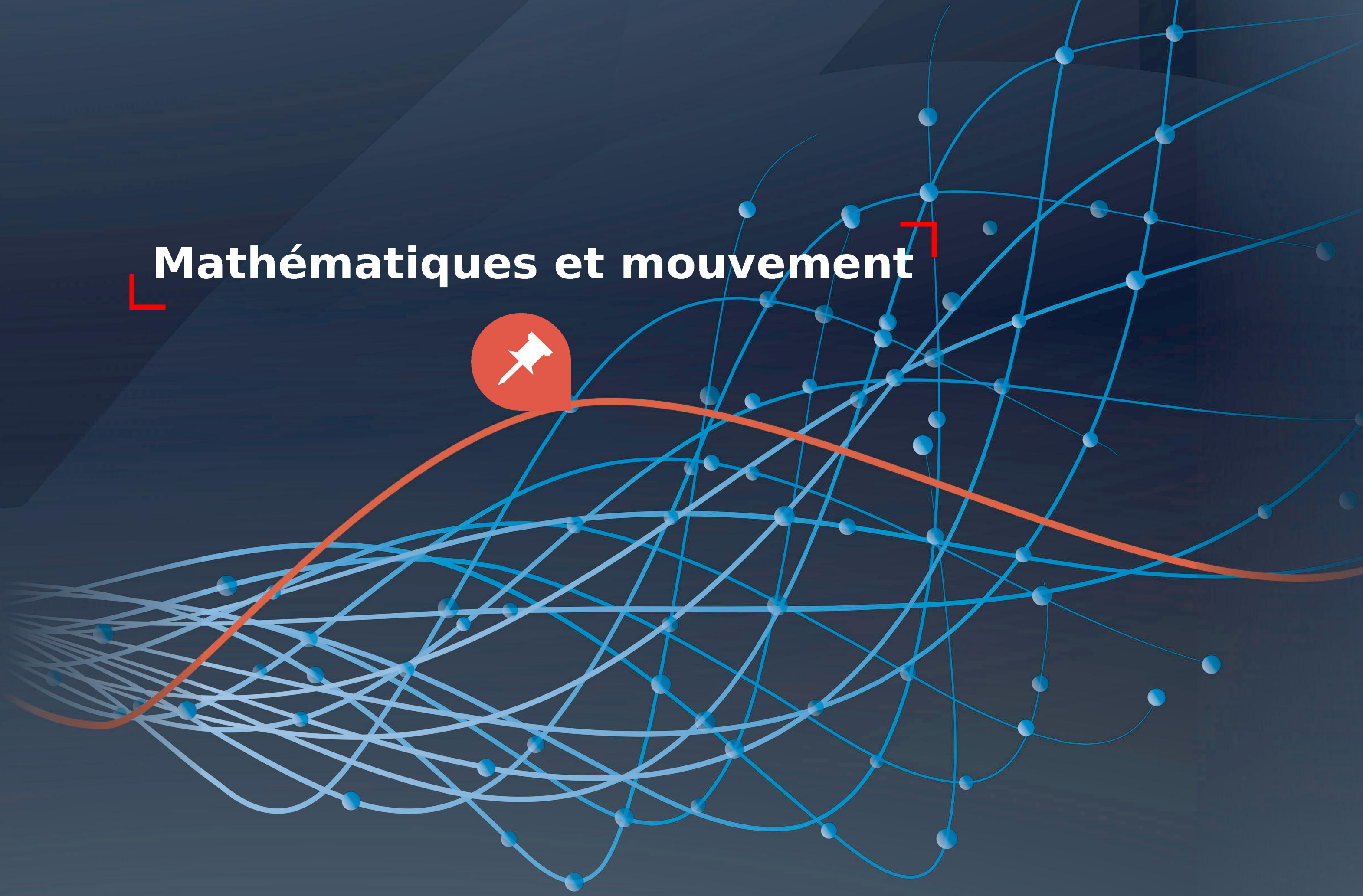
Le bulletin de l'APMEP - N° 533

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Juillet, Août, Septembre 2019

Mathématiques et mouvement



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2019-2020 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien Planchenault..

Responsable coordinateur de l'équipe : Lise Malrieu..

Rédacteurs : Vincent Beck, Marie-Astrid Bézard, François Boucher, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Frédéric De Ligt, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Lise Malrieu, Jean-Marie Martin, Daniel Vagost, Thomas Villemonteix, Christine Zelty..

« Fils rouges » numériques : Gwenaëlle Clément, Nada Dragovic, Laure Étévez, Marianne Fabre, Robert Ferréol, Adrien Guinemer, Christophe Romero, Jacques Vallois..

Illustrateurs : Pol Le Gall, Olivier Longuet, Jean-Sébastien Masset..

Équipe TEXnique : François Couturier, Isabelle Flavier, Anne Héam, François Pétiard, Olivier Reboux, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Michel Suquet..

Maquette : *Olivier Reboux.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Juillet, Août, Septembre 2019
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

AU FIL DES MATHS

APMEP

La coupe du monde de rugby

Les problèmes de Papy Michel

La prochaine coupe du monde de rugby étant prévue pour l'automne 2019, nous allons apporter notre modeste contribution à l'amélioration des techniques des joueurs !

Michel Soufflet

La transformation au rugby

Un essai ayant été marqué à la distance a du premier poteau et à la distance b du deuxième, le joueur chargé de la transformation peut, tout en restant sur une perpendiculaire à la ligne de but, se placer à une distance x de son choix pour taper son « coup de pied » entre les poteaux.

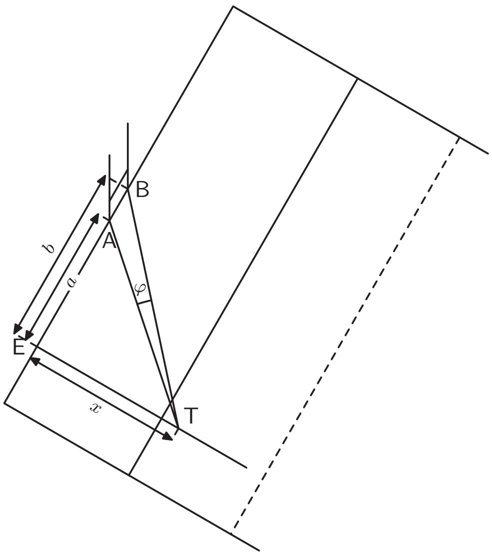


Figure 1. *Terrain de rugby.*

Où doit-il se placer pour que l'angle φ de tir soit maximal ? On suppose qu'il n'y a pas de vent au moment du tir[1].

Ce problème a été l'objectif de l'exercice 4 du sujet métropole 2016[2] (en TS). La fonction tangente n'étant pas au programme de Terminale S, les élèves sont amenés à prouver la stricte croissance de la fonction tangente et on leur fournit la formule d'addition pour $\tan(\alpha - \beta)$.

Le problème revient à chercher le maximum de la fonction φ lorsque x varie de 0 à $+\infty$.

L'angle φ est bien sûr compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque x varie entre 0 et $+\infty$ et la fonction tangente est croissante sur cet intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Préliminaires...

La formule $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \times \tan(\beta)}$ n'est plus dans les programmes de Terminale mais la démonstration peut se faire en classe avec l'aide de l'enseignant. Une bonne occasion de réviser

1. Pour les prévisions météo appeler le 3250.
2. On peut trouver ce sujet sur le site de l'APMEP.

le produit scalaire vu en 1re S ainsi que les formules de trigonométrie du programme (nécessaires pour déterminer le module et argument du produit de deux complexes).

On place sur le cercle trigonométrique de centre O un point A tel que $\overrightarrow{OA}$ fasse un angle α avec l'axe des abscisses et un point B tel que $\overrightarrow{OA}$ fasse un angle β avec ce même axe. En écrivant de deux façons différentes le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, nous obtenons : $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$.

En utilisant la parité de la fonction cosinus et l'imparité de la fonction sinus, on trouve :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

or, $\sin(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

et donc $\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)$

d'où : $\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\beta+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

Nous en déduisons :

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)}.$$

Et en divisant numérateur et dénominateur par $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, on retrouve la formule.

Étude de $\tan\circ\varphi$

Au lieu d'étudier la fonction φ, nous allons étudier $x\longmapsto\tan(\varphi(x))$ puisque ces deux fonctions ont le même sens de variation sur $[0\,;+\infty[$ d'après le théorème qui gère le sens de variation de la composée de deux fonctions.

La formule peut s'appliquer directement :

$$\tan(\varphi(x))=\frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}=\frac{bx-ax}{x^2+ab}.$$

Il nous faut donc étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{bx-ax}{x^2+ab}$ sur $[0\,;+\infty[$.

Cette fonction est dérivable et

$$f'(x)=\frac{(b-a)(ab-x^2)}{(x^2+ab)^2}.$$

Puisque $a<b$, $f'(x)$ a le même signe que $ab-x^2$ et f admet un maximum lorsque $x=\sqrt{ab}$.

Conclusion

Le meilleur choix pour x est la moyenne géométrique de a et de b, $G=\sqrt{ab}$.

On vérifie facilement que ce nombre est inférieur à la moyenne arithmétique $A=\dfrac{a+b}{2}$ car $A^2-G^2=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4}$ et donc $A^2-G^2>0$, d'où $A>G$ (ou égal lorsque $a=b$) puisque ces deux nombres sont positifs.

En pratique, il faut se placer à une distance légèrement inférieure à $\dfrac{a+b}{2}$ qui correspond au milieu du but.

Remarques

Sur le terrain

Bien sûr vous ne verrez probablement pas le joueur mesurer les distances a et b et prendre sa calculette pour calculer leur moyenne géométrique ! Il fera comme ses maîtres qui ont appris par tâtonnements successifs et, avec l'expérience, choisira une position qui sera proche de ce que prévoit la théorie. Le joueur débutant apprend, en regardant les anciens, c'est une bonne méthode, sans doute la plus ancienne mais découvrir la position idéale par le calcul lui donnera le sentiment de dépasser le maître, satisfaction irremplaçable !

Le sujet de baccalauréat

On peut généraliser le sujet proposé au baccalauréat 2016, l'utiliser comme application numérique du problème précédent ou le prendre comme point de départ, ce choix appartenant au professeur suivant l'époque de l'année et le niveau de sa classe. Rappelons que la plupart des exercices d'annales peuvent donner lieu à une bonne formation mathématique si on va au fond des choses.

Avec GeoGebra [3]

En prenant les notations de la figure 1, on peut vérifier que faire varier le paramètre « a » ou la variable « x » en traçant le cercle (de centre O) circonscrit au triangle ABT permet de faire des conjectures. Ce cercle coupe la droite (ET) en deux points T et T′, ces deux points étant confondus lorsque la droite (ET) est tangente au cercle.

Pour cette position de T, on a, en utilisant ce qu'on appelait « la puissance d'un point par rapport à un cercle » : $\mathrm{ET}^2 = \mathrm{EA.EB}$ (cqfd).

En considérant la moitié du triangle isocèle OAB, on peut même en déduire l'angle φ qui est alors égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{\mathrm{AOB}}$ et sa tangente vaut donc : $\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

Avec un piquet et un cordeau

Ce résultat permet également une construction du point T au compas ou, sur le terrain, à l'aide d'un piquet et d'un cordeau :

Le point A étant au pied du premier poteau et B au pied du second, on trace la perpendiculaire (D_1) à (AB) passant par E ainsi que la perpendiculaire (D_2) à (AB) passant par A.

Le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{BE}]$ rencontre (D_2) en un point que l'on appelle C, le demi-cercle de centre E et de rayon EC rencontre (D_1) en T.

Dans le triangle BCE rectangle en C, (CA) est une hauteur et on a, en calculant de deux façons le cosinus de l'angle de sommet E : $\mathrm{EC}^2 = \mathrm{EA.EB} = ab$ donc également $\mathrm{ET}^2 = ab$ (cqfd).

À se demander pourquoi tout ceci n'est pas tracé sur le terrain !

Cela rappellera quelques souvenirs à ceux qui ont passé le bac « math élém » avant 1968 et qui, faute de logiciel, construisaient ce cercle avec compas, papier et crayon. Ne soyons pas nostalgiques, l'approche dynamique avec GeoGebra permet de visualiser toutes ces conjectures très simplement, et permet sûrement à un plus grand nombre d'élèves de rentrer dans le problème posé. Il n'est toutefois pas inutile de rappeler sur un exemple comment procédaient nos ancêtres sans logiciel, juste avec une règle et un compas !

Michel Soufflet est un ancien président de l'APMEP et animateur IREM.

michel.soufflet@unicaen.fr

3. Figure terrain_rugby téléchargeable dans la version numérique de l'article.

Journées nationales de l'APMEP

La Saveur des Mathématiques

De la maternelle à l'université

les 19-20-21-22 octobre 2019

DIJON

infos: www.apmep.fr

Sommaire du nº 533

Mathématiques et mouvement

APMEP

www.apmep.fr