

Le bulletin de l'APMEP - N° 531

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2019

Le demi-cercle (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Alice ERNOULT.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, Marie-Astrid BÉZARD, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Vincent PANTALONI, Daniel VAGOST, Christine ZELTY .

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLEMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS .

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET .

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET .

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX

Dépôt légal : Mars 2019

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

Un π -nacle des mathématiques

Cet article est un clin d'œil au nombre π et à son histoire, il est donc écrit dans un périodique et est lui-même périodique. Pour cela, photoco- π -ez l'article, munissez-vous d'une paire de ciseaux et formez une bande de Moebius à partir des colonnes que vous collerez dos à dos. Vous pouvez commencer sa π -euse lecture qui ne garantit pas sa transcendance mais qui vous amusera sans π -gner, je l'espère.

Henrique Vilas Boas



π -ttoresque

Chez mon ex-dentiste qui savait que j'enseignais les maths, chaque visite était le moment où il se gaussait ostensiblement des mathématiciens qui calculaient, pour lui, avec obstination et sans but, une énième décimale de π . Cette course à la décimale est bien réelle et est l'occasion de tester des algorithmes de haute tenue, mais avait-il idée de l'histoire de ce nombre ? Comment et pourquoi ses outils professionnels se sont-ils π -xellisés ?

Deux π -erres

Ce nombre fait son apparition avec la détermination de la circonférence du cercle, mais où ? En Mésopotamie où 3 est une valeur approchée fort pratique pour obtenir un ordre de grandeur à peu de frais en calcul mental ? Chez les Sumériens ?

Les Akkadiens ? En des temps plus reculés ? En tout cas, le symbole π , lui, est associé à la première lettre du mot grec περιφέρεια, périphérie en français, un savoir qui émeut les élèves, à coup sûr, quand nous l'écrivons au tableau.

π -fomètre

π se laisse mal apprivoiser, les approximations d'Archimède ((-287)-(-212)), d'Aryabhata (476-550), de Tsu Chung-Chi (430-501), d'Al-Kashi (1390-1450) sont des merveilles qui posent de redoutables questions : π est-il une fraction ? Un nombre extra-terrestre ou parfaitement terrestre ? Leopold Kronecker (1823-1891) a écrit « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme ». On serait tenté de pencher du côté de Kronecker car π est la mesure du cercle, une figure bien tangible, humaine à plusieurs titres.

La π -thie des maths et les π -euvres géantes

Les premières démonstrations du fait que π n'est pas une fraction (Lambert, 1761) ou que π est transcendant, c'est-à-dire qui n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients ration-

nels (Lindemann, 1882), viendront semer le doute sur la nature de ce nombre qui, loin de nous dévoiler ses mystères au fil du temps, nous en a fourni encore bien d'autres ; par exemple, est-ce un nombre univers ? C'est-à-dire un nombre contenant, dans son développement dans une base donnée, toute séquence de chiffres de longueur finie !

π -ed de nez carré

Les Grecs proposeront plusieurs problèmes liés à des considérations de constructions géométriques à la règle et au compas, comme la duplication du cube, la trisection d'un angle et la très célèbre quadrature du cercle (construire un carré de surface égale à celle d'un disque donné) qui a fait couler beaucoup d'encre. À tel point que l'Académie royale des sciences frappe d'interdit les publications des « quadrateurs » en 1775. Problème si difficile qu'il s'est transformé en une expression bien célèbre pour marquer un blocage. C'est à Pierre Laurent Wantzel, en 1837, que revient l'honneur de démontrer que ces trois problèmes n'admettent pas de construction à la règle et au compas.

Des π -ffres et des nombres

Le nombre π est la proie de convoitises mathématiques qui ont évolué dans l'histoire, de l'identification de sa précision jusqu'à la compréhension de sa nature profonde. La quête effrénée des chiffres de π est parfois vouée à un culte étonnant, en revanche on sait qu'il a suscité la vocation de grands mathématiciens (Bailey, Plouffe, les frères Borwein, ...). Genuys qui avait obtenu un record à 10 000 décimales en 1958, expliquait que c'était le nombre idéal pour tester un de ses programmes ; en effet « e » l'exponentielle, était à ses yeux trop facile et « γ » la constante d'Euler trop difficile.

π -day et autres π -manias

Un certain fétichisme peu scientifique et un commerce autour de ce nombre ont fleuri ici ou là. Il

y a même un jour de l'année qui lui est consacré, le 14 mars (le 3-14 en notation anglo-saxonne) et un spectacle musical¹ de grande qualité (« La tournée de π »). Mais difficile de ne pas être subjugué par une égalité, découverte par Léonhard Euler (1707-1783) qui regroupe des nombres fondamentaux, 0, 1, i (un nombre complexe dont le carré est -1) et celui que vous savez : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

π -ratage

En 1897, une proposition de loi dans l'état de l'Indiana aux États-Unis voulait fixer un moyen de résoudre la quadrature du cercle, et différentes valeurs erronées du nombre π ont été proposées. C'est un certain Clarence Abiathar Waldo, professeur de mathématiques, accidentellement présent dans l'assemblée, qui a contré la loi.

π -tries très sérieuses

C'est un nombre qui se cache parfois où on ne l'attend pas. George Louis Leclerc de Buffon (1733) propose une expérience étonnante : on lance une aiguille au sol sur un réseau de lignes parallèles, et comptabilise le nombre de fois où l'aiguille rencontre le réseau de droites. La probabilité que l'aiguille coupe une des parallèles s'exprime à l'aide du nombre π et permet ainsi d'avoir une approximation de ce nombre par un procédé probabiliste. Et c'est une autre aiguille, celle de Soichi Makeya (1886-1947) qu'il s'agit de faire tourner sur elle-même en balayant un minimum de surface : dans certaines conditions, elle donne des solutions s'obtenant à l'aide du nombre de Bloom-Schoenberg qui s'exprime avec le nombre π .

π -laf é- π -cé

À l'instar de certains plats orientaux, π peut être considéré comme très é- π -cé ; Srinivasa Ramanujan (1887-1920) en a trouvé des expressions extraordinaires dépassant l'entendement ; en voici une que l'on trouve dans son *Note Book*, dont seulement quelques formules sont démontrées.

On peut affirmer avec Jean-Paul Delahaye que

1. Cet événement de diffusion scientifique grand public est proposé par une association de jeunes chercheurs et doctorants en mathématiques de Lyon, Marseille et Paris. 

même les formules incorrectes sont stupéfiantes de précision et de beauté.

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)! (1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

π -être roman

Boris Gourévitch nous explique qu'en 1973, Guilloud et Bouyer atteignent le premier million de décimales de π . Le calcul en binaire de π a pris 22 h 11 min, sa vérification 13 h 40 min, et la conversion en base décimale 1 h 07 min. Un livre de 415 pages de décimales tiré de ce calcul fut qualifié à l'époque de « livre le plus ennuyeux du monde » ! Cette course aux décimales connaîtra une progression monotone croissante jusqu'à nos jours.

Pé- π -te lumineuse

Il est impossible de citer tous les problèmes impliquant ce nombre mais il y en a un que je trouve très beau, on le nomme le problème de Bâle. Il fut initié par Pietro Mengoli (1644) et résolu plus tard par Léonhard Euler (1731) ; il s'agit de déterminer la somme infinie des inverses des carrés des entiers. Euler a montré que c'était exactement le sixième du carré de π :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On peut apprécier ici  une lumineuse démonstration de cette égalité issue du site *Brilliant*, en utilisant le théorème inverse du théorème de Pythagore qui stipule que l'inverse du carré de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est égal à la somme des inverses des carrés des cathètes et en utilisant les propriétés de luminosité de « phares » bien placés sur des cercles.

To π or not to π ?

L'égalité précédente se montre aussi à l'aide de la fabuleuse théorie de Joseph Fourier (1768-1830) qui permet d'exprimer les fonctions périodiques,

sous certaines conditions, comme somme de fonctions trigonométriques. Cette théorie, qui naturellement inclut le nombre π , a de profondes applications dans de nombreuses sciences comme le montre Cédric Villani dans sa conférence « Mathématique de la chauve-souris ». En particulier, les dentistes ont leur cabinet truffé d'outils qui n'existeraient pas sans cette théorie et donc d'une certaine manière sans π .



Références

- [1] Boris Gourévitch. *L'univers de π* . Site web : .
- [2] Boris Gourévitch. *La quête des décimales de π* .  2005.
- [3] Jean-Paul Delahaye. *Fascinant nombre π* . Belin.
- [4] Joaquín Navarro. « Les secrets du nombre π . Pourquoi la quadrature du cercle est-elle impossible ? » In : *Le monde est mathématique*. n° 6. Paris : RBA France *Le Monde*, 2013.
- [5] Marie Jacob. « Interdire la quadrature du cercle à l'Académie : une décision autoritaire des lumières ? » In : *Revue d'histoire des mathématiques* n° 11 (2005). , pp. 89-139.
- [6] Vincent Borelli. *L'aiguille de Kakeya*. .

.....◆.....
Henrique Vilas Boas est enseignant de mathématiques au collège Paul-Émile Victor à Rillieux-la-Pape. Il est aussi chargé d'étude au Centre Alain Savary – IFÉ (Institut Français de l'Éducation) – ENS (École Normale Supérieure) à Lyon. Il fait également partie du groupe « Jeux » de l'APMEP.

© APMEP Mars 2019

Sommaire du n° 531

Le demi-cercle (2)

Éditorial

Opinions

À la recherche des mathématiques disparues...
— Alice Ernoult

Manipuler en mathématiques... oui mais — Joël Briand

Avec les élèves

M@ths en-vie — Carole Cortay et Christophe Gilger

Les Devoirs Maison, formation plutôt qu'évaluation
— Antoine Laniray

✦ Quelques bricolages pour le cercle trigonométrique
— Olivier Longuet

Escape Game, des révisions revisitées — Fabien Aoustin

Atelier Math et anamorphoses — Mireille Génin

Ouvertures

✦ Des cercles sur des surfaces ? — Robert Ferréol

✦ Décupler les angles — Serge Cantat

1 ✦ Haïku — Richard Cauche 51

3 Oui, les mathématiques peuvent surprendre !
— Jean-Baptiste Hiriart-Urruty 52

3 ✦ Tournez méninges — Karim Zayana 58

6 Du bon usage de l'algèbre en histoire du calcul
— Jérôme Gavin et Alain Schärliig 62

6 ✦ *Le Grand Rampant* — Claudie Asselain-Missenard 66

10 Colonies de vacances — Vincent Bansaye 69

Récréations 71

De surprenantes arithmétiques (II) — André-Jean Glière 71

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 77

Au fil du temps 79

✦ Un π -nacle des mathématiques — Henrique Vilas Boas 79

Matériaux pour une documentation 82

Anniversaires — Dominique Cambrésy 85

In memoriam Éric Trotoux — Pierre Ageron 87

Les équerres d'Arenas — Bernard Parzysz 89



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr