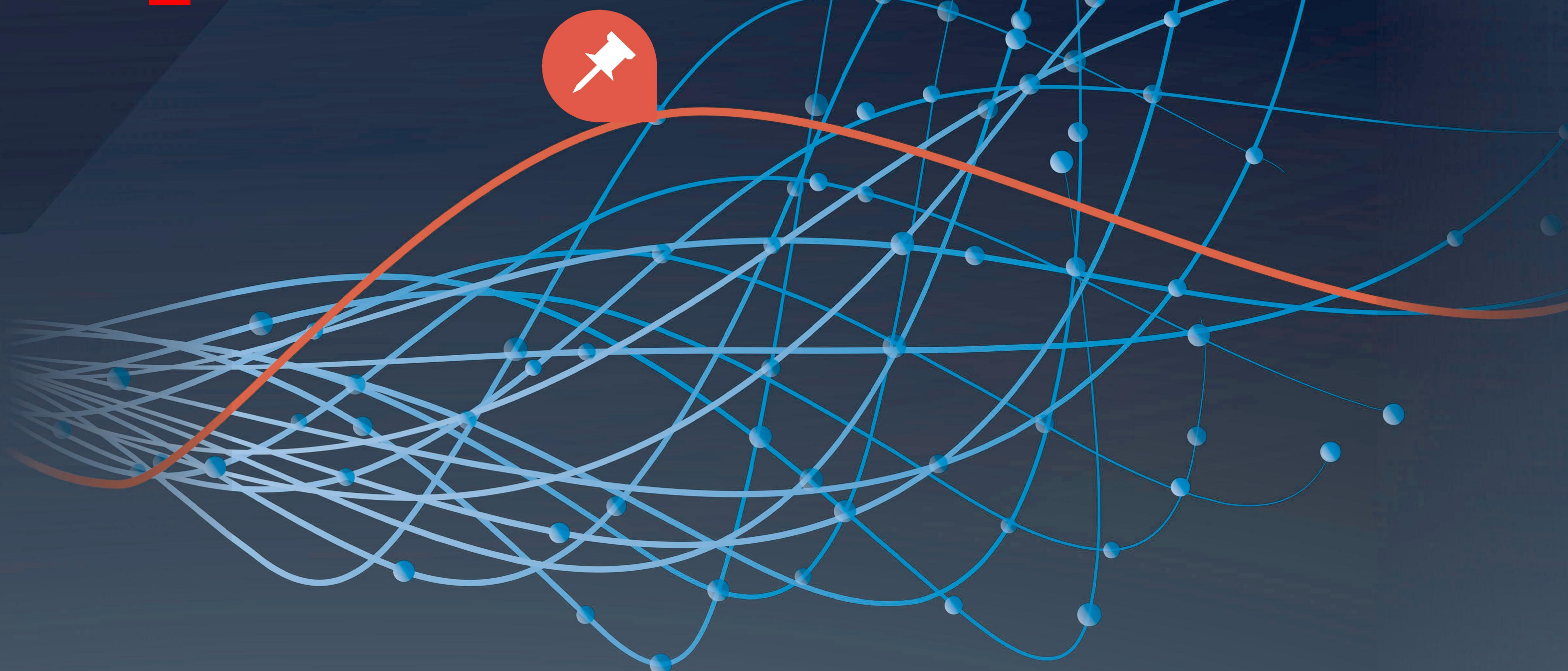
Le bulletin de l'APMEP - N° 535

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2020

Faites vos jeux !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Mars 2020
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

APMEP

Quelques beaux problèmes du logiciel Jeux2019

Voici quelques jeux sollicitant des domaines aussi divers que la logique, l'arithmétique ou la géométrie de l'espace à l'aide d'un logiciel gratuit, permettant différentes modalités de jeu, individuellement ou en paire, à travers la résolution de problèmes exerçant raisonnements et stratégies.

Guy Noël & Yolande Noël-Roch

Introduction

La généralisation des outils informatiques utilisés en classe fait apparaître la possibilité — sur un sujet mathématique donné — d'engendrer aléatoirement des situations à soumettre aux élèves, donc des problèmes à résoudre. Si les élèves travaillent en accès libre, ils peuvent s'exercer sans être observés. Si la classe entière est impliquée, le côté aléatoire a pour conséquence que l'enseignant ne connaît pas à l'avance l'énoncé précis. Il se trouve également dans une situation de résolution de problème, il peut — comme un élève — hésiter, faire une hypothèse, modifier celle-ci. . . Tout le monde participe à une bonne ambiance de recherche. Les élèves pourront comprendre que diverses démarches sont parfois nécessaires dans le cadre d'une résolution de problème.

Le rôle de l'enseignant reste néanmoins capital : c'est lui qui choisit un logiciel de jeux mathématiques, ensuite un jeu particulier et enfin, souvent, un niveau de difficulté adapté aux élèves. L'objectif principal de l'enseignant est de contribuer à la compréhension, voire à la mémorisation, des sujets mathématiques qu'il aborde. Aussi, avant de décider de l'utilisation d'un jeu particulier, il importe que l'enseignant analyse ce que sera l'activité de l'élève et juge de son intérêt et de son opportunité.

Jeux2019

Jeux2019 est un logiciel mettant à la disposition des enseignants et de leurs élèves quinze jeux différents, de portées différentes et de difficulté variable. Ce logiciel n'est pas sorti tel quel du cerveau de ses concepteurs. Il est l'aboutissement d'une série de versions s'enrichissant de plus en plus de jeux. La première version, intitulée Jeux Mathématiques 1, fut publiée en 1992 sous l'égide du *Centre de Didactique des Sciences de l'Université de Mons-Hainaut* [1]. Elle ne comportait que quatre jeux qui figurent toujours dans Jeux2019.

Jeux2019 est disponible en deux versions, une à utiliser sur des ordinateurs fonctionnant sous Windows, l'autre sur des Macintosh. Dans chaque cas il est prévu pour des processeurs 64 bits.

Le logiciel est téléchargeable gratuitement sur le site internet `www.conifere.be`.

La plupart des jeux de Jeux2019 comportent deux ou trois niveaux de difficulté. Pour chaque jeu, le joueur peut ouvrir une page Règles du jeu qui lui donne les indications utiles.

Les jeux sont classés en trois catégories.

Deux jeux logiques : Hexagones et Retournements.

Dix jeux arithmétiques : Murs additifs, Murs multiplicatifs, Moyennes arithmétiques, Décodages de sommes, Décodages de produits, Produits croisés, Produits liés, Produits en cube, Compléter un treillis et Fenêtre sur Grille.
Trois jeux à deux joueurs : Le nombre interdit, Le jeu de Juniper Green et Les triplets de Smileys. Les deux premiers sont analogues au jeu bien connu de Nim : l'un des joueurs dispose d'une stratégie gagnante. De plus, l'ordinateur est un des joueurs et il connaît la stratégie gagnante (mais il n'a pas toujours l'occasion de l'appliquer). Le dernier jeu, Les triplets de Smileys, oppose deux joueurs. Pour remporter une partie ils doivent disposer d'une bonne perception visuelle et être rapides car ils ne disposent que d'un temps limité.

Dans les pages qui suivent, nous présentons et illustrons cinq de ces jeux.

Les produits croisés

Taille 3×3, nombres de 1 à 9

À l'ouverture du jeu, l'écran reste vide (c'est le cas pour tous les jeux). Deux paramètres peuvent être choisis à l'aide des menus. Le menu Taille vous donne le choix entre 3×3 et 3×4. Choisissez 3×3 et, dans le menu Nombres, « Entiers de 1 à 9 ». Une grille 3×3 et une barrette des nombres de 1 à 9 apparaissent. De plus la grille est bordée d'une marge à droite et d'une marge inférieure, chacune constituée de trois nombres. Par exemple :

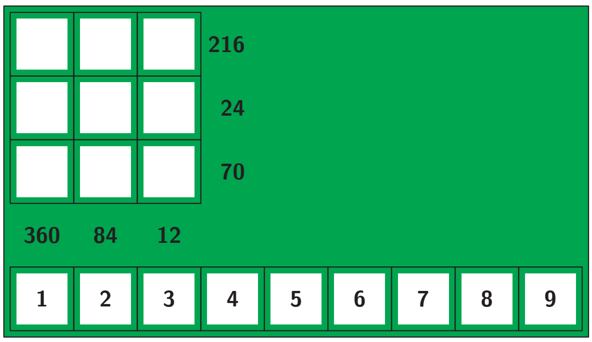


Figure 1

Le jeu consiste à transférer (à la souris) les nombres de la barrette vers les cases de la grille, de façon que les produits en ligne et en colonne aient les valeurs indiquées dans les marges.

> Ce sont vraisemblablement des élèves de collège qui peuvent tirer profit de ce jeu. Ils doivent élaborer une stratégie.

Ils comprennent généralement rapidement que les nombres de la barrette doivent être placés de façon telle qu'ils soient des diviseurs des nombres correspondant dans les marges. Une réaction fréquente est alors : on peut placer le nombre 1 n'importe où puisqu'il divise tous les autres !

Un choix qui est meilleur est de placer le nombre 5. On repère facilement ses multiples ! La proposition suivante est souvent 9 : on repère aussi facilement les multiples de 9. Mais dans certains cas, on pourrait placer 9 en plus d'une position ! C'est l'occasion de reparler des nombres premiers : 5 et 7 n'ont qu'une position possible. Mais 2 et 3 sont aussi premiers et cependant trop de nombres des marges sont multiples de 2 ou 3. Les choses doivent être éclaircies, et on aboutit finalement à une proposition de solution qui semble cohérente. C'est le moment de *valider* le choix *via* l'item de même nom du menu Jeu. Trois messages peuvent apparaître :

Désolé, la solution n'est pas correcte.

Félicitations, tout est correct.

Félicitations, votre solution est correcte et différente de la mienne !

La dernière mention signifie que le jeu a plusieurs solutions, ce qui peut provoquer un complément de travail afin de déterminer dans quel cas cela peut se présenter.

Taille 3×3 et nombres premiers de 2 à 23

Puisqu'on a constaté que les nombres premiers sont faciles à localiser dans la grille, utilisons le deuxième item du menu Nombres et lançons un nouveau jeu :

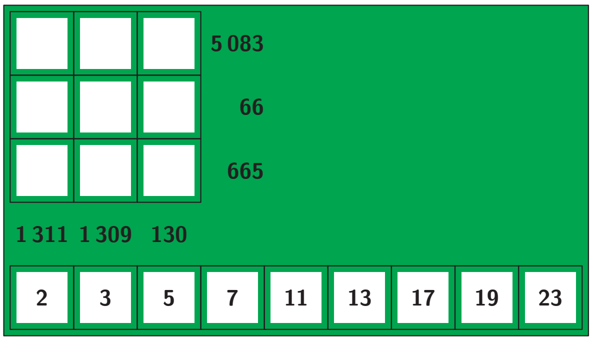


Figure 2

Les nombres de la barrette sont les neuf premiers nombres premiers. En principe, c'est plus simple. Mais les produits 3 à 3 sont plus grands. Ouvrez vos calculettes !

Taille 3 × 4

Avec les paramètres qui viennent d'être énoncés, les nombres situés dans les marges peuvent devenir très grands (jusqu'aux environs de 17 160 si on a choisi les naturels de 2 à 13, jusqu'à 765 049 si on a choisi les douze premiers nombres premiers). Pour localiser les nombres de la barrette dans la grille, les joueurs sont amenés à décomposer ces nombres en facteurs premiers. Pour les aider, nous avons placé à l'écran sept « registres de factorisation » (figure 3). Si on inscrit 2 520 dans un de ces registres, la réponse est 2ˆ3.(3ˆ2).5.7, c'est-à-dire $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Cette aide apportée au calcul permet de faciliter le raisonnement.

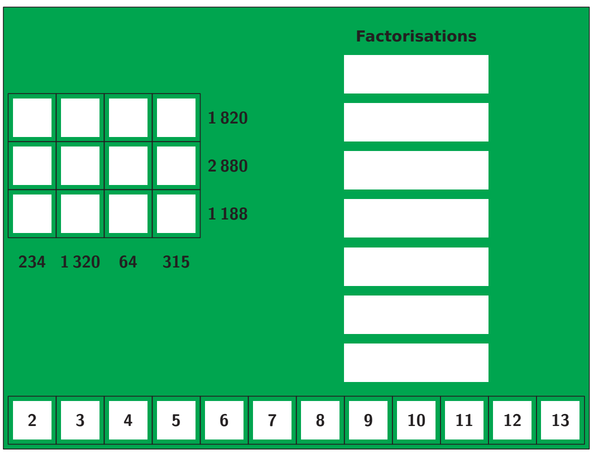


Figure 3

Les produits en cube

Comme les « produits croisés », les « produits en cube » incitent à factoriser des nombres naturels. Mais la situation proposée aux joueurs est plus complexe : les huit nombres de la barrette doivent être transférés aux sommets d'un cube (voir la figure 4). Chacun de ces nombres est de cette façon associé à trois faces du cube. Le produit des quatre nombres associés à une face doit être égal à la valeur mentionnée sur la face correspondante d'un développement du cube.

La correspondance entre les faces du développement et celles du cube est déterminée par la présence de deux flèches : une sur la face supérieure du cube, l'autre sur une des faces du développement. Ces flèches permettent de visualiser mentalement l'emballage du cube par son développement. Le jeu sollicite autant la capacité de « voir dans l'espace » que celle de factoriser des naturels !

De plus l'item Développement du menu permet de choisir un développement parmi trois. Par défaut, c'est le développement traditionnel qui apparaît. L'item Nombres permet également de remplacer les naturels de 1 à 8 par les nombres premiers de 2 à 19. Comme dans le cas des produits croisés, les nombres premiers sont un peu plus faciles à placer mais les valeurs des produits sont plus grandes.

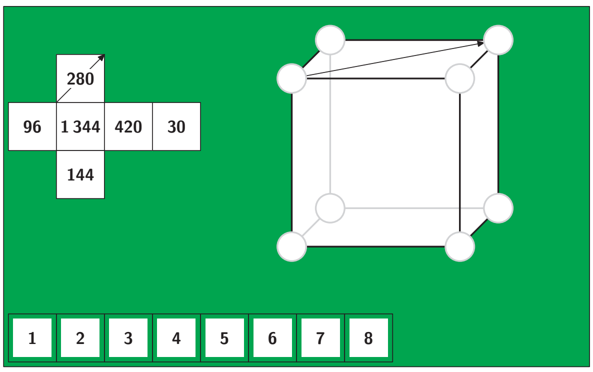


Figure 4

Compléter un treillis

On connaît la définition d'un treillis : c'est un ensemble ordonné tel que toute paire d'objets admet une borne inférieure et une borne supérieure. Nous n'utiliserons pas cette définition car nous n'aurons affaire qu'à un seul type de treillis : les treillis des diviseurs d'un entier naturel non nul. Il s'agit bien sûr des diviseurs positifs : nous ne sortons pas du cadre des entiers naturels. Dans ce cadre, la borne inférieure d'une paire de nombres est leur pgcd, la borne supérieure est leur ppcm. C'est la relation de divisibilité qui fait office de relation d'ordre. Le nombre 1 divise tous les autres. C'est donc un minimum.

La structure du treillis d'un naturel est déterminée par le nombre de facteurs premiers de ce naturel (nous l'appellerons le « générateur » du treillis). Dans Jeux2019 vous ne rencontrerez aucun naturel ayant plus de trois facteurs premiers : cela permet d'en faire une représentation graphique lisible. De plus, ces représentations graphiques nous permettent d'appeler « dimension » le nombre de facteurs premiers du générateur.

Voici par exemple le treillis des diviseurs de 6 125 :

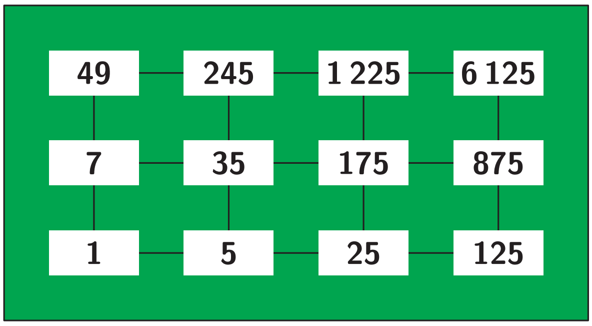


Figure 5

Les traits horizontaux (à « lire » de gauche à droite) et verticaux (à « lire » de bas en haut) désignent des relations de divisibilité. Comme cette relation est transitive, on se contente de placer les traits « élémentaires » : aucun nombre n'est à placer entre 49 et 245.

Cette figure vous aide-t-elle à déterminer le pgcd et le ppcm de 49 et 175 (par exemple) ?

Le jeu « Compléter un treillis » a pour but de familiariser le joueur avec les treillis de dimensions 1, 2 et 3. Dans le sous-menu Dimension du treillis, le joueur choisit un de ces nombres. Une structure de treillis lui est alors proposée. Exemple :

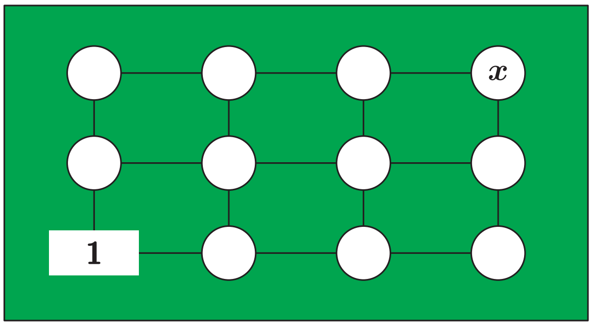


Figure 6

Il s'agit alors pour le joueur de déterminer la valeur du nombre x, le générateur du treillis. Pour ce faire, il peut demander à l'ordinateur de remplir un disque vide, et cela de deux façons. Soit le joueur choisit un disque vide et clique à l'intérieur de ce disque. Soit le joueur actionne le bouton $\boxed{\text{Nœud}}$ et c'est l'ordinateur qui choisit aléatoirement un disque vide et en donne la valeur. Le joueur demande les valeurs d'autant de disques qu'il veut. Quand il croit avoir trouvé la valeur de x, le joueur l'inscrit dans la case $\boxed{x=?}$ et actionne l'item Valider du menu Jeu.

Si la valeur proposée est correcte, le joueur reçoit un message de félicitations et l'ordinateur explicite le treillis en le complétant.

> La pratique de ce jeu dans une classe permet de faire apparaître la cohérence du raisonnement d'un élève lors des choix qu'il opère afin d'avoir des renseignements utilisables.

Si l'élève a bien compris le mécanisme du treillis, deux demandes de renseignement suffisent pour trouver le générateur. Sinon...

Ce jeu peut être complété par un autre jeu qui repose aussi sur la structure de treillis : le nombre interdit. Mais c'est un jeu à deux joueurs et l'un des deux est l'ordinateur lui-même !

Fenêtre sur grille

1	2	3		5	6			9	10	11		13		15		17	18	19	
	22	23		25	26	27		29	30	31		33	34			37	38	39	
41		43		45	46	47			50	51		53	54	55		57	58	59	
61	62			65	66	67		69		71		73	74	75			78	79	
81	82	83		85	86	87		89	90			93	94	95		97		99	
101	102	103			106	107		109	110	111		113	114	115		117	118		
121	122	123		125		127		129	130	131			134	135		137	138	139	
141	142	143		145	146			149	150	151		153		155		157	158	159	
	162	163		165	166	167		169	170	171		173	174			177	178	179	
181		183		185	186	187			190	191		193	194	195		197	198	199	
201	202			205	206	207		209		211		213	214	215			218	219	
221	222	223		225	226	227		229	230			233	234	235		237		239	

Figure 7

Le jeu « Fenêtre sur grille » est l'un des plus originaux que nous connaissons. Nous ignorons qui en est l'inventeur. Nous avons découvert ce jeu en 1992 lors d'une présentation par le *British Council* de logiciels mathématiques implémentés sur des ordinateurs de marque BBC.

La présentation du jeu comporte plusieurs étapes qui font appel aux figures 7 et 8.

Première étape : une grille rectangulaire de n colonnes est dessinée ($10 \leqslant n \leqslant 20$). Le nombre m de lignes n'est pas très important mais ne peut être inférieur à 10. Dans la figure 7, on a choisi $m = 12$ et $n = 20$.

Deuxième étape : les nombres naturels de 1 à mn sont inscrits dans la grille à partir du coin supérieur gauche.

Troisième étape : deux nombres naturels différents, a et b, tous deux compris entre 3 et 10 sont choisis aléatoirement par l'ordinateur. Pour cette présentation, l'ordinateur a choisi $a = 4$ et $b = 7$ (figure 7). Toutes les cases de la grille contenant un multiple de a ou de b sont coloriées en rouge.

Quatrième étape : tous les nombres sont effacés, mais les cases coloriées en rouge restent coloriées.

Cinquième étape : une « fenêtre » carrée de taille 10×10 est déposée sur la grille. La ligne supérieure de cette fenêtre se trouve sur une des deux premières lignes de la grille.

Sixième et dernière étape : tout ce qui déborde de la fenêtre est effacé.

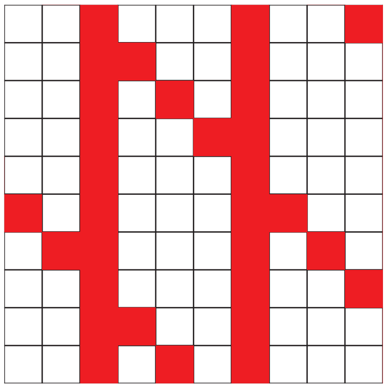


Figure 8

Le joueur doit retrouver les nombres a et b en observant le contenu de la fenêtre (figure 8). S'il est en difficulté, il peut actionner deux boutons. Le bouton Recolorier la grille permet de connaître les cases dont les valeurs sont multiples à la fois de a et de b : elles sont repeintes dans une couleur différente. Quant au bouton Peupler la grille, l'actionner revient à donner sa langue au chat : il affiche tous les nombres de la grille.

Quand le joueur croit avoir trouvé, il inscrit les valeurs supposées de a et b dans les cases prévues à cet effet.

Le seul paramètre permettant de modifier ce jeu est le Niveau qui donne au joueur le choix entre un grille de largeur 20 et une grille de largeur aléatoire, comprise entre 10 et 20 et inconnue du joueur. La fenêtre est toujours carrée et de côté 10.

L'environnement associé à ce jeu est suffisamment riche pour donner accès à des propriétés arithmétiques importantes. Dans le cas de la figure 8, un joueur débutant ne verra peut-être pas d'emblée que les deux nombres inconnus a et b sont premiers entre eux. Mais quand il aura reconnu cette propriété, liée à l'occupation de deux cases voisines, il ne l'oubliera plus. De même, des colonnes entièrement colorées permettent de supposer que l'un des nombres a ou b est un diviseur de la largeur. Nous laisserons au lecteur le plaisir de poursuivre cette analyse de la situation.

Hexagones

> Le logiciel Jeux2019 comprend deux jeux de type « logique ». Nous entendons par là des jeux ne mettant en œuvre que des raisonnements purs et aucun calcul numérique.

L'un d'entre eux, « Retournements » a fait l'objet d'une description complète dans le numéro 3 de la revue *Losanges* [2]. Nous vous présentons ici le second, « Hexagones ».

D'après J. Miéwis [3], ce jeu aurait été inventé par J.-P. Labrique en 1981 et publié pour la première fois dans la revue *Pour la Science*. Cette version initiale était nettement plus complexe que celle que nous avons insérée dans Jeux2019.

Le jeu comporte trois niveaux de difficulté associés à la taille d'une grille d'hexagones. Les tailles proposées par le menu sont les suivantes : 2-3-2, 2-3-4-3-2, 3-4-5-4-3. Choisissons le niveau moyen : 2-3-4-3-2. Deux grilles apparaissent à l'ouverture du jeu :

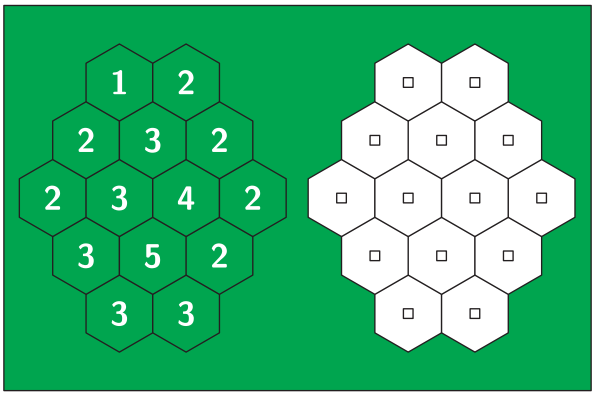


Figure 9

Un nombre est indiqué dans chaque hexagone de la grille de gauche. Au centre de chaque hexagone de la grille de droite, un bouton poussoir permet au joueur de modifier la couleur de fond de cet hexagone. Trois couleurs sont disponibles : d'abord la couleur initiale, c'est-à-dire blanc, ensuite gris foncé et enfin orange. Le joueur doit colorier en gris ou en orange tous les hexagones de droite de telle sorte que chacun d'entre eux soit voisin d'autant d'hexagones orange que le nombre indiqué à l'emplacement correspondant de la grille de gauche. Attention : chaque hexagone est considéré comme étant voisin de lui-même. Les nombres de la grille de gauche peuvent dont varier de 0 à 7.

Les grilles du niveau 2-3-2 sont relativement faciles. La difficulté des grilles des deux autres niveaux est très variable. Dans le cas de l'exemple ci-dessus, le joueur peut directement trouver la couleur à apposer sur le troisième hexagone de la deuxième ligne à partir du haut. Mais pour progresser ensuite, il ne peut que faire une ou des hypothèses et tester celles-ci en en déterminant les conséquences. Bien souvent il sera amené à invalider son hypothèse et à en formuler une autre. Tout cela nécessite une bonne organisation. Par exemple désigner d'un nom spécifique chaque hexagone, noter chaque modification de couleur, noter les hypothèses faites, celles qui sont invalidées. En bref, il est conseillé à chaque joueur d'élaborer une méthode personnelle de résolution de toute situation de ce type. Si cette méthode est réellement opérationnelle, elle devrait pouvoir être convertie en un algorithme utilisable par l'ordinateur lui-même.

La solution du problème de la figure 9 se trouve ci-dessous.

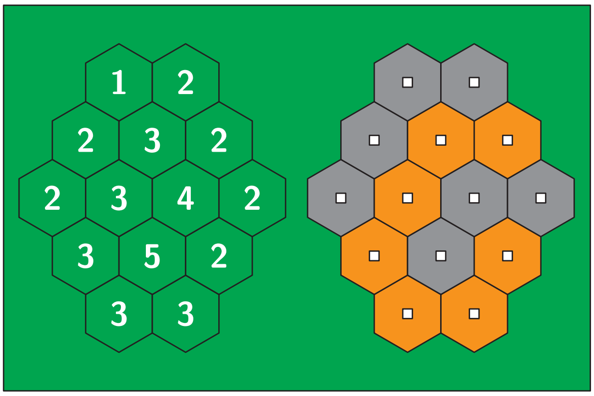


Figure 10

Références

[1] M. Ballieu et al. *Jeux mathématiques 1*. Université de Mons-Hainaut, 1992.

[2] G. Noël. « Autopsie d'un jeu ». In : *Losanges* nº 3 (2009), pp. 49-56.

[3] J. Miéwis. *Le coin des problèmes, tome 2*. SBPMef, 2019.

[4] Y. Noël-Roch. « Les nombres cachés 1 ». In : *Math-Jeunes* nº 95 (2000), pp. 8-12.

[5] Y. Noël-Roch. « Les nombres cachés 2 ». In : *Math-Jeunes* nº 96 (2001), pp. 26-29.

[6] Y. Noël-Roch. « Les nombres cachés 3 ». In : *Math-Jeunes* nº 97 (2001), pp. 54-58.

[7] G. Noël et Y. Noël-Roch. « C'est quoi, une équation ? » In : *Losanges* nº 46 (2019), pp. 35-40.

Désormais retraité, Guy Noël était professeur à l'Université de Mons où il était notamment chargé de la préparation à l'enseignement des futurs licenciés en sciences mathématiques.

gnoel@conifere.be

Yolande Noël-Roch, également retraitée, était professeure à l'École Normale de l'État à Mons où ses étudiants se préparaient à enseigner les mathématiques au premier cycle de l'enseignement secondaire.

yolande@conifere.be

Au Fil des Maths a besoin de vous

J'ai un peu de temps

Écrire une fiche d'activité SNT pour la partager (modèle de fiche sur demande : Lise).

Travail ponctuel.
≈ 2 h
Prérequis : enseigner en lycée.

Relire des articles pour la revue numérique avant la mise en ligne (contact : Marianne).

Libre organisation du temps avec délai à respecter.
≈ 30 min par article
Prérequis : être bon en orthographe.

Donner un coup de main à la revue numérique en codant un article en html (aide et tuto : Marianne).

Libre organisation du temps avec délai à respecter.
≈ 3 h
Prérequis : avoir des connaissances de base en langage par balise ou en TeX. Avoir envie d'apprendre.

Comment nous aider ?

J'ai davantage de temps

Donner un grand coup de main à la revue numérique en codant plusieurs articles en html (aide et tuto : Marianne).

Libre organisation du temps avec délais à respecter.
≈ 3 h par article
Prérequis : avoir des connaissances de base en langage par balise ou en TeX. Avoir envie d'apprendre.

Rejoindre l'équipe technique : coder en TeX un ou plusieurs articles selon un cahier des charges (contact : Isabelle).

Travail régulier : tous les trois mois avec délais à respecter.
≈ 30 min par page
Prérequis : maîtriser LaTeX.

Écrire un article ! Tous les niveaux et toutes les thématiques nous intéressent (angoisse de la page blanche : Lise).

Travail ponctuel.
≈ 6 h
Prérequis : avoir un sujet… mais pas besoin d'être doué en écriture !

J'ai beaucoup de temps

Rejoindre l'équipe de rédaction : une bonne idée ! (tout renseignement : Lise).

Travail avec engagement.
5 réunions par an à Paris (des samedis).
Travail sur des articles en dehors des réunions.
Prérequis : aimer travailler en groupe et mener un projet à terme dans le respect des contraintes éditoriales.
Avoir envie de s'investir.

Écrire des recensions : lire un ouvrage récent (proposé et fourni par Valérie) puis écrire un court article pour le décrire et le commenter pour le faire découvrir aux collègues.

Libre organisation du temps, avec engagement.
≈ 6 h par article
Prérequis : aimer lire et donner une opinion argumentée.

Isabelle : iflavier@orange.fr
Lise : aufildesmaths@apmep.fr
Marianne : marianne.fabre@ac-amiens.fr
Valérie : laroseAFDM@netc.fr

Sommaire du nº 535

Faites vos jeux !

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr