

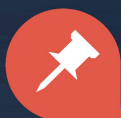
Le bulletin de l'APMEP - N° 534

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2019

Le travail en équipe (côté enseignants)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

**Prochainement,
dans le fil d'actualité de la revue numérique :
des activités de classe pour les cours de SNT.**

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAUT..

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise MALRIEU..

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY..

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS..

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET..

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET..

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Décembre 2019

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297



Découpages

Cet article a deux objectifs : présenter un problème peu connu de géométrie élémentaire et proposer une source inhabituelle d'exercices.

Pierre Legrand

Pour étudier les propriétés d'un polygone, il est souvent utile d'en faire une triangulation, c'est-à-dire de le décomposer en réunion de triangles placés côte à côte. Tous les sommets du polygone sont alors évidemment sommets d'au moins un des triangles. La façon la plus économique de faire une triangulation serait donc de ne prendre que des triangles dont tous les sommets soient sommets du polygone. Mais est-ce toujours possible ? Et si oui que peut-on dire du nombre de triangles ?

Quelques définitions (non canoniques)

Définitions

- On appellera découpage d'un polygone sa décomposition en réunion de triangles d'intérieurs disjoints dont les sommets soient pris parmi les sommets du polygone.
- On appelle diagonale d'un polygone un segment joignant deux sommets non consécutifs.
- On parlera de vraie diagonale si, extrémités non comprises, elle est entièrement intérieure au polygone et de fausse diagonale dans le cas contraire.
- On exclura le cas des polygones dont trois sommets consécutifs sont alignés, le sommet intermédiaire ne jouant finalement aucun rôle.

Les diagonales

Combien de diagonales pour un n -gone ?

Le décompte est facile : il suffit de joindre chacun des n sommets aux $n - 3$ qui ne lui sont pas adjacents, ce qui donne $n(n - 3)$ possibilités. Mais

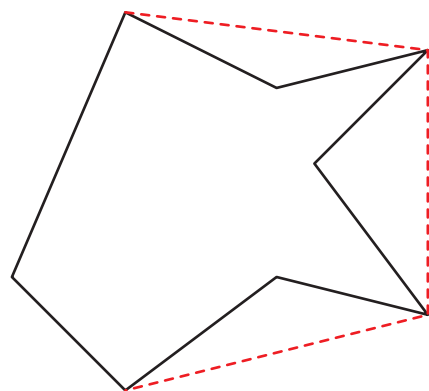
chaque diagonale est alors comptée deux fois, une pour chaque extrémité. D'où le résultat :

$$\text{Un } n\text{-gone a } \frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonales.}$$

Remarque 1

Un polygone est convexe si et seulement si toutes ses diagonales sont vraies.

Qu'un polygone convexe ait cette propriété est évident d'après la définition même de la convexité. Prenons maintenant un polygone $\mathcal{P}$ non convexe : un certain nombre de ses sommets forment un polygone convexe $\mathcal{Q}$ à l'intérieur duquel sont les autres sommets.



Il suffit de prendre un côté de $\mathcal{Q}$ qui n'est pas côté de $\mathcal{P}$ pour avoir une fausse diagonale.



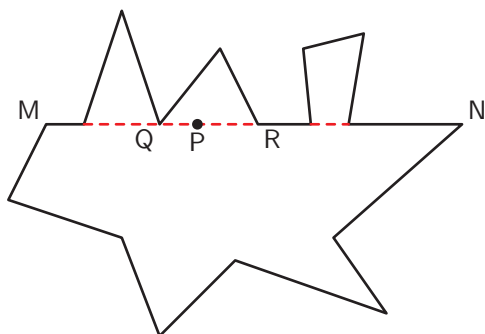
Remarque 2

Deux diagonales distinctes peuvent être portées par la même droite. Sur la figure ci-après la droite (MN) porte trois vraies diagonales et un bon nombre de fausses.

Remarque 3

Si sur une fausse diagonale il n'y aucun point extérieur au polygone, elle contient une vraie diagonale.

Soit [MN] une telle diagonale; elle contient au moins un point P intérieur au polygone, sinon [MN] serait un côté. [MP] coupe le contour du polygone selon un nombre fini de points et de segments. Il existe donc sur [MP] un point Q du contour plus proche de P que les autres; il existe de même sur [NP] un point R du contour plus proche de P que les autres.



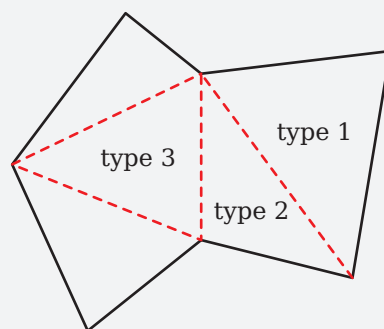
Ainsi Q et R sont sur le contour et]QR[ne contient que des points intérieurs au polygone. En outre, tout point de [MQ] ou de [RN] est intérieur au polygone ou sur son contour, si bien que Q et R sont forcément des sommets et que [QR] est une vraie diagonale.

Les trois types de triangles d'un découpage

Seules les vraies diagonales interviennent dans le découpage d'un polygone (ce qui fait que les polygones convexes permettent une plus grande variété de découpages).

Plus précisément, pour chaque triangle d'un découpage, ses côtés sont :

- soit deux côtés adjacents du polygone et une vraie diagonale (type 1);
- soit un côté du polygone et deux vraies diagonales (type 2);
- soit trois vraies diagonales (type 3).



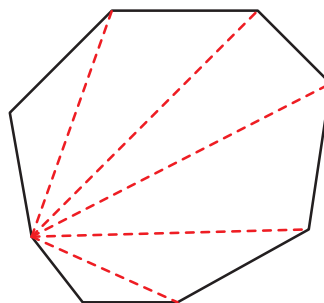
Remarque : deux diagonales d'un même découpage ne peuvent avoir qu'une extrémité comme point commun.

Quelques découpages de n -gones convexes

On utilisera à plusieurs reprises le résultat évident suivant¹ : la droite qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone convexe est une vraie diagonale, qui le partage en deux polygones convexes.

Remarque générale

Étant donné un n -gone convexe, on obtient un découpage immédiat en choisissant un sommet et en le joignant aux $n - 3$ sommets qui ne lui sont pas adjacents.



1. Pour mettre lourdement les points sur les i : l'intersection de deux convexes (le polygone donné et un demi-plan) est un convexe.



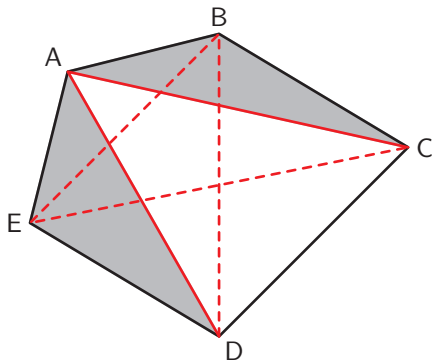
On obtient ainsi n découpages différents, dont chacun comporte $n - 2$ triangles.

Nous allons maintenant faire une étude artisanale pour les premières valeurs de n , histoire de voir s'il existe d'autres découpages que ceux qui viennent d'être mis en évidence et, dans ce cas, s'ils comportent tous $n - 2$ triangles.

Le cas $n = 3$ est trivial. Dans le cas $n = 4$, chacune des deux diagonales donne un découpage en deux triangles.

Cas $n = 5$

La technique précédente fournit cinq découpages (autant que de sommets privilégiés), tous en trois triangles. Reste à voir si ce sont les seuls.



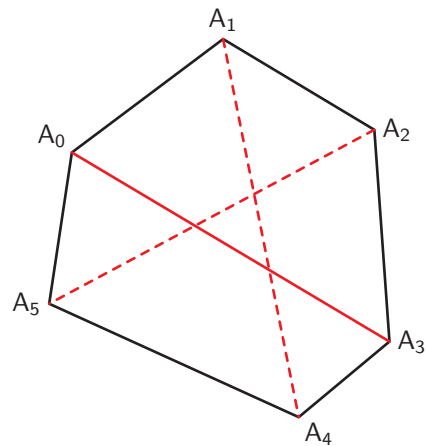
Dans un pentagone convexe, les cinq diagonales forment un pentagone étoilé : si un découpage utilise deux d'entre elles, celles-ci ne peuvent avoir qu'un sommet (A sur la figure) comme point commun. On ne peut donc avoir d'autres découpages que ceux définis plus haut.

Cas $n = 6$

Si $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est le polygone, la situation se complique : il faut en effet distinguer les trois « grandes » diagonales $[A_0A_3]$, $[A_1A_4]$, $[A_2A_5]$ joignant deux sommets opposés, et les six « petites » diagonales joignant deux sommets dont les indices diffèrent de 2 (mod 6) comme $[A_0A_2]$ ou $[A_5A_1]$.

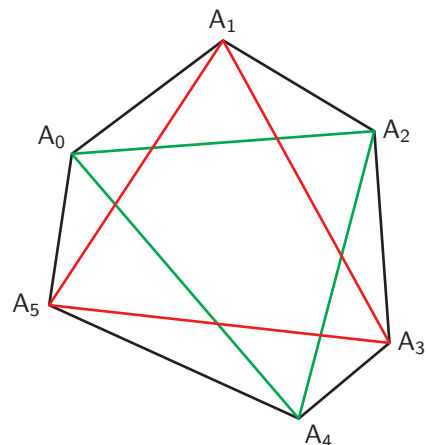
Les « grandes » diagonales se coupent, donc une seule d'entre elles peut figurer dans un

découpage, mettons $[A_0A_3]$. Elle divise l'hexagone en deux quadrilatères convexes, $A_0A_1A_2A_3$ et $A_0A_3A_4A_5$, dont chacun est décomposable en triangles de deux manières ; elle fournit donc $2 \times 2 = 4$ découpages.



En faisant de même à partir de $[A_1A_4]$ et de $[A_2A_5]$, on obtient en tout $3 \times 4 = 12$ découpages distincts, dont chacun en quatre triangles.

Restent les découpages ne faisant intervenir aucune « grande » diagonale. Il n'y en a que deux, et ceux-ci sont déterminés par les triangles $A_0A_2A_4$ et $A_1A_3A_5$. Et ils comportent encore quatre triangles chacun.

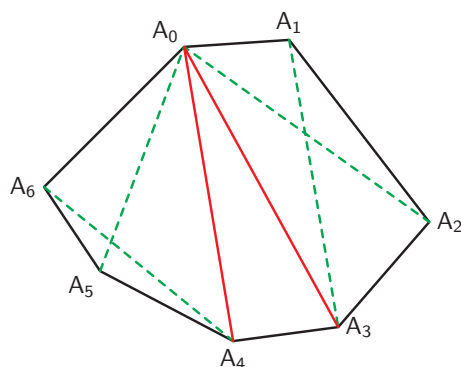


On a donc en tout 14 découpages.



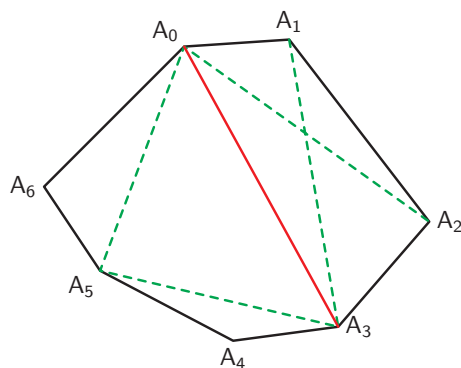
Cas $n = 7$

Dans le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, on distingue les sept « grandes » diagonales joignant deux sommets dont les indices diffèrent de 3 (mod 7), comme $[A_0A_3]$ ou $[A_5A_1]$, et les sept « petites » diagonales joignant deux sommets dont les indices diffèrent de 2 (mod 7) comme $[A_0A_2]$ ou $[A_6A_1]$. Deux grandes diagonales se coupent à l'intérieur du polygone sauf si elles ont une extrémité commune. Tout découpage utilise donc au maximum deux grandes diagonales.



S'il en utilise deux, elles partagent l'heptagone en un triangle et deux quadrilatères admettant chacun deux découpages (ci-dessus). On obtient donc déjà $7 \times 2 \times 2$, soit 28 découpages distincts, tous en cinq triangles.

Si un découpage n'utilise qu'une grande diagonale, elle sépare un pentagone, qui ne peut être découpé que comme ci-dessous, et un quadrilatère, qui a deux découpages possibles, ce qui fournit 7×2 , soit 14 découpages supplémentaires, encore en cinq triangles.



Reste à étudier les découpages n'utilisant aucune grande diagonale. Tout triangle de type 2 ou 3 utilisant au moins une grande diagonale, tous les triangles seraient du type 1 ; chacun occuperait donc deux côtés du triangle. Mais le malheur veut que 7 soit impair. Il n'y a donc pas de découpage sans grande diagonale.

Résumons les résultats obtenus pour les polygones convexes :

nombre de côtés du polygone	3	4	5	6	7
nombre de triangles d'un découpage	1	2	3	4	5
nombre de découpages	1	2	5	14	42

On a donc de bonnes raisons d'espérer que, pour un n -gone convexe donné, tous les découpages comportent $n - 2$ triangles.

Le nombre E_n de découpages augmente fortement avec n . Un travail à la main (assez facile) donne $E_8 = 132$. Dans le cas général, Euler a montré que $E_n = \frac{2 \times 6 \times 10 \cdots (4n - 10)}{(n - 1)!}$.

La formule $E_n = \frac{4n - 10}{n - 1} E_{n-1}$ permet un calcul aisé de proche en proche.

Parenthèse culturelle

Les nombres E_n se retrouvent de façon assez surprenante dans un problème très différent, résolu en 1838 par le mathématicien belge Catalan².

Étant donné un ensemble muni d'une multiplication associative, on appelle C_n (nombre de Catalan d'indice n) le nombre de façons dont on peut grouper n éléments sans changer leur ordre pour obtenir leur produit par une succession de multiplication de deux facteurs.

2. Eugène Charles Catalan, né le 30 mai 1814 à Bruges et mort le 14 février 1894 à Liège, est un mathématicien franco-belge, spécialiste de la théorie des nombres.





On a trivialement $C_2 = 1$ et $C_3 = 2$. Avec quatre termes, on obtient :

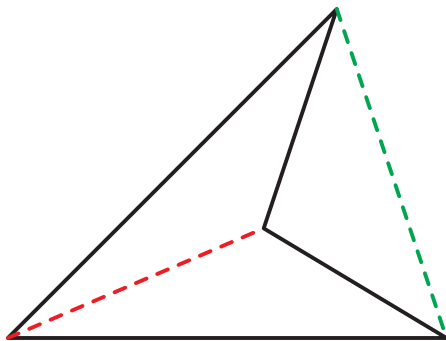
$$((ab)c)d, (a(bc))d, (ab)(cd), a((bc)d), a(b(cd)),$$

ce qui donne $C_4 = 5$.

On démontre³, mais c'est fort laborieux, que $C_n = E_{n+1}$.

Étude de quelques polygones non convexes

Même pour un nombre faible de côtés, le problème du découpage des polygones non convexes est extrêmement complexe, ce qui rend prohibitive toute étude artisanale. Les choses commencent pourtant bien pour le quadrilatère : une seule vraie diagonale, donnant un seul découpage, composé de deux triangles.



Mais dès que l'on s'attaque aux pentagones les choses se compliquent sérieusement. L'étude montre en effet alors trois situations de base :

Cas n° 1 : quatre sommets forment un quadrilatère convexe à l'intérieur duquel est le cinquième. Trois des côtés du quadrilatère sont alors côtés du pentagone.

Cas n° 2 a : deux des sommets sont à l'intérieur du triangle formé par les trois autres et deux côtés du triangle sont côtés du pentagone.

Cas n° 2 b : deux des sommets sont à l'intérieur du triangle formé par les trois autres et un seul côté du triangle est côté du pentagone.

3. On trouvera le calcul de C_n et la démonstration de l'égalité $C_n = E_{n+1}$ dans *100 Great Problems of Elementary Mathematics* d'Heinrich Dörrie pp. 22-27.

Mais dans chacune de ces situations, si le nombre de triangles figurant dans le découpage est toujours de 3, le nombre de découpages possibles est extrêmement variable.

Le lecteur désireux d'en savoir davantage pourra se reporter à la version en ligne [▶](#).

Étude générale

Les instruments de base sont encore les vraies diagonales : pour découper un polygone, on le coupe d'abord en deux par l'une d'elles. On obtient ainsi deux polygones ayant moins de côtés, ce qui permet un travail par récurrence.

Les deux lemmes sur lesquels tout repose

Lemme 1

Tout polygone ayant plus de trois côtés a au moins une vraie diagonale.

Lemme 2

Toute vraie diagonale Δ d'un polygone $\mathcal{P}$ le divise en deux polygones $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ tels que $\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}'' = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \Delta$.

Ces deux lemmes sont pour l'instant admis. Le lecteur pourra les considérer comme des évidences ou, s'il est curieux ou exigeant, aller découvrir leur démonstration sur le site de la revue [▶](#).

Théorème

Théorème T

- T1.** Tout n -gone est décomposable en réunion de triangles d'intérieurs disjoints dont les sommets sont pris parmi les sommets du n -gone ;
- T2.** Tout découpage de ce type comporte exactement $n - 2$ triangles ;
- T3.** Tout découpage de ce type utilise exactement $n - 3$ vraies diagonales.

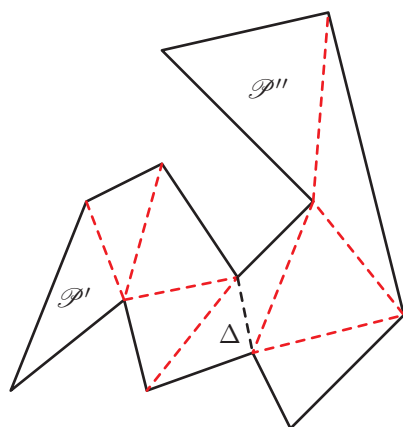
On raisonne par « récurrence forte ». Les résultats sont trivialement valables pour $n = 3$ et $n = 4$.



T1. Établissons d'abord l'existence d'au moins un découpage.

Supposant que l'énoncé T1 est vrai pour toutes les valeurs allant de 3 à $n - 1$ inclus, on considère un n -gone $\mathcal{P}$.

Il admet une vraie diagonale Δ qui divise $\mathcal{P}$ en deux polygones $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$; en réunissant un découpage de $\mathcal{P}'$ et un découpage de $\mathcal{P}''$, on obtient un découpage de $\mathcal{P}$.



T2 et T3. Supposons que, pour tout p -gone tel que $p < n$, chaque découpage comporte exactement $p - 2$ triangles et utilise exactement $p - 3$ vraies diagonales.

Considérons un découpage d'un n -gone $\mathcal{P}$. Soit Δ l'une des vraies diagonales intervenant dans ce découpage. Elle divise $\mathcal{P}$ en un h -gone $\mathcal{P}'$ et un k -gone $\mathcal{P}''$; si on totalise les côtés de $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$, on obtient ceux de $\mathcal{P}$ plus Δ comptée deux fois, donc $h + k = n + 2$.

Le découpage de $\mathcal{P}$ induit un découpage de $\mathcal{P}'$ et un découpage de $\mathcal{P}''$. Le premier comporte $h - 2$ triangles et le second $k - 2$, ce qui fait pour $\mathcal{P}$ en tout $h + k - 4$, autrement dit $n - 2$ triangles.

Quant aux diagonales utilisées pour le découpage de $\mathcal{P}$, ce sont celles utilisées pour $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$, plus Δ ; leur nombre est $(h - 3) + (k - 3) + 1$, soit $h + k - 5$, donc $n - 3$.

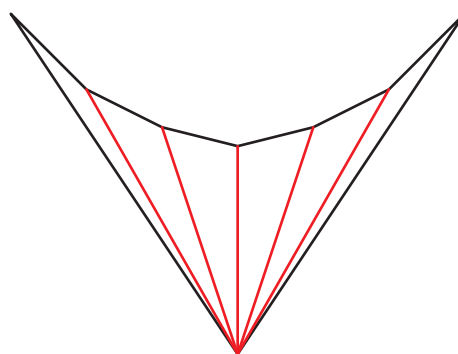
Corollaires

Corollaire 1

Le nombre minimum de vraies diagonales d'un n -gone est $n - 3$.

D'après T1, tout n -gone a au moins un découpage, qui, d'après T3 fait intervenir $n - 3$ vraies diagonales.

L'inégalité ne peut pas être améliorée. La figure ci-dessous représente en effet un n -gone ayant exactement $n - 3$ vraies diagonales (et un seul découpage possible). La justification est laissée au lecteur.



Corollaire 2

Tout découpage d'un polygone d'au moins quatre côtés comporte au moins deux triangles dont deux côtés sont des côtés adjacents du polygone (triangles « de type 1 »).

Considérons un découpage d'un n -gone. Dans ce découpage, on a x triangles dont un seul côté est une diagonale, y triangles dont deux côtés sont des diagonales, z triangles dont trois côtés sont des diagonales.

Le décompte des côtés du n -gone donne la relation : $2x + y = n$.

Le décompte des triangles donne : $x + y + z = n - 2$.

En retranchant membre à membre, il vient : $x - z = 2$.

Il en résulte l'inégalité $x \geq 2$, qui prouve le corollaire.



Remarque

La relation $z = x - 2$ est intéressante en elle-même : le nombre de triangles « de type 1 » est dans tout découpage supérieur de deux unités au nombre de triangles « de type 3 ».

Un algorithme de découpage

Le corollaire 2 ci-dessus donne un procédé récurrent permettant la réalisation effective de **tous** les découpages d'un n -gone donné $\mathcal{P}$:

Reconstitution d'un découpage donné $\mathbb{D}$ de $\mathcal{P}$:

- $\mathbb{D}$ comporte au moins deux triangles « de type 1 ». On choisit l'un d'eux, T_1 . On le détache par un coup de ciseaux.
- $\mathcal{P}$ amputé de T_1 est un $(n - 1)$ -gone $\mathcal{P}_1$ sur lequel $\mathbb{D}$ induit un découpage $\mathbb{D}_1$.
- $\mathbb{D}_1$ comporte au moins deux triangles « de type 1 ». On choisit l'un d'eux, T_2 . On le détache par un coup de ciseaux.
- $\mathcal{P}_1$ amputé de T_2 est un $(n - 2)$ -gone $\mathcal{P}_2$ sur lequel $\mathbb{D}$ induit un découpage $\mathbb{D}_2$.
- On itère. Au k -ième coup de ciseaux, on a détaché k triangles, figurant tous dans $\mathbb{D}$, et il reste un $(n - k)$ -gone $\mathcal{P}_k$. Le processus s'arrête lorsque le polygone restant est un triangle, donc lorsque $n - k = 3$.
- On a donc reconstitué le découpage en donnant au total $n - 3$ coups de ciseaux (donc utilisé $n - 3$ vraies diagonales). En adjoignant aux triangles détachés le triangle résiduel, on vérifie que le découpage comporte bien $n - 2$ triangles.

Corollaire 3

La somme des angles d'un n -gone est $(n - 2) \times 180^\circ$.

Il suffit pour le prouver d'observer que la somme des angles du polygone est celle des angles des $n - 2$ triangles d'un découpage.

Remarque : il en résulte que **tout polygone a au moins trois angles inférieurs à 180°** (sinon il aurait au moins $n - 2$ angles supérieurs à 180° , dont la somme serait supérieure à $(n - 2) \times 180^\circ$). Notons que ce résultat ne peut pas être amélioré : le contre-exemple du corollaire 1 a exactement trois angles inférieurs à 180° .

Commentaire final et fatal

Un lecteur rigoriste peut considérer que rien de ce qui précède (en dehors de ce qui touche aux polygones convexes) ne tient réellement debout. On a en effet admis comme allant d'elles-mêmes les notions de contour, d'intérieur et d'extérieur d'un polygone... et la notion de polygone elle-même. Ces notions reposent pour l'essentiel sur le théorème suivant :

Théorème

Toute ligne polygonale fermée sans point double sépare le plan en deux régions dont chacune est d'un seul tenant⁴ : un intérieur borné et un extérieur non borné. La réunion de l'intérieur et du contour est appelée polygone.

La démonstration de ce résultat important n'est enseignée à peu près nulle part. Elle ne suppose d'autres connaissances que celles du lycée et ses idées directrices sont simples, mais son exposé demande plusieurs pages : la taille d'un article, autrement dit ! J'y songerai. . .

.....◆.....

Pierre Legrand a depuis longtemps un rôle actif au sein de l'APMEP, il a écrit de nombreux articles dans le Bulletin Vert.

pierre.legrand078@orange.fr

© APMEP Décembre 2019

4. Chacune est un ouvert connexe.

Sommaire du n° 534

Le travail en équipe (côté enseignants)

Éditorial

Opinions

L'histoire des mathématiques dans les nouveaux programmes de lycée général — Nathalie Chevalarias

✦ Pour le meilleur et pour le pire — Daniel Djament

✦ Labos de maths : un projet d'équipe — Mathieu Vaidie

✦ Collaborer pour produire une ressource : les apprentissages numériques en laboratoire de mathématiques — Maha Abboud

✦ La liberté pédagogique est-elle compatible avec le travail en équipe? — Gérard Sensevy

Avec les élèves

Cogni'classe au collège — Julie Benoit

Math & Manips pour le secondaire supérieur : problèmes d'optimisation — Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpson et Isabelle Wettendorff

✦ Meurtres à Numbertown — Élodie Henriët et Rhydwen Volsik

La course aux nombres — Anne-France Acciari

1 Ouvertures

✦ Ingénieries de formation en mathématiques : des réalisations inspirées des *Lesson Studies* — Frédéric Hartmann & Blandine Masselin

Découpages — Pierre Legrand

Récréations

La preuve par 9 — Michel Soufflet

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt

Au fil des jeux — Valérie Larose

Les maths s'affichent — Valérie Larose

Le coin des problèmes — Claudie Asselain-Missenard

Au fil du temps

Jeux de boules — Henry Plane

1932 : tête chercheuse — Pierre Pansu

Matériaux pour une documentation

✦ La Commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (CIEM) — Richard Cabassut

Anniversaires — Dominique Cambrésy

Courrier des lecteurs



CultureMATH

