

- horizontalement vers la gauche ;
- verticalement vers le bas ;
- en diagonale vers le bas à gauche.

Le joueur qui arrive sur la case d'arrivée a gagné.

Comment jouer pour gagner ? [5]

Une analyse rétrograde permet de répondre. Les cases qui permettent d'atteindre en un seul coup la case d'arrivée sont perdantes (P). On en déduit les cases gagnantes (G) : celles pour lesquelles, quoi que fasse votre adversaire, il sera amené à jouer dans une case perdante.

On peut continuer : marquer comme perdantes les cases qui permettent d'arriver en un seul coup à une case gagnante, puis marquer les nouvelles cases gagnantes.

Exemple sur un damier 6 × 7 :

A : Arrivée **D** : Départ

5	P	P	P	G	P	P	D
4	P	P	P	P	P	P	P
3	P	P	P	P	P	G	P
2	P	G	P	P	P	P	P
1	P	P	G	P	P	P	P
0	**A**	P	P	P	P	P	P
	0	1	2	3	4	5	6

Si on numérote les cases selon un système de coordonnées en attribuant à la case d'arrivée le couple $(0\,;\,0)$, on découvre que les cases gagnantes ont pour coordonnées : $(2\,;\,1)$, $(1\,;\,2)$ puis $(5\,;\,3)$ et $(3\,;\,5)$.

Vider le tas

On prend chacun son tour des grains dans un tas (de 400 grains), sans pouvoir en prendre plus que la moitié. Par exemple, si le tas contient 400 grains, vous pouvez en prendre au plus 200, s'il contient 9 grains, vous pouvez en prendre au plus 4. Lorsque le tas n'a plus qu'un grain, il n'est plus possible de jouer, celui qui se trouve avec devant lui un tas d'un seul grain a donc perdu.

À vous de jouer et de trouver la stratégie gagnante ! Pour y jouer en ligne : (IREM de Lyon).

Références

[1] *Brochure ELEM MATH III : la division à l'école élémentaire*. Nº 19. . APMEP, 1979.

[2] Karine Bécu-Robinault. *Support de cours : didactique des mathématiques*. .

[3] Jacques Bouteloup. *Les jeux de Nim*. . ADCS, 1996.

[4] Nicole Bonnet. « Comment ne pas être chocolat ». In : *CONCERTUM Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*. . 2003, p. 121-136.

[5] *Le jeu des deux tas d'or. Jeu du Dornim*. .

[6] Guy Brousseau. *La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de didactique des mathématiques 1970-1990*. La pensée sauvage, 1998.

[7] Groupe Jeux de l'APMEP. *Jeux 1*. Nº 44. . APMEP, 1992.

[8] Groupe Jeux de l'IREM de Lyon. *Jeux à stratégie gagnante*. . Août 2012.

[9] *Vidéo « Qui dira vingt ? ». La course à 20 en classe de CM1 à l'école Jules Michelet de Talence (Gironde)*. . 1973.

Après avoir été professeur en collège, en lycée, à l'IUFM et formateur à l'IREM de Lyon, Georges Mounier est désormais retraité.

georges.mounier@ac-lyon.fr

1. La case de départ doit être choisie de façon que le jeu ne se termine pas trop vite...

Sommaire du nº 536

Les jeux sont faits !

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr