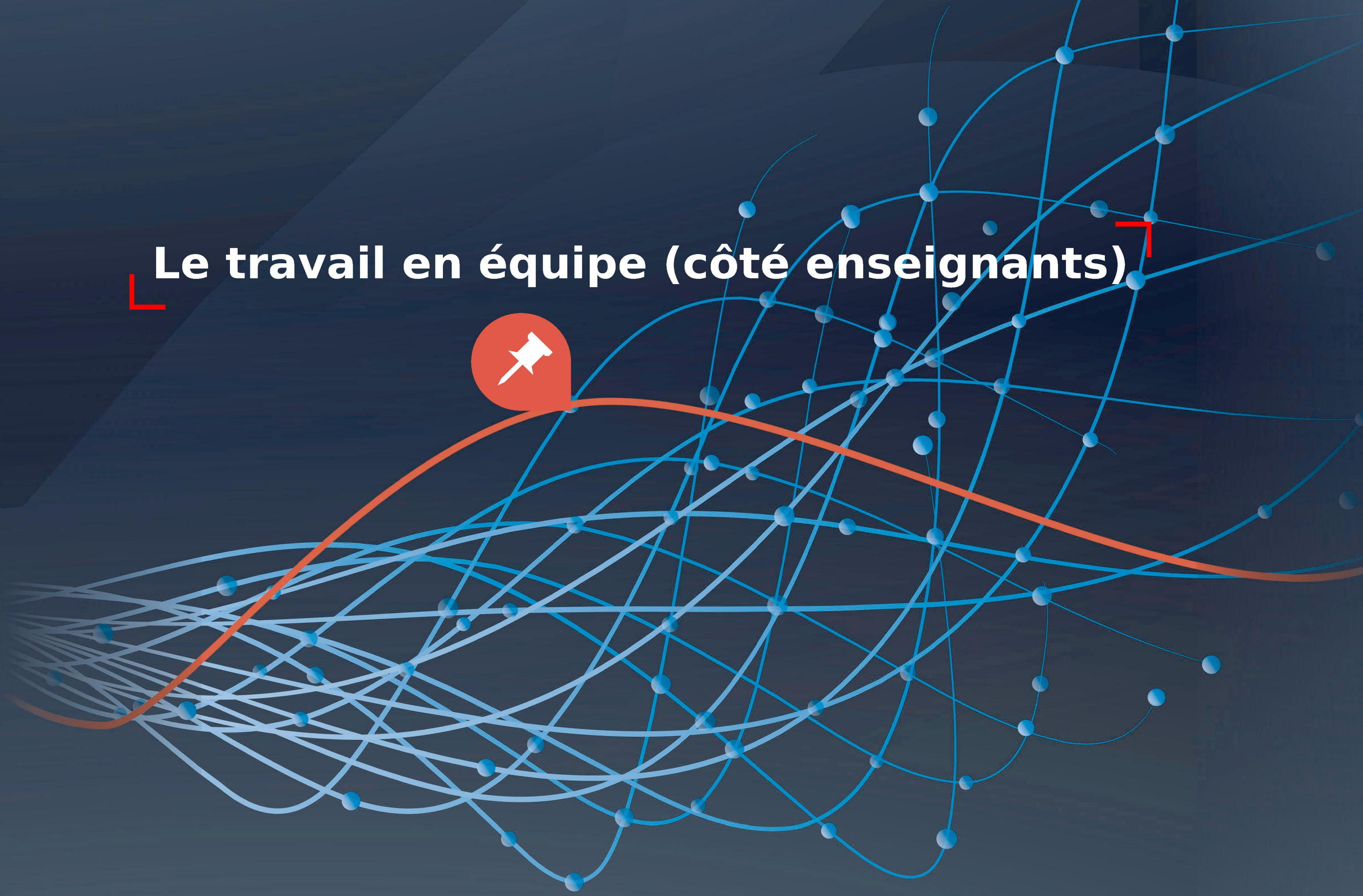
Le bulletin de l’APMEP - N° 534

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université. . .

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2019

Le travail en équipe (côté enseignants)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Prochainement,
dans le fil d'actualité de la revue numérique :
des activités de classe pour les cours de SNT.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAULT..

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU..

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY..

« Fils rouges » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS..

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET..

Équipe TEXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET..

Maquette : *Olivier REBOUX.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2019
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

AU FIL DES MATHS

APMEP

La preuve par 9

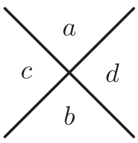
Les problèmes de Papy Michel

La « preuve par 9 », vous connaissez ? Elle a longtemps été enseignée en primaire et utilisée par les écoliers pour vérifier le produit de deux entiers. Selon votre scolarité, vous l'aurez systématiquement mise en œuvre… ou pas ! Cet article fait le point sur cette preuve qui porte plutôt mal son nom.

Michel Soufflet

La technique

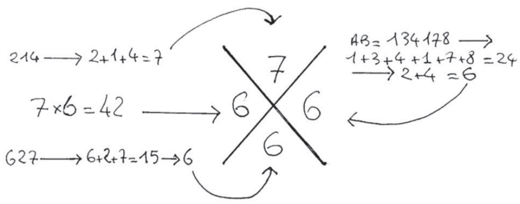
Ce que plusieurs générations d'écoliers ont fait, mécaniquement, sans trop savoir comment et pourquoi ça marchait…
Après avoir calculé le produit de deux entiers A et B, on dessine une croix en forme de X (le signe de la multiplication) délimitant quatre parties dans laquelle on reporte quatre entiers a, b, c et d compris entre 0 et 9.



Un exemple avec le produit $A \times B = 214 \times 627$.
a est la somme réduite des chiffres de A, elle s'obtient en additionnant tous les chiffres de l'entier A.
Ici $a = 2 + 1 + 4 = 7$.
b est la somme réduite des chiffres de B.
Ici, $B = 627$ et $6 + 2 + 7 = 15 > 9$ donc on poursuit « la réduction » : $1 + 5 = 6$ pour trouver finalement $b = 6$.
Si le total est égal à 9, il est remplacé par 0.
On procède à la somme des chiffres jusqu'à l'obtention d'un nombre à un seul chiffre.
c est la somme réduite du produit ab. Ici $ab = 42$, donc $c = 4 + 2 = 6$.
Enfin, d est la somme réduite du produit obtenu AB.

Ici, si nous avons trouvé $AB = 134\,178$, alors $d = 6$.

L'opération est considérée comme juste lorsque c et d sont égaux.

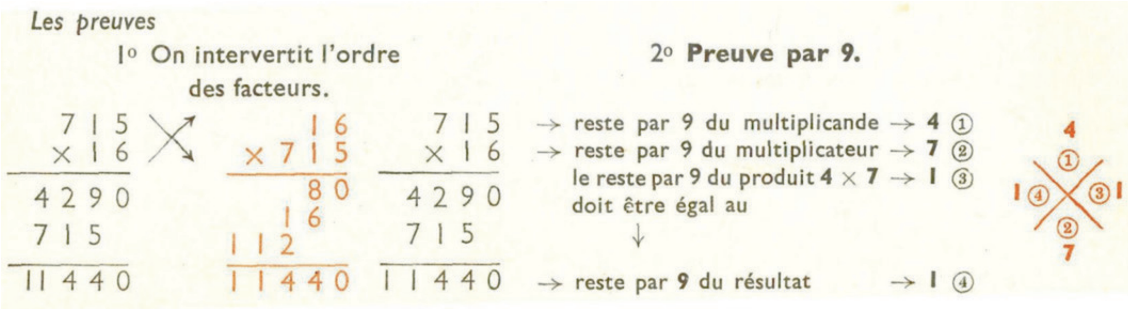


On ne savait pas pourquoi ça marchait mais c'était facile à réaliser et quelquefois exigé de l'enseignant.

Comment ça marche ?

Essayons de comprendre, imaginons que nous avons 10 billes à répartir entre 9 enfants, la distribution faite, il va nous en rester une.
Si nous en distribuons 20, il va en rester 2.
Si nous en distribuons 70, il va en rester 7.
Si nous en distribuons 100, il va en rester 1.
Si nous en distribuons 500, il va en rester 5…
Si maintenant nous avons 572 billes à distribuer, puisque $572 = 500 + 70 + 2$, il va en rester $5 + 7 + 2 = 14$, soit, avec un tour de plus, 5.

Ce que l'on observe, c'est que **le reste dans la division de A par 9 est sa forme réduite**.


Les preuves

1° On intervertit l'ordre des facteurs.

```
  715        16       715
×  16      ×715     ×  16
 4290        80      4290
 715        16       715
11440      112      11440
           11440
```

2° Preuve par 9.

→ reste par 9 du multiplicande → 4 ①
→ reste par 9 du multiplicateur → 7 ②
le reste par 9 du produit 4 × 7 → 1 ③
doit être égal au
↓
→ reste par 9 du résultat → 1 ④

Figure 1. *extrait du manuel* Le nouveau Calcul vivant *de L. et M. Vassort (Classe de fin d'étude, 1963).*

Cette observation ne se limite pas aux entiers à trois chiffres : puisque $1\,000 = 999 + 1$ et que $4\,765 = 4\,000 + 700 + 60 + 5$, si nous distribuons 4 765 billes, il en restera $4 + 7 + 6 + 5 = 22$, et puisque $22 = 20 + 2$, il en restera $2 + 2$, soit 4 billes.

Vous me direz, ce n'est pas une démonstration ; un cas particulier ne saurait démontrer le général. Certes, mais quand le particulier est lui-même général ? Si notre observation ne démontre pas, elle permet de se convaincre de la généralité de la propriété.

Puisque le reste de toute puissance de 10 dans la division par 9 est 1, cette propriété se généralise facilement et permet de comprendre le « pourquoi » de la règle de divisibilité par 9.

Expérimentée dans les classes de CM2, cette activité ludique peut se faire lorsque l'on étudie la règle de divisibilité par 9. Elle est plaisante et peut donner l'envie aux enfants de faire des mathématiques. L'arithmétique étant, avec la géométrie, un domaine propice à susciter des vocations.

Pour justifier la « preuve par 9 », **il faut maintenant établir que le produit AB a le même reste que le produit ab dans la division par 9.**

Si $A = 9q + a$ avec $a < 9$, et $B = 9q' + b$ avec $b < 9$, alors $AB = (9q+a)(9q'+b) = 9(9qq'+aq'+bq)+ab$.

Le produit ab n'est peut être pas le reste de AB dans la division par 9, mais ab et AB ont le même reste dans cette division.

Qu'a-t-on prouvé au fait ?

On a prouvé que si la « preuve par 9 » n'est pas vérifiée, alors le produit obtenu est faux.

Si la « preuve par 9 » est vérifiée, cela prouve seulement que nous avons le bon résultat à un multiple de 9 près.

Mais un élève qui combinera plusieurs erreurs de calculs pourra penser, à tort, que son produit est juste… et il faudra reprendre avec lui les calculs intermédiaires. Cette preuve ne révélera pas non plus les étourderies simples comme la permutation de deux chiffres en recopiant le résultat ; ces fautes étant très courantes surtout chez les élèves atteint de légère dyslexie, elle n'apportait guère de sécurité. Lorsque j'étais écolier, je ne la pratiquais que lorsqu'elle était demandée !

Eh oui, cette preuve porte bien mal son nom !

Je vous parle d'un temps
Que les moins d'cinquante ans
Ne peuvent pas connaître !
(d'après Charles Aznavour, *La Bohème*)

Ressources

[1] Gérard Villemin. *La preuve par neuf en pratique.*

[2] CNRS. *Images des maths.*

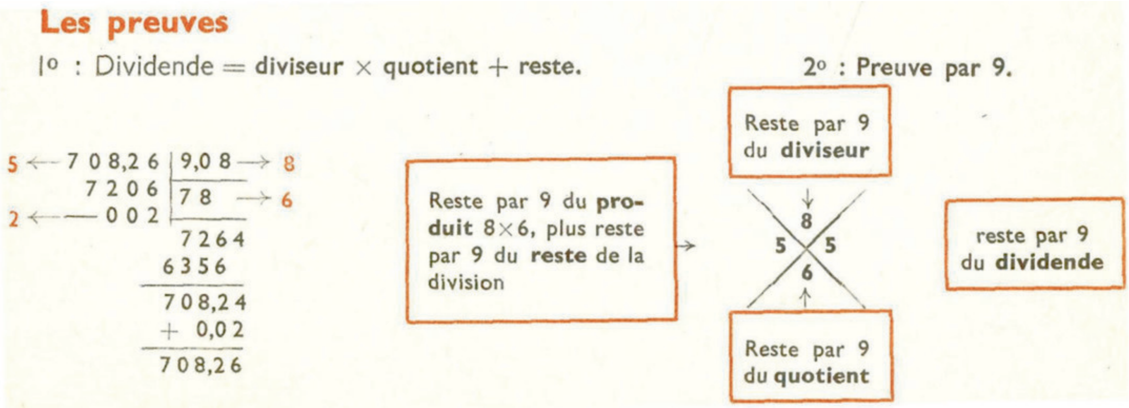


Figure 2. *Extrait du manuel* Le nouveau Calcul vivant *de L. et M. Vassort.*

NDLR

À partir de la classe de 3e, on peut espérer faire comprendre aux élèves ce que cette « preuve » permet réellement de justifier. La maîtrise de la double distributivité étant une attente de la fin du cycle 4, on peut envisager de diffuser aux élèves un extrait du manuel *Calcul Vivant* et de les faire réfléchir sur la technique puis sur ce qui a été prouvé. Les petits curieux ne manqueront pas de s'interroger sur la possibilité d'une preuve par d'autres nombres que 9 et de son utilisation pour les autres opérations… Le nouveau programme de mathématiques expertes (applicable en terminale générale dès la rentrée 2020 pour les élèves qui choisiront cet enseignement) prévoit une partie arithmétique fournie. Il précise qu' *une place importante sera faite à l'étude des congruences* (*arithmétique modulaire*). De quoi envisager une activité autour de cette « preuve » !

Michel Soufflet, professeur retraité, a été président de l'APMEP et animateur IREM de Basse Normandie.

michel.soufflet@unicaen.fr

Sommaire du nº 534

Le travail en équipe (côté enseignants)

Éditorial 1

Opinions 4

L'histoire des mathématiques dans les nouveaux programmes de lycée général — Nathalie Chevalarias 4

Pour le meilleur et pour le pire — Daniel Djament 7

Labos de maths : un projet d'équipe — Mathieu Vaidie 9

Collaborer pour produire une ressource : les apprentissages numériques en laboratoire de mathématiques — Maha Abboud 13

La liberté pédagogique est-elle compatible avec le travail en équipe ? — Gérard Sensevy 17

Avec les élèves 25

Cogni'classe au collège — Julie Benoit 25

Math & Manips pour le secondaire supérieur : problèmes d'optimisation — Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen et Isabelle Wettendorff 30

Meurtres à Numbertown — Élodie Henriet et Rhydwen Volsik 40

La course aux nombres — Anne-France Acciari 46

Ouvertures 48

Ingénieries de formation en mathématiques : des réalisations inspirées des *Lesson Studies* — Frédéric Hartmann & Blandine Masselin 48

Découpages — Pierre Legrand 56

Récréations 63

La preuve par 9 — Michel Soufflet 63

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 66

Au fil des jeux — Valérie Larose 68

Les maths s'affichent — Valérie Larose 70

Le coin des problèmes — Claudie Asselain-Missenard 73

Au fil du temps 75

Jeux de boules — Henry Plane 75

1932 : tête chercheuse — Pierre Pansu 79

Matériaux pour une documentation 82

La Commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (CIEM) — Richard Cabassut 87

Anniversaires — Dominique Cambrésy 89

Courrier des lecteurs 91

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr