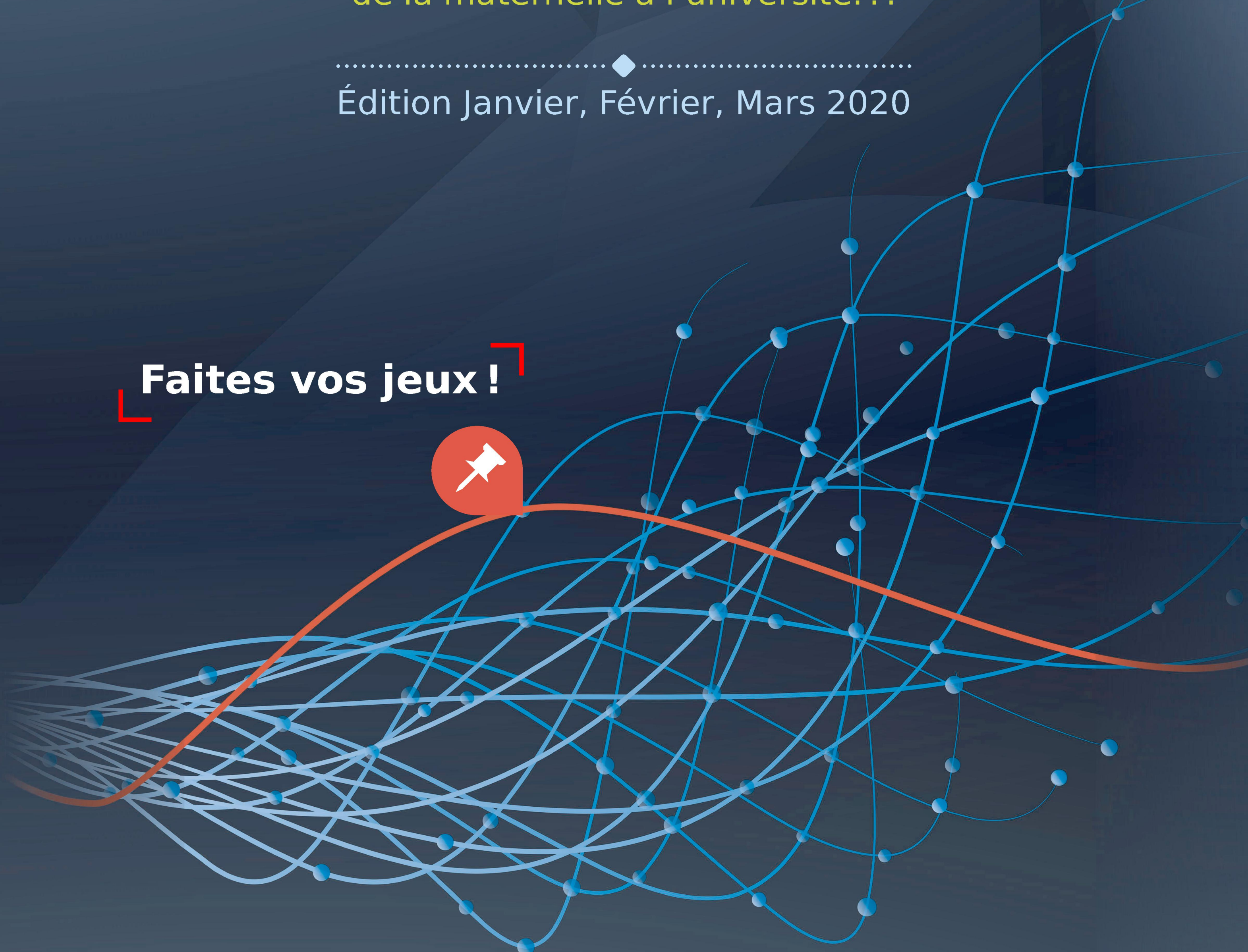
Le bulletin de l'APMEP - N° 535

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2020

Faites vos jeux !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien Planchenault.*

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise Malrieu.*

Rédacteurs : *Vincent Beck, François Boucher, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Frédéric De Ligt, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Lise Malrieu, Daniel Vagost, Thomas Villemonteix, Christine Zelty.*

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle Clément, Nada Dragovic, Laure Étévez, Marianne Fabre, Robert Ferréol, Adrien Guinemer, Céline Monluc, Christophe Romero, Jacques Vallois.*

Illustrateurs : *Pol Le Gall, Olivier Longuet, Jean-Sébastien Masset.*

Équipe TEXnique : *François Couturier, Isabelle Flavier, Anne Héam, François Pétiard, Olivier Reboux, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Michel Suquet.*

Maquette : *Olivier Reboux.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Mars 2020
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

APMEP

« *Gentilles* » fonctions polynomiales de degré 3

Trouver des fonctions sur lesquelles les calculs sont simples pour que les élèves puissent s'exercer sur les nouvelles notions qu'ils rencontrent n'est pas si facile. Dans cet article, Jacques Marot s'intéresse aux polynômes de degré 3 à racines entières et dont la dérivée a aussi des racines entières... Difficile de faire plus simple pour les calculs.

Jacques Marot

Introduction

Lors de l'initiation à l'étude des variations d'une fonction f à l'aide du signe de sa fonction dérivée, il serait bienvenu que les deux fonctions f et f' s'annulent pour des valeurs exclusivement dans $\mathbb{Z}$. Walter Mesnier, enseignant au lycée du Bois d'Amour à Poitiers, qui nous avait soumis ce problème dans la défunte rubrique : « Problème de la quinzaine »[1] du site de l'académie de Poitiers, avait qualifié de « *gentilles* » ces fonctions f définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que les solutions des équations $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ soient toutes entières. Il est très simple de proposer à nos élèves de « *gentilles* » fonctions polynomiales de degré 2 : si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, il faut et il suffit que x_1 et x_2 soient des entiers de même parité pour que f soit « *gentille* ». Mais si nous recherchons la forme générale d'un polynôme de degré 3 scindé dans $\mathbb{Z}$ tel que son polynôme dérivé soit lui aussi scindé dans $\mathbb{Z}$, nous tombons sur un problème moins trivial à résoudre, puisqu'il s'agit de déterminer les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation diophantienne $12n^2 = 3p^2 + q^2$. La résolution de ce problème aboutit à un module GeoGebra permettant de construire toute « *gentille* » fonction polynomiale de degré 3 ; il est disponible sur GeoGebra-TUBE (rechercher `gentille fonction`) à cette adresse : ▶.

Nous terminerons par le fameux « *Casus irreducibilis* »[2], qui montre que l'utilisation de radicaux réels n'est pas suffisante pour exprimer les trois racines réelles d'une équation aussi simple que $8x^3 - 6x - 1 = 0$, ce qui fait donc de la fonction g telle que $g(x) = 8x^3 - 6x - 1$ une fonction extrêmement méchante dont la dérivée est pourtant extrêmement « *gentille* ». Signalons que la version numérique de cet article évoque en plus les méthodes de résolution d'une équation de degré 3 lorsqu'il n'y a qu'une ou deux solutions.

Solutions d'une équation de degré 3 exprimées à l'aide de la fonction cosinus

Étant donné $(b\,;\,c\,;\,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad x^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}$, nous allons rechercher les conditions pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en trois points distincts.

1. Chercher « `Une famille de fonctions gentilles` » sur le site de l'académie de Poitiers ▶.
2. Voir Wikipedia ▶.

Paramétrisation d'une partie de la cubique $\mathscr{C}_f$ à l'aide de la fonction cosinus

La fonction dérivée de f est la fonction du second degré f', telle que $f'(x) = 3x^2+2bx+c = 3\left(x+\frac{b}{3}\right)^2 - \frac{\Delta}{3}$ où Δ est le discriminant réduit b^2-3c. Cette dérivée est représentée par une parabole $\mathscr{C}_{f'}$ qui admet pour sommet le point $\mathsf{S}\left(-\frac{b}{3}\,;\,-\frac{\Delta}{3}\right)$; ce point a même abscisse que le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ car c'est pour cette valeur que la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe. Nous en déduisons le développement de Taylor suivant de f en $x_0 = -\frac{b}{3}$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + f''(x_0)\,\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\,\frac{h^3}{6} = f\left(-\frac{b}{3}\right) - \frac{\Delta}{3}h + h^3.$$

Cette expression de f met en évidence que $\mathsf{C}(x_0\,;\,f(x_0))$ est aussi centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$, car lorsque h est changé en son opposé, il en est de même de l'écart entre $f(x_0+h)$ et $f(x_0)$.

Si nous voulons que l'équation $f(x) = 0$ admette trois solutions réelles distinctes, alors $f'(x)$ doit nécessairement changer deux fois de signe ; nous devons donc avoir $\Delta > 0$, mais cela ne suffit pas.

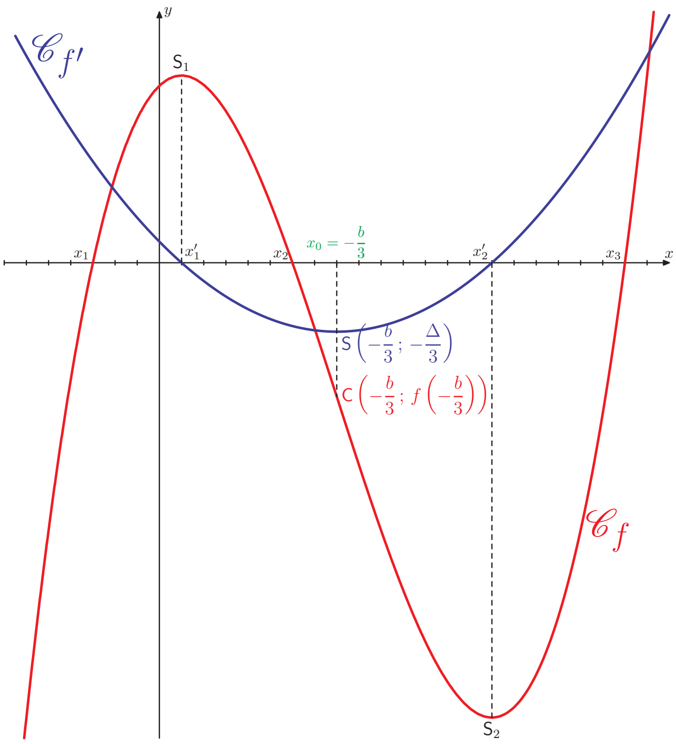


Figure 1. *Courbes représentatives de f et f' telles que $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ avec $b^2-3c>0$.*

Pour parvenir à une condition suffisante, exprimons notre développement de Taylor avec $h = r.\cos(\alpha)$, où $r = \frac{2\sqrt{\Delta}}{3}$ est l'écart entre les abscisses $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{3}$ des sommets de la cubique $\mathscr{C}_f$:

$$f\left(-\frac{b}{3}+r.\cos(\alpha)\right) = f\left(-\frac{b}{3}\right) - \frac{\Delta}{3}\times\frac{2\sqrt{\Delta}}{3}\cos(\alpha) + \frac{8\sqrt{\Delta^3}}{27}\cos^3(\alpha) = f\left(-\frac{b}{3}\right) + \frac{8\sqrt{\Delta^3}}{27}\left(\cos^3(\alpha) - \frac{3}{4}\cos(\alpha)\right)$$

À l'aide de l'identité $\cos^3(\alpha) = \left(\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3 = \dfrac{e^{3i\alpha}+e^{-3i\alpha}}{8} + 3\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{8} = \dfrac{1}{4}\cos(3\alpha) + \dfrac{3}{4}\cos(\alpha)$, nous en déduisons :

$$\boldsymbol{f\left(-\frac{b}{3} + r.\cos(\alpha)\right) = f\left(-\frac{b}{3}\right) + \frac{r^3}{4}\cdot\cos(3\alpha).}$$

Lorsqu'une fonction polynomiale f de degré 3 admet un maximum et un minimum local, comme celles représentées en figure 1 ou 2 par des courbes qui admettent deux sommets S_1 et S_2, une partie de la courbe est assimilable à une courbe de Lissajous. C'est ce qui est détaillé avec plus de précision sur la partie de la courbe comprise dans le rectangle bleu de la figure 2.

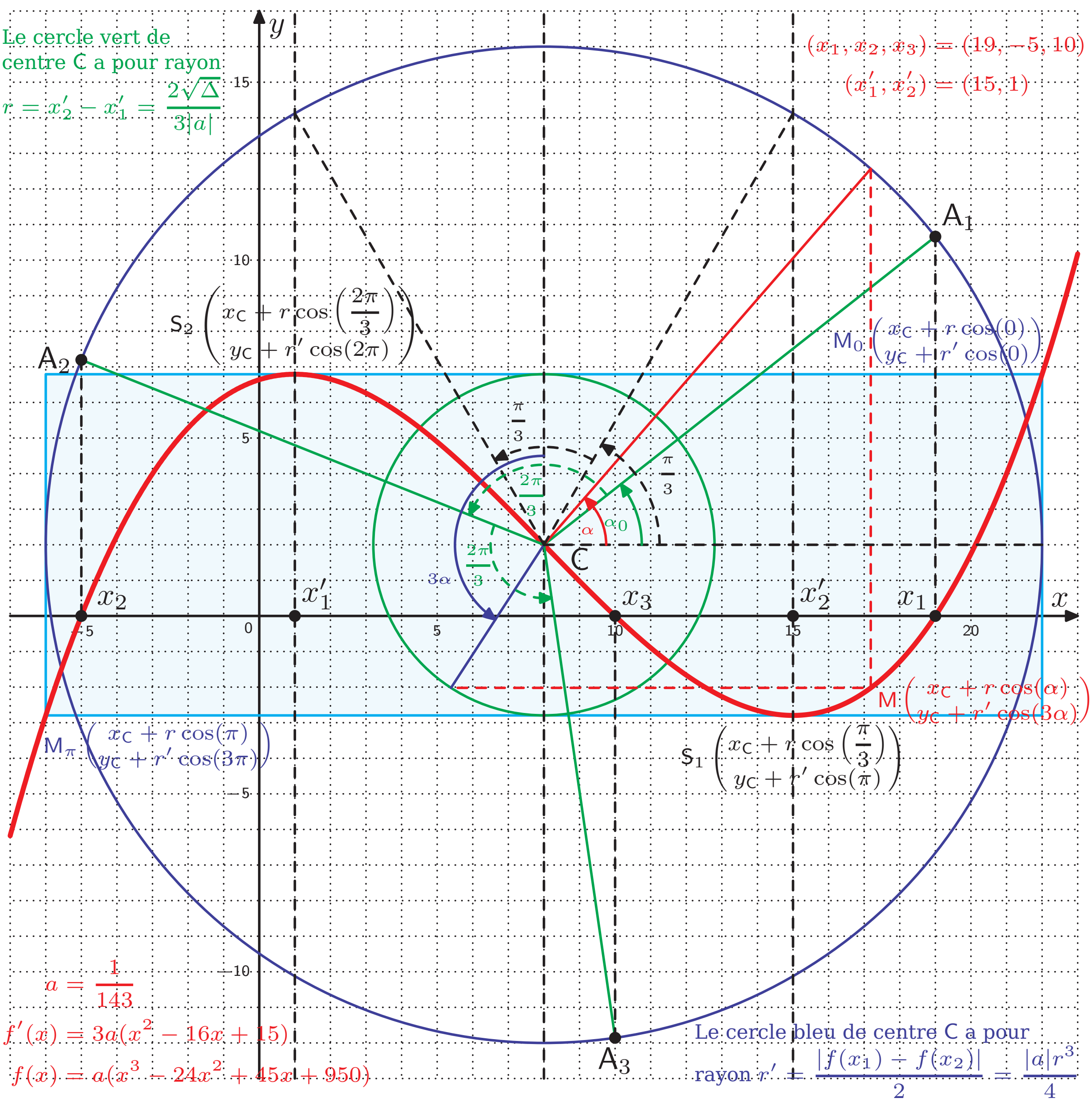


Figure 2. « Gentille » *fonction f telle que* $f(x) = a(x+5)(x-10)(x-19)$ *et* $f'(x) = 3a(x-1)(x-15)$.

L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles distinctes si et seulement si $\mathscr{C}_f$ coupe trois fois l'axe des abscisses ; cet axe doit donc être sécant avec le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{r^3}{4}\cdot$ Pour que notre équation ait trois solutions distinctes, il faut donc adjoindre à l'inégalité $\Delta > 0$ cette autre condition : $\left|f\left(-\dfrac{b}{3}\right)\right| < \dfrac{r^3}{4}\cdot$ Les solutions x_1, x_2 et x_3 de l'équation $f(x) = 0$ et les solutions x_1' et x_2' de l'équation $f'(x) = 0$ peuvent alors s'exprimer à l'aide de $\alpha_0 = \arccos\left(-\dfrac{4}{r^3}f\left(-\dfrac{b}{3}\right)\right)$ et $r = \dfrac{2\sqrt{\Delta}}{3}$:

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{b}{3} - \dfrac{r}{2} \\ x_2' = -\dfrac{b}{3} + \dfrac{r}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{b}{3} + r.\cos\left(\dfrac{\alpha_0}{3}\right) \\ x_2 = -\dfrac{b}{3} + r.\cos\left(\dfrac{\alpha_0 - 2\pi}{3}\right) \\ x_3 = -\dfrac{b}{3} + r.\cos\left(\dfrac{\alpha_0 + 2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Il sera révélé page 68 comment a été fabriquée la « *gentille* » fonction de la figure 2 dont une version animée est consultable sur GeoGebra-TUBE à l'adresse indiquée ci-dessus.

Remarques générales sur les équations du troisième degré

Nous avons pris l'habitude de dire que les équations algébriques de degré inférieur ou égal à 4 sont résolubles par radicaux, mais il faut bien s'entendre sur la signification de l'expression « résoluble par radicaux », car lorsque qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet trois racines réelles distinctes, il nous faut déterminer $\cos(\alpha)$ pour lequel le réel $\cos(3\alpha)$ s'exprime par des opérations élémentaires sur les coefficients du polynôme. Chercher $\cos(\alpha)$ tel que $\cos(3\alpha) = A$ se ramène au problème de la trisection d'un angle dont $A \in [-1\,;1]$ est le cosinus, pour exprimer la partie réelle de la racine cubique du nombre complexe $A \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - A^2}$. Pouvons-nous parler d'une résolution par radicaux, lorsqu'il s'agit de calculer les racines cubiques d'un nombre complexe non réel tel $A + \mathrm{i}B$? Sauf cas particulier, aucune des trois racines cubiques de $A + \mathrm{i}B$ n'est exprimable à l'aide de radicaux, au sens où il s'agirait de racines carrées ou cubiques de nombres réels exprimables par des opérations élémentaires sur les réels A et B. Il serait judicieux de remplacer l'expression « résoluble par radicaux » par « extractions de racines », car les racines cubiques d'un complexe non réel ne sont généralement pas évaluables par des procédés algébriques, c'est ce qui est expliqué page 68, en montrant l'impasse dans laquelle nous nous trouvons pour exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ à l'aide de radicaux où n'interviendraient que des nombres réels ; ce réel $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ est pourtant solution de $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

En revanche, si un polynôme de degré 3 à coefficients réels n'admet que deux racines réelles distinctes dont une de multiplicité égale à 2, ou bien une seule racine réelle et deux autres complexes conjuguées non réelles, il devient possible d'exprimer les racines à l'aide de racines carrées et cubiques de nombres réels exprimables par des opérations élémentaires sur les coefficients réels du polynôme. Nous utilisons à cet effet les fonctions hyperboliques $\cosh$ ou $\sinh$ restreintes à $\mathbb{R}$, à la place de la fonction $\cos$. Le fait que les réciproques de $\sinh_{|\mathbb{R}}$ et $\cosh_{|[0\,;+\infty[}$ soient exprimables à l'aide de la fonction logarithme népérien permet d'exprimer les solutions par radicaux réels ; des explications plus détaillées sont fournies dans la version numérique.

Nous remarquerons aussi que, contrairement aux bruits qui courent dans la littérature mathématique qui ne jure que par la méthode de Cardan, il n'y a nulle nécessité à faire intervenir le corps $\mathbb{C}$ pour calculer les solutions d'une équation de degré 3 lorsqu'elles sont toutes les trois réelles. Les calculs dans $\mathbb{C}$ sont bien entendu dissimulés derrière l'identité d'Euler : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^n = 2^n\cos^n(x)$ mais, pour $n = 3$, l'identité $4\cos^3(x) = \cos(3x) + 3\cos(x)$ est aisément vérifiable sans intervention de nombres complexes.

Recherche de « *gentilles* » fonctions polynomiales de degré 3

Une équation diophantienne

Ramenons le problème à l'équation diophantienne $12n^2 = 3p^2 + q^2$.

Nous allons chercher quelle forme doit prendre le triplet $(x_1\,;\,x_2\,;\,x_3) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pour que le polynôme dérivé de $P(X) = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ n'admette lui aussi que des racines entières. Toute « *gentille* » fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale de degré 3 pourra être obtenue à partir d'un polynôme comme P, en posant $f(x) = aP(x)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ quelconque.

Étant donné que $P'(X) = 3X^2 - 2(x_1+x_2+x_3)X + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, nous voudrions qu'il existe un couple $(x'_1\,;\,x'_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que : $x'_1 + x'_2 = \dfrac{2(x_1+x_2+x_3)}{3}$ et $x'_1x'_2 = \dfrac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3}$.

Posons $x_{\mathrm{C}} = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} = \dfrac{x'_1+x'_2}{2}$; l'hypothèse $\{x'_1, x'_2, x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{Z}$ implique que x_{C} $\big($qui est aussi égal à $(x_1+x_2+x_3) - (x'_1+x'_2)\big)$ est également un élément de $\mathbb{Z}$; et cet entier est l'abscisse du centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction polynomiale f telle que $f(x) = a.P(x)$. Soit l'entier naturel $n = |x'_2 - x_{\mathrm{C}}| = |x_{\mathrm{C}} - x'_1|$; si $a = 1$ nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe précédent avec $r = 2n$ car ils permettent de paramétrer une partie de la cubique $\mathscr{C}_f$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{C}} + 2n.\cos(t) \\ y(t) = f\left(x_{\mathrm{C}}\right) + 2n^3.\cos(3t) \end{cases} \qquad \text{avec } t \in [0\,;\pi].$$

En permutant éventuellement les indices 1, 2 et 3 et en posant $\alpha = \dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{-f\left(x_{\mathrm{C}}\right)}{2n^3}\right)$, cette paramétrisation d'une partie de $\mathscr{C}_f$ permet d'exprimer les solutions de $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 = x_{\mathrm{C}} + 2n.\cos(\alpha) \\ x_2 = x_{\mathrm{C}} - n.\cos(\alpha) - n.\sqrt{3}\sin(\alpha) \\ x_3 = x_{\mathrm{C}} - n.\cos(\alpha) + n.\sqrt{3}\sin(\alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = x_{\mathrm{C}} - n \\ x'_2 = x_{\mathrm{C}} + n \end{cases}$$

L'entier x_{C} peut être choisi arbitrairement. Cela se traduit par le fait que toute « *gentille* » fonction est dans une classe d'équivalence de fonctions, dont les courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les translatées les unes des autres par un vecteur $k \cdot \vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais nous devons rechercher un réel α et des entiers p et q tels que $p = x_1 - x_{\mathrm{C}} = 2n\cos(\alpha)$ et $q = x_3 - x_2 = 2n\sqrt{3}\sin(\alpha)$ et qui permettent d'exprimer les racines de la manière suivante : • $x_1 = x_{\mathrm{C}} + p$; • $x_2 = x_{\mathrm{C}} - \dfrac{1}{2}(p+q)$; • $x_3 = x_{\mathrm{C}} - \dfrac{1}{2}(p-q)$.

Ces expressions permettent tout à fait d'envisager les situations avec racine triple ou double :

- nous avons $x_1 = x_2 = x_3 = x_{\mathrm{C}}$ si et seulement si $p = q = n = 0$;
- nous avons $x_3 = x_2 = x_{\mathrm{C}} \pm n$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$; nous avons alors $q = 0$, $p = \pm 2n$ et $x_1 = x_{\mathrm{C}} \pm 2n$;
- nous avons $x_1 = x_3 = x_{\mathrm{C}} + n$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; nous avons alors $p = n$, $q = 3n$ et $x_1 = x_{\mathrm{C}} - 2n$;
- nous avons $x_1 = x_2 = x_{\mathrm{C}} - n$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$; nous avons alors $p = -n$, $q = 3n$ et $x_3 = x_{\mathrm{C}} + 2n$.

En toute situation, y compris les quatre cas particuliers que nous venons d'évoquer, $(n\,;\,p\,;\,q)$ doit toujours vérifier $\left(\dfrac{p}{2n}\right)^2 + \left(\dfrac{q}{2n\sqrt{3}}\right)^2 = 1$, ce qui équivaut à l'équation diophantienne $12n^2 = 3p^2 + q^2$. Il apparaît des solutions évidentes de cette équation, déduites des situations avec racines doubles : si $p = \pm 2n$ nous obtenons $q = 0$, si $p = \pm n$ nous obtenons $q = \pm 3n$.

> Les triplets solutions de l'équation diophantienne qui fournissent des polynômes avec racines multiples sont donc uniquement de la forme $(n\,;\,\pm 2n\,;\,0)$ ou $(n\,;\,\pm n\,;\,\pm 3n)$. Ils permettent d'exprimer, à l'aide d'un entier quelconque n dans $\mathbb{Z}$, des polynômes tels que $P(X) = (X - x_C - 2n)(X - x_C + n)^2$ et $P'(X) = 3(X - x_C + n)(X - x_C - n)$; le réel x_C peut être racine triple de P et double de P' si et seulement si $n = 0$.

Les calculs ci-dessous permettent de vérifier que toute autre solution de l'équation diophantienne qui permet d'exprimer les racines entières d'un polynôme P est telle que P' admette lui aussi des racines entières distinctes.

$$x_1x_2 + x_1x_3 = (x_C + p)(2x_C - p) = 2x_C^2 + px_C - p^2 \quad \text{et} \quad x_2x_3 = x_C^2 - px_C + \frac{p^2 - q^2}{4} = x_C^2 - px_C + p^2 - 3n^2.$$

Donc :

$$P'(X) = 3X^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)X + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3X^2 - 6x_CX + 3x_C^2 - 3n^2 = 3\,(X - x_C - n)\,(X - x_C + n).$$

Recherche des premières solutions de l'équation diophantienne sur TI-83-Python

Toute solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation diophantienne $12n^2 = 3p^2 + q^2$ pourra s'écrire $(dn\,;\,d'p\,;\,d''q)$, avec trois entiers relatifs d, d' et d'' de mêmes valeurs absolues et un triplet $(n\,;\,p\,;\,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que nous qualifierons de primitif lorsque n, p et q sont premiers entre eux. Pour plus d'efficacité nous allons donc rechercher les seules solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, pour lesquelles nous aurons $\mathrm{PGCD}(n, p, q) = 1$. Avec $n > 1$ nous ne pourrons obtenir que des polynômes avec trois racines distinctes, car nous avons vu que seuls les triplets de la forme $(n\,;\,\pm 2n\,;\,0)$ ou $(n\,;\,\pm n\,;\,\pm 3n)$, permettent de former des polynômes avec une racine double, voire triple si $n = 0$. Étant donné un entier naturel k à choisir lors de l'exécution sur calculatrice TI-83 du script Python ci-dessous, nous recherchons de manière exhaustive les solutions primitives pour tout entier $n \in [\![1\,;\,k]\!]$.

Nous testons seulement les entiers $p \in [\![1\,;\,2n[\![$ pour lesquels $\mathrm{PGCD}(n, p) = 1$, car si trois entiers n, p et q premiers entre eux sont liés par la relation $12n^2 = 3p^2 + q^2$, alors tout facteur premier commun à n et p est aussi nécessairement facteur premier de q. Les deux seuls entiers n et p sont donc premiers entre eux si et seulement si $\mathrm{PGCD}(n, p, q) = 1$. Nous devons ensuite rechercher des couples d'entiers naturels $(n\,;\,p)$ tels que $12n^2 - 3p^2$ soit le carré parfait d'un entier q ; nous sélectionnons pour cela tous les entiers $p \in [\![1\,;\,2n[\![$ premiers avec n et tels que $\sqrt{12n^2 - 3p^2}$ soit un entier.

```
from math import sqrt
#le pgcd n'est pas implémenté sur TI 83
def pgcd(a,b):
  while b:a,b=b,a%b
  return a
k=int(input("k=?"))
for n in range(k+1):
  for p in range(2*n):
    if pgcd(n,p)==1 :
      q=int(sqrt(12*n**2-3*p**2))
      if q**2+3*p**2==12*n**2 :
        print(n,p,q)
```

Pour $n < 7$, ce script affiche pour unique solution $(1\,;\,1\,;\,3)$, c'est le seul triplet primitif avec $q \neq 0$ qui peut générer des polynômes qui ont une racine double.

Dès qu'un entier $n \geqslant 7$ permet d'obtenir des solutions, il en apparaît au moins trois distinctes avec ce même entier n. Cela vient du fait que si $(n\,;\,p\,;\,q)$ est une première solution primitive, l'entier p est la distance entre la racine désignée arbitrairement par x_1 et la moyenne x_C des trois racines ; nous pouvons donc exprimer au moins deux autres triplets solutions de l'équation diophantienne en remplaçant p par les distances entre x_C et l'une des deux autres racines : $p' = |x_2 - x_C| = \dfrac{|p - q|}{2}$ ou $p'' = |x_3 - x_C| = \dfrac{p + q}{2}$.
Nous vérifions ainsi que $(n\,;\,p'\,;\,q') = \left(n\,;\,\dfrac{|p - q|}{2}\,;\,\dfrac{3p + q}{2}\right)$ et $(n\,;\,p''\,;\,q'') = \left(n\,;\,\dfrac{p + q}{2}\,;\,\dfrac{|3p - q|}{2}\right)$ sont

aussi deux autres solutions de l'équation diophantienne :

$$3\left(\frac{p-q}{2}\right)^2+\left(\frac{3p+q}{2}\right)^2=3\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(\frac{3p-q}{2}\right)^2=3p^2+q^2=12n^2.$$

Nous reviendrons sur ce fait page 68 : nous vérifierons que si $(n\,;p\,;q)$ est une solution primitive, alors $(n\,;p'\,;q')$ et $(n\,;p''\,;q'')$ sont aussi des solutions primitives qui engendrent une même famille de « *gentilles* » fonctions polynomiales du troisième degré. Nous montrerons aussi que parmi ces trois triplets, il en existe toujours un et un seul dont la dernière composante q, q' ou q'' est multiple de 24, cela permettra d'exprimer plus simplement toute « *gentille* » fonction polynomiale de degré 3. Pour $n<60$, il faut $n\in\{7\,;13\,;19\,;31\,;37\,;43\,;49\}$ pour obtenir des solutions, cela nous fournit une première liste de sept ensembles de trois triplets primitifs qui permettent d'engendrer chacun toute une famille de « *gentilles* » fonctions obtenues en faisant varier $(a\,;x_C\,;d)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

- $E_7=\{(7\,;2\,;24),(7\,;11\,;15),(7\,;13\,;9)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x-x_C+13d)\,(x-x_C-2d)\,(x-x_C-11d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+7d)(x-x_C-7d)$$

- $E_{13}=\{(13\,;1\,;45),(13\,;22\,;24),(13\,;23\,;21)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x-x_C+23d)\,(x-x_C-d)\,(x-x_C-22d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+13d)(x-x_C-13d)$$

- $E_{19}=\{(19\,;11\,;63),(19\,;26\,;48),(19\,;37\,;15)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x-x_C+37d)\,(x-x_C-11d)\,(x-x_C-26d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+19d)(x-x_C-19d)$$

- $E_{31}=\{(31\,;13\,;105),(31\,;46\,;72),(31\,;59\,;33)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x-x_C+59d)\,(x-x_C-13d)\,(x-x_C-46d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+31d)(x-x_C-31d)$$

- $E_{37}=\{(37\,;26\,;120),(37\,;47\,;99),(37\,;73\,;21)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x-x_C+73d)\,(x-x_C-26d)\,(x-x_C-47d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+37d)(x-x_C-37d)$$

- $E_{43}=\{(43\,;22\,;144),(43\,;61\,;105),(43\,;83\,;39)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x-x_C+83d)\,(x-x_C-22d)\,(x-x_C-61d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+43d)(x-x_C-43d)$$

- $E_{49}=\{(49\,;23\,;165),(49\,;71\,;117),(49\,;94\,;48)\}$ fournit les fonctions f telles que :

$$f(x)=a\,(x+x_C+94d)\,(x-x_C-23d)\,(x-x_C-71d)\quad\text{et}\quad f'(x)=3a(x-x_C+49d)(x-x_C-49d)$$

Pour une même valeur de n, notre équation diophantienne peut avoir plus de trois solutions, mais toujours en nombre multiple de 3. Pour qu'il y en ait six, il faut au minimum $n=91$; les solutions obtenues sont (91 ; 61 ; 297), (91 ; 74 ; 288), (91 ; 107 ; 255), (91 ; 118 ; 240), (91 ; 179 ; 57), (91 ; 181 ; 33). Elles permettent d'exprimer deux fonctions :

$$f_1(x)=a\,(x-x_C+179d)\,(x-x_C-61d)\,(x-x_C-118d)$$
$$f_2(x)=a\,(x-x_C+181d)\,(x-x_C-74d)\,(x-x_C-107d)$$

Ces deux fonctions ont la même fonction dérivée f' telle que : $f'(x) = 3a(x - x_C + 91d)(x - x_C - 91d)$. Nous pouvons vérifier que f_1 et f_2 ont bien les mêmes coefficients de degré 3, 2 et 1, qui sont respectivement a, $-3ax_C$ et $a(3x_C^2 - 24\,843d^3)$, mais leurs coefficients de degré 0 sont nécessairement différents étant donné que f_1 et f_2 sont différentes, sinon leurs décompositions en facteurs irréductibles ci-dessus seraient identiques.

Le plus petit entier n qui fournit plus de six solutions est 1 729 pour lequel il y a douze solutions, le plus petit entier pour lequel nous obtenons plus de douze solutions est $n = 53\,599$, pour lequel il y en a vingt-quatre. Cette progression géométrique du nombre de solutions : 3 ; 6 ; 12 ; 24 est assez étonnante, d'autant plus que plusieurs heures de calcul n'ont pas permis de trouver un entier n pour lequel il y ait un nombre de solutions égal à 9, 15, 18 ou 21. Pour parvenir à ces résultats donnés en annexe A[3], il est proposé un algorithme plus efficace que celui utilisé ci-dessus, car il est inadapté pour de très grands entiers. La méthode utilisée qui consiste à tester tous les termes d'une suite arithmétique, même si celle-ci est bien choisie, demande des temps de calculs extrêmement longs sur calculatrice. Sur ordinateur les temps de calculs sont considérablement raccourcis, mais la méthode utilisée devient quand même inopérante pour les grands entiers, car bien que Python soit censé effectuer des calculs arithmétiques exacts sans borne supérieure pour les entiers, il n'en est pas de même avec les nombres réels dont l'approximation en machine par un nombre décimal flottant est obligatoirement limitée en précision. Nous tombons alors dans un piège inhérent à tout calcul automatisé dès que n devient trop grand : nous constatons des inégalités `sqrt` $\left(n^2\right) \neq |n|$ arithmétiquement fausses car la fonction `sqrt` retourne des résultats de type « flottants » limités en précision ; il faudra donc prévoir une procédure spéciale pour reconnaître un carré parfait très grand. Après avoir résolu l'équation diophantienne dans le paragraphe suivant, nous proposons en annexe A[4] un script Python optimisé tenant compte de ces remarques ; les temps de calcul sont considérablement améliorés et nous découvrirons ainsi qu'avec $n = 3\,591\,133$ il y a quarante-huit solutions.

Solution générale de l'équation diophantienne

Nous avons déjà vu que notre équation $12n^2 = 3p^2 + q^2$ admet comme solutions évidentes dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tous les triplets de la forme $(n\,;\,n\,;\,3n)$ ou $(n\,;\,2n\,;\,0)$ avec $n \in \mathbb{N}$, et que ces solutions ne permettaient d'obtenir que des polynômes ayant une racine double, voire triple si $n = 0$. Pour obtenir des polynômes avec trois racines entières distinctes, il faut et il suffit que les entiers naturels p et q vérifient $q \neq 0$ et $3p \neq q$; toute solution avec $n > 1$ telle que $\mathrm{PGCD}(n, p, q) = 1$ fournira donc des polynômes avec trois racines simples.

Si $(n\,;\,p\,;\,q)$ est une telle solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $3p^2 + q^2 = 12n^2$, alors $n \neq 0$ et $\left(\dfrac{q}{n}\,;\,\dfrac{p}{n}\right)$ est solution dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ de l'équation en $(x\,;\,y)$: $x^2 + 3y^2 = 12$. Réciproquement, toute solution dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ de cette équation exprimée sous la forme $(x, y) = \left(\dfrac{q}{n}, \dfrac{p}{n}\right)$, à l'aide de $(n\,;\,p\,;\,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, fournit ce triplet comme solution de notre équation diophantienne. Le point $\mathsf{A}(0\,;\,-2)$ sur l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + 3y^2 = 12$ tracée en figure 3, va nous servir de point de départ pour déterminer tous les autres points de coordonnées rationnelles sur $\mathscr{E}$.

3. Cette annexe est accessible en ligne sur le site d'*Au fil des maths*.
4. Voir note précédente.

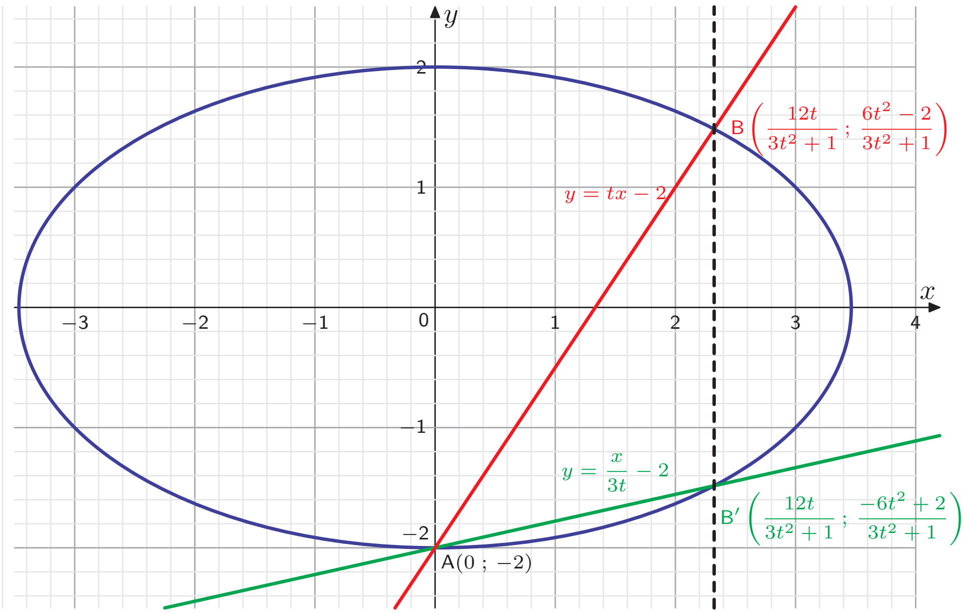


Figure 3. *Ellipse admettant les équations paramétriques* $x(t) = \dfrac{12t}{3t^2+1}$ *et* $y(t) = \dfrac{6t^2-2}{3t^2+1}$.

> Si un autre point B sur cette ellipse a des coordonnées rationnelles, le coefficient directeur de la droite (AB) qui est $\dfrac{y_{\mathrm{B}}+2}{x_{\mathrm{B}}}$ est lui aussi rationnel. Réciproquement, considérons une droite d passant par A de coefficient directeur rationnel t, elle admet pour équation $y = tx - 2$; en substituant $tx - 2$ à y dans l'équation de $\mathscr{E}$ ci-dessus, nous pouvons vérifier que d recoupe $\mathscr{E}$ en un point B à coordonnées rationnelles, car nous devons résoudre cette équation de degré 2 $x^2 + 3(t^2x^2 - 4tx + 4) = 12$ équivalente à $x\left((3t^2+1)x - 12t\right) = 0$. L'abscisse de B est donc $\dfrac{12t}{3t^2+1}$ et son ordonnée est $\dfrac{12t^2}{3t^2+1} - 2 = \dfrac{6t^2-2}{3t^2+1}$.

Si nous supposons t rationnel, il existe des entiers u et v premiers entre eux, qui permettent d'écrire t et les coordonnées de B sous forme de fractions : $t = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow x_{\mathrm{B}} = \dfrac{12uv}{3u^2+v^2}$ et $y_{\mathrm{B}} = \dfrac{6u^2-2v^2}{3u^2+v^2}$.

Nous n'avons besoin que des seules solutions de l'équation diophantienne dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, nous poserons donc $(n\,;\,p\,;\,q) = \left(3u^2+v^2\,;\,|6u^2-2v^2|\,;\,12uv\right)$ en utilisant exclusivement des entiers u et v positifs. Pour parvenir à exprimer finalement une solution primitive, il nous faudra diviser ce triplet par $\mathrm{PGCD}(n,p,q)$. Si nous supposons u et v premiers entre eux, les seuls facteurs premiers communs que peuvent avoir $12uv$ et $3u^2+v^2$ sont 2 lorsque u et v sont impairs, et 3 lorsque celui ci est diviseur de v. Si $v = 3v'$ avec $v' \in \mathbb{N}$, après simplification par 3 nous obtenons la solution $\left(u^2+3v'^2\,;\,|6v'^2-2u^2|\,;\,12v'u\right)$; cette solution aurait pu être obtenue directement à l'aide de $t = \dfrac{v'}{u}$, nous en comprenons mieux les raisons sur la figure 3 où nous avons tracé deux droites de coefficients directeurs $t = \dfrac{u}{v}$ et $\dfrac{1}{3t} = \dfrac{v'}{u}$. Toute solution primitive de $12n^2 = 3p^2 + q^2$ peut donc être exprimée en partant d'un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers premiers entre eux, tel que v ne soit pas multiple de 3. Pour parvenir à exprimer toute solution primitive, il ne nous reste donc à envisager que deux autres possibilités :

- si u et v sont tels que l'un soit pair et l'autre impair, aucun facteur premier de $12uv$ ne peut diviser $3u^2+v^2$, nous obtenons d'emblée la solution primitive :

$$(n\,;\,p\,;\,q) = \left(3u^2+v^2\,;\,|6u^2-2v^2|\,;\,12uv\right);$$

- si u et v sont impairs, $6u^2-2v^2$ et $3u^2+v^2$ sont multiples de 4, nous pouvons alors effectuer une simplification par 4 et, puisqu'aucun facteur premier de $3uv$ ne peut être diviseur de $3u^2 \pm v^2$, nous obtenons cette solution primitive :

$$(n\,;\,p\,;\,q) = \left(\frac{3u^2+v^2}{4}\,;\,\frac{|3u^2-v^2|}{2}\,;\,3uv\right).$$

Même les triplets qui engendrent des polynômes avec une racine double peuvent s'exprimer sous l'une de ces deux formes : le triplet $(1\,;\,2\,;\,0)$ est obtenu avec $(u\,;\,v) = (0\,;\,1)$ et $(1\,;\,1\,;\,3)$ est obtenu avec $(u\,;\,v) = (1\,;\,1)$.

Conclusion : forme générale des « gentilles » *fonctions polynomiales de degré 3*

Nous sommes parvenus à exprimer toutes les solutions primitives de notre équation diophantienne selon deux formes possibles, mais pour engendrer l'ensemble des racines de tout gentil polynôme du troisième degré, nous allons voir qu'il est possible de n'en utiliser qu'une seule. Lorsque nous utilisons des entiers u et v impairs, nous obtenons des triplets dont la dernière composante $3uv$ est impaire ; pourtant, dans la liste des solutions page 63, parmi les trois triplets qui permettent d'engendrer une même famille de « *gentilles* » fonctions, il en apparaît toujours un dont la troisième composante est multiple de 24. Ceci est une propriété générale, qui va nous permettre d'ignorer cette deuxième forme possible des solutions de l'équation diophantienne.

Éclaircissons d'abord les raisons pour lesquelles les racines d'un gentil polynôme du troisième degré peuvent être obtenues à partir de plusieurs solutions distinctes de l'équation diophantienne. Si nous considérons un premier triplet $(n\,;\,p\,;\,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{PGCD}(n,p,q) = 1$ et $12n^2 = 3p^2+q^2$, nous avons déjà constaté en page 63 que $(n\,;\,p'\,;\,q') = \left(n\,;\,\frac{p-q}{2}\,;\,\frac{3p+q}{2}\right)$ et $(n\,;\,p''\,;\,q'') = \left(n\,;\,\frac{p+q}{2}\,;\,\frac{3p-q}{2}\right)$ étaient aussi des solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation diophantienne et nous pouvons vérifier que les racines qu'elles engendrent sont les symétriques par rapport à x_C de celles engendrées par $(n\,;\,p\,;\,q)$ car :

- $x_\mathrm{C} + p' = x_\mathrm{C} + \dfrac{p-q}{2}$;
- $x_\mathrm{C} - \dfrac{p'+q'}{2} = x_\mathrm{C} - p$;
- $x_\mathrm{C} - \dfrac{p'-q'}{2} = x_\mathrm{C} + \dfrac{p+q}{2}$;
- $x_\mathrm{C} + p'' = x_\mathrm{C} + \dfrac{p+q}{2}$;
- $x_\mathrm{C} - \dfrac{p''+q''}{2} = x_\mathrm{C} - p$;
- $x_\mathrm{C} - \dfrac{p''-q''}{2} = x_\mathrm{C} + \dfrac{p-q}{2}$.

Il apparaît encore plus de solutions de l'équation diophantienne par changement de signe de n, p, p', p'', q, q' et q'', mais l'ensemble des racines engendrées est insensible aux signes de q, q' et q'' et encore moins au signe de n qui n'intervient que pour exprimer les racines $x_\mathrm{C} \pm n$ du polynôme dérivé. En revanche, avec $(n\,;\,-p\,;\,q)$, nous obtenons un ensemble de racines symétrique par rapport à x_C de celui obtenu avec $(n\,;\,p\,;\,q)$; le changement de signe de p' ou p'' permet donc de retrouver les mêmes racines qu'avec $(n\,;\,p\,;\,q)$.

Nous pouvons vérifier que, si $(n\,;\,p\,;\,q)$ est une solution primitive, alors $(n\,;\,|p'|\,;\,q')$ et $(n\,;\,p''\,;\,|q''|)$ sont aussi des solutions primitives car, si d est un diviseur premier de $\mathrm{PGCD}(n,p',q')$ ou de $\mathrm{PGCD}(n,p'',q'')$, il doit aussi diviser $p'+q' = p''+q''' = 2p$ et $q'-3p' = 3p''-q'' = 2q$. Mais, puisque $\mathrm{PGCD}(n,p,q) = 1$, le seul facteur premier que pourraient avoir en commun n, $2p$ et $2q$ est nécessairement 2. Pourtant n ne peut pas être pair, sinon p et q qui doivent être nécessairement de même parité seraient tous les deux impairs. Or, dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, nous avons $\overline{1}^2 \equiv \overline{3}^2 \equiv \overline{5}^2 \equiv \overline{7}^2$; nous aboutirions alors à une contradiction car, avec n pair, la projection dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ de l'égalité $12n^2 = 3p^2 + q^2$ donnerait $\overline{0} = \overline{4}$.

Finalement nous allons vérifier que, parmi les trois solutions primitives qui sont $(n\,;\,p\,;\,q)$, $(n\,;\,|p'|\,;\,q')$ ou $(n'\,;\,p''\,;\,|q''|)$, il y en a toujours une et une seule dont la dernière composante est paire. En observant les deux formes possibles des solutions de l'équation diophantienne à la fin du paragraphe précédent, nous voyons que l'un des trois entiers q, q' ou q'' doit de plus être multiple de 24, ce qui fournit un excellent moyen d'accélérer la recherche de nos « *gentilles* » fonctions à l'aide de moyens numériques. Cela apparaît immédiatement si nous utilisons des entiers u et v de parités différentes : dans cette situation nous avons dû poser $q = 12uv$ qui est évidemment multiple de 24 puisque u ou v est pair ; de plus q' et q'' ne peuvent pas être pairs car, par projection de q' et q'' dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous obtenons $\overline{q'} = \overline{q''} = \overline{3(u^2-v^2) \pm 6uv} = \overline{u-v} = \overline{1}$.

En revanche, si nous utilisons des entiers u et v impairs et que nous posons $(p\,;\,q) = \left(\dfrac{|3u^2-v^2|}{2}\,;\,3uv\right)$, il est évident que $q = 3uv$ est impair et nous avons $\{q'\,;\,q''\} = \left\{\dfrac{3}{4}\left|3u^2-v^2-2uv\right|\,;\,\dfrac{3}{4}\left|3u^2-v^2+2uv\right|\right\}$. Si u et v sont impairs, nous vérifions alors qu'un et un seul des deux nombres $3(3u^2-v^2 \pm 2uv)$ est divisible par 8 car, en arithmétique modulo 8, les entiers impairs u, v et uv sont nécessairement équivalents à 1, 3, 5 ou 7 ; nous avons donc les congruences modulo 8 suivantes : $u^2 \equiv v^2 \equiv 1$. Il ne nous reste donc que quatre cas à envisager :

- si $uv \equiv 1$ alors $3u^2 - v^2 - 2uv \equiv 3-1-2 \equiv 0$ et $3u^2 - v^2 + 2uv \equiv 3-1+2 \equiv 4$;
- si $uv \equiv 3$ alors $3u^2 - v^2 - 2uv \equiv 3-1-6 \equiv 4$ et $3u^2 - v^2 + 2uv \equiv 3-1+6 \equiv 0$;
- si $uv \equiv 5$ alors $3u^2 - v^2 - 2uv \equiv 3-1-10 \equiv 0$ et $3u^2 - v^2 + 2uv \equiv 3-1+10 \equiv 4$;
- si $uv \equiv 7$ alors $3u^2 - v^2 - 2uv \equiv 3-1-14 \equiv 4$ et $3u^2 - v^2 + 2uv \equiv 3-1+14 \equiv 0$.

Dans les quatre cas, nous voyons que les deux entiers $\dfrac{3}{4}\left(3u^2-v^2-2uv\right)$ et $\dfrac{3}{4}\left(3u^2-v^2+2uv\right)$ sont bien de parités différentes et nous arrivons donc à la conclusion suivante :

> Pour toute « *gentille* » fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré 3 il existe :
>
> - deux entiers naturels u et v premiers entre eux tels que 3 ne divise pas v,
> - un couple d'entiers relatifs $(x_C\,;\,d)$,
> - un nombre réel a non nul,
>
> qui permettent d'exprimer f sous la forme suivante :
>
> $$f(x) = a\left(x - x_C + d(6u^2-2v^2)\right)\left(x - x_C - d(3u^2-v^2+6uv)\right)\left(x - x_C - d(3u^2-v^2-6uv)\right)$$

Nous aurions pu dès le départ exhiber le polynôme P unitaire de degré 3 dont les racines entières sont :
• $x_1 = x_C - d(6u^2-2v^2)$ • $x_2 = x_C + d(3u^2-v^2+6uv)$ • $x_3 = x_C + d(3u^2-v^2-6uv)$ puis vérifier par un simple calcul que $x_1' = x_C + d(3u^2+v^2)$ et $x_2' = x_C - d(3u^2+v^2)$ sont bien les racines de $P'(X) = 3X^2 - 2(x_1+x_2+x_3)X + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ en constatant que :

$$x_1' + x_2' = 2x_C = \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{3} \quad \text{et} \quad x_1'x_2' = x_C^2 - d^2(3u^2+v^2)^2 = \frac{(x_2+x_3)x_1 + x_2x_3}{3}.$$

Mais notre étude en dit plus en affirmant que toutes les fonctions que nous cherchions peuvent s'exprimer sans exception comme nous venons de le faire ci-dessus ; même les cas particuliers avec une racine double s'obtiennent en posant $(u\,;\,v) = (0\,;\,1)$, et ceux avec une racine triple peuvent s'obtenir en posant $d = 0$.

Dans l'expression générale d'une « *gentille* » fonction polynomiale de degré 3 ci-dessus le réel a non nul peut être quelconque. Cela permet de fixer le centre de symétrie de la courbe représentative de la « *gentille* » fonction que nous souhaitons créer, à condition qu'il ait une ordonnée y_{C} non nulle. L'abscisse de ce centre de symétrie est x_{C}, nous devons donc avoir $f(x_{\mathsf{C}}) = y_{\mathsf{C}}$. En posant $p = d(3u^2 - v^2)$ et $q = 6duv$ nous obtenons $f(x_{\mathsf{C}}) = 2ap(p^2 - q^2)$; avec trois racines distinctes nous avons $p(p^2 - q^2) \neq 0$, il suffit alors de poser $a = \dfrac{y_{\mathsf{C}}}{2p\,(p^2 - q^2)}$ pour obtenir $f(x_{\mathsf{C}}) = y_{\mathsf{C}}$.

À titre d'exemple, revenons sur la manière avec laquelle a été choisie l'illustration de la figure 2 :

1. nous avons choisi de placer arbitrairement le centre de symétrie en C(8 ; 2), d'où $x_{\mathsf{C}} = 8$;
2. nous sommes allés au plus simple en choisissant $(u\,;\,v) = (1\,;\,2)$ et $d = 1$;
   nous obtenons $(n\,;\,p\,;\,q) = (7\,;\,2\,;\,24)$ et les racines :
   - $x_1 = x_{\mathsf{C}} + p = 10$,
   - $x_2 = x_{\mathsf{C}} - \dfrac{p-q}{2} = 19$,
   - $x_3 = x_{\mathsf{C}} - \dfrac{p+q}{2} = -5$;
3. étant donné le polynôme P tel que $P(X) = (X-10)(X-19)(X+5) = X^3 - 24X^2 + 45X + 950$, son polynôme dérivé P' $\big($vérifiant $P'(X) = 3\left(X^2 - 16X + 15\right)\big)$ admet bien pour racines $x'_1 = x_{\mathsf{C}} - n = 1$ et $x'_2 = x_{\mathsf{C}} + n = 15$;
4. nous avons $P(8) = 286$; nous avons donc posé $a = \dfrac{2}{286}$ et nous avons représenté la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{143}\left(x^3 - 24x^2 + 45x + 950\right) \quad \text{et donc} \quad f'(x) = \frac{3}{143}\left(x^2 - 16x + 15\right).$$

Casus irreducibilis

Nous remarquons que lorsqu'une équation du troisième degré à coefficients réels n'admet qu'une solution réelle et deux autres complexes conjuguées, ou bien seulement deux solutions réelles mais aucune autre même complexe, ces solutions peuvent s'exprimer à l'aide de racines carrées et cubiques de nombres réels calculables par des opérations élémentaires sur les coefficients de l'équation ; l'expression « résoluble par radicaux » prend alors tout son sens. En revanche, il me semblerait préférable de dire que les équations algébriques de degré inférieur ou égal à 4 sont résolubles par extractions de racines, étant entendu que l'extraction de racines doit s'étendre au corps $\mathbb{C}$ même lorsque les coefficients de l'équation sont tous réels car, comme nous l'avons vu, pour les équations du troisième degré à coefficients réels qui admettent trois solutions dans $\mathbb{R}$, il faut faire appel aux fonctions trigonométriques et à leurs réciproques pour extraire ces racines !

Les formules de Cardan (et l'utilisation de $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ qui est l'une des racines cubiques de l'unité habituellement notée ainsi) ne nous sont d'aucune aide pour pouvoir exprimer par exemple $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ par radicaux de nombres réels ; et pourtant, ce réel est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ (voir figure 4).

Pour résoudre cette équation, Jérôme Cardan[5] poserait $x = u + v$ pour écrire l'équation de la façon suivante :

$$8(u+v)^3 - 6(u+v) - 1 = 0 \qquad ; \qquad 8(u^3+v^3) + 24uv(u+v) - 6(u+v) - 1 = 0$$

En imposant $4uv = 1$ l'équation prend la forme simplifiée $(2u)^3 + (2v)^3 = 1$; tout le génie créateur de Cardan a été alors d'imaginer que $(2u)^3$ et $(2v)^3$ étaient effectivement d'hypothétiques racines du

5. Nom francisé du mathématicien Girolamo Cardano né à Pavie en 1501 : .

polynôme $X^2 - X + 1$. C'est ainsi que nous pouvons nous permettre d'écrire cinq siècles plus tard $\left\{(2u)^3\,;\ (2v)^3\right\} = \left\{\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

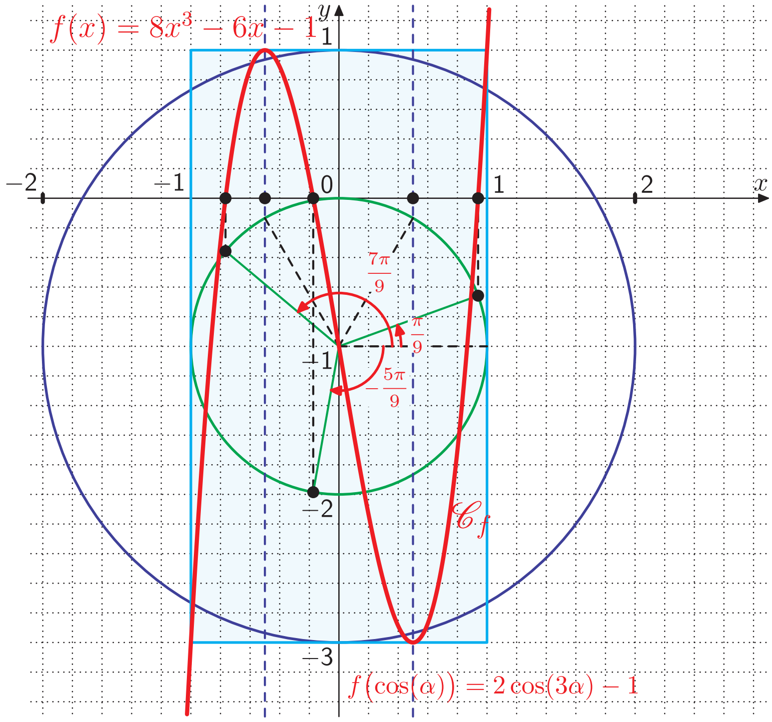


Figure 4. *Cubique qui coupe l'axe des x en $x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ et $x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$.*

Mais nous sommes confrontés à un « *casus irreducibilis* » ainsi nommé par les Anciens. Dit d'une manière plus triviale : « *on tourne en rond* ».

Même si aujourd'hui nous savons écrire $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et ses trois racines cubiques sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(6k+1)\pi}{9}}$, nous n'avons pas fait avancer la question en posant $\{2u\,;\ 2v\} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(6k+1)\pi}{9}}\ ;\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-(6k+1)\pi}{9}}\right\}$ et $x = u + v = \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(6k+1)\pi}{9}}\right)$. Nous savons tout simplement que $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ est un réel positif qui est la partie réelle d'une racine cubique de $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ que nous ne savons pas extraire et évaluer sans les moyens de l'analyse numérique.

Serait-il possible d'écrire $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ en utilisant les seuls coefficients du polynôme $8X^3 - 6X - 1$, et les opérations du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ en y ajoutant le symbole $\sqrt[n]{\ }$ pour exprimer dans $\mathbb{R}$ des racines carrées, cubiques, quadratiques... ? Nous savons aujourd'hui qu'il faut répondre à cette question par la négative ; c'est confronté à ce type de problème que Jérôme Cardan fit faire un pas de géant aux mathématiques en introduisant des nombres qui étaient qualifiés d'imaginaires au XVI^e siècle et qui sont à l'origine des nombres complexes qui n'ont plus rien de mystérieux aujourd'hui.

Jacques Marot, aujourd'hui à la retraite, était enseignant au lycée Marguerite de Valois à Angoulême.
jacques.marot@ac-poitiers.fr

Au Fil des Maths a besoin de vous

J'ai un peu de temps

Écrire une fiche d'activité SNT pour la partager (modèle de fiche sur demande : Lise).

Travail ponctuel.
≈ 2 h
Prérequis : enseigner en lycée.

Relire des articles pour la revue numérique avant la mise en ligne (contact : Marianne).

Libre organisation du temps avec délai à respecter.
≈ 30 min par article
Prérequis : être bon en orthographe.

Donner un coup de main à la revue numérique en codant un article en html (aide et tuto : Marianne).

Libre organisation du temps avec délai à respecter.
≈ 3 h
Prérequis : avoir des connaissances de base en langage par balise ou en TeX. Avoir envie d'apprendre.

Comment nous aider ?

J'ai davantage de temps

Donner un grand coup de main à la revue numérique en codant plusieurs articles en html (aide et tuto : Marianne).

Libre organisation du temps avec délais à respecter.
≈ 3 h par article
Prérequis : avoir des connaissances de base en langage par balise ou en TeX. Avoir envie d'apprendre.

Rejoindre l'équipe technique : coder en TeX un ou plusieurs articles selon un cahier des charges (contact : Isabelle).

Travail régulier : tous les trois mois avec délais à respecter.
≈ 30 min par page
Prérequis : maîtriser LaTeX.

Écrire un article ! Tous les niveaux et toutes les thématiques nous intéressent (angoisse de la page blanche : Lise).

Travail ponctuel.
≈ 6 h
Prérequis : avoir un sujet… mais pas besoin d'être doué en écriture !

J'ai beaucoup de temps

Rejoindre l'équipe de rédaction : une bonne idée ! (tout renseignement : Lise).

Travail avec engagement.
5 réunions par an à Paris (des samedis).
Travail sur des articles en dehors des réunions.
Prérequis : aimer travailler en groupe et mener un projet à terme dans le respect des contraintes éditoriales. Avoir envie de s'investir.

Écrire des recensions : lire un ouvrage récent (proposé et fourni par Valérie) puis écrire un court article pour le décrire et le commenter pour le faire découvrir aux collègues.

Libre organisation du temps, avec engagement.
≈ 6 h par article
Prérequis : aimer lire et donner une opinion argumentée.

Isabelle : iflavier@orange.fr
Lise : aufildesmaths@apmep.fr
Marianne : marianne.fabre@ac-amiens.fr
Valérie : laroseAFDM@netc.fr

Sommaire du nº 535

Faites vos jeux !

APMEP

www.apmep.fr