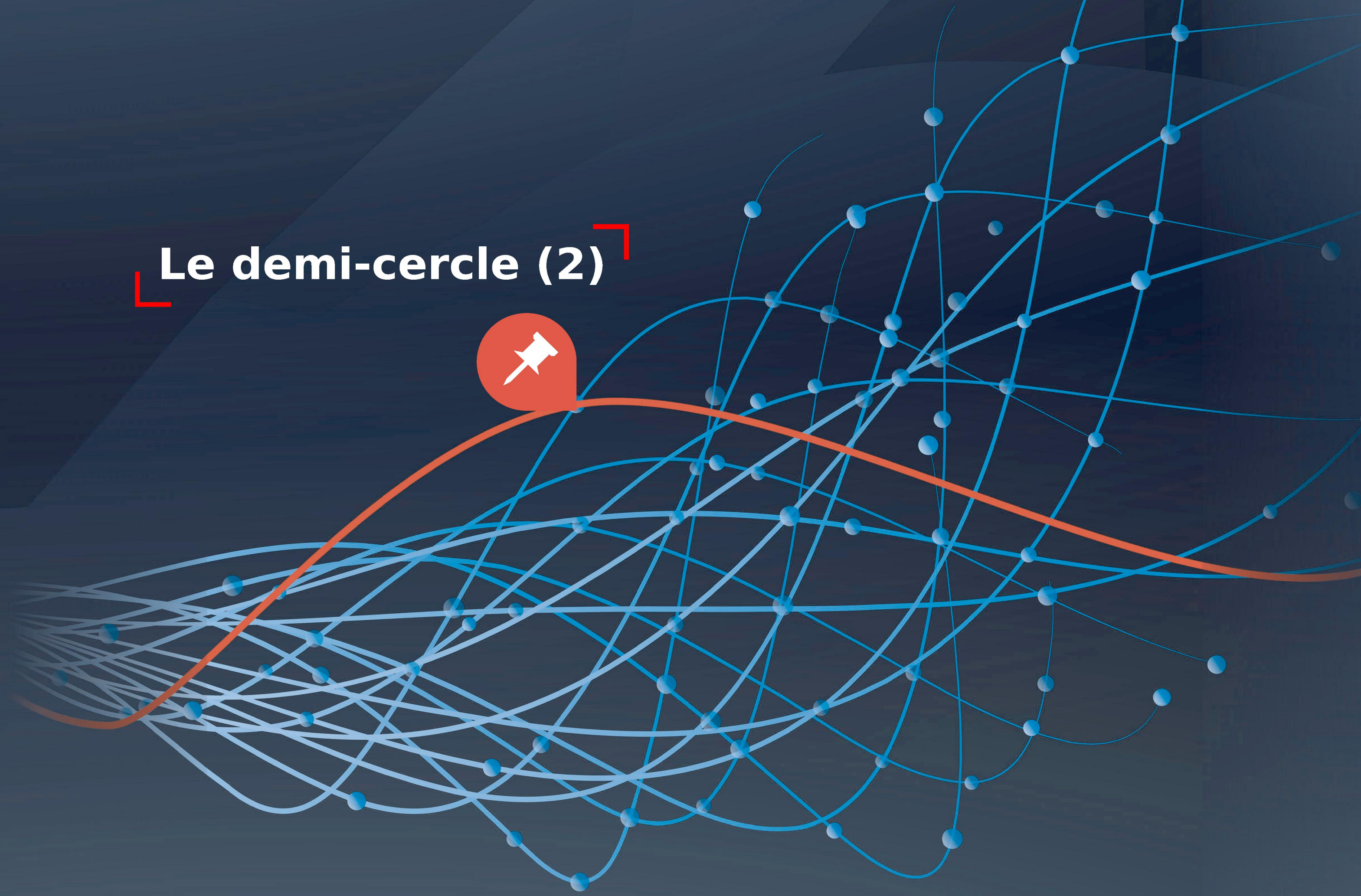
Le bulletin de l'APMEP - N° 531

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2019

## Le demi-cercle (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION
# DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
# DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN


***Au fil des maths***, c'est aussi une revue numérique augmentée :
**https://afdm.apmep.fr**
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS



**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths.***
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.


Mise en page : Olivier REBOUX
Dépôt légal : Mars 2019
Impression : Imprimerie Corlet.
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

# Tournez méninges

*Suivons le chemin que nous indique Karim Zayana pour nous promener et nous repérer sur un cercle ! Cela pourrait même nous être utile pour mesurer l'épaisseur d'un ruban adhésif.*

***Karim Zayana***

Se repérer sur le cercle est à la fois simple et subtil. La chose tient en peu de gestes, connus depuis l'Antiquité, mais reste délicate à exposer auprès des élèves de seconde et de première. Plusieurs systèmes d'unité — au moins quatre — cohabitent : proportionnels, ils ont chacun leurs raisons d'être ou de ne pas être, leurs défenseurs et leurs détracteurs. Quoi qu'il en soit, la relation entre une position et une mesure d'angle n'est jamais biunivoque : une infinité de valeurs, dites congruentes, renvoyant au même point. Ajoutons qu'à deux sens de parcours, dont l'un sera arbitrairement privilégié, correspondent deux signes. Enfin, les situations issues de la vie courante s'écartent du modèle idéal, ce qui donne lieu à discussion.

## L'approche intuitive

Le plus naturel quand on cherche un point sur le cercle, ce n'est pas de compter en heure, en radian ou en degré ; c'est de compter en tour : tour d'horloge, tour de table, tour de piste. Préalablement, on aura choisi une origine marquant l'Est mathématique, non au centre mais *sur* le cercle et pareille à une balise de départ. On aura convenu d'un sens de rotation préférentiel : trigonométrique (semblable à celui d'un stade ou d'un carrefour giratoire), ou horaire (dit rétrograde ou indirect au regard du premier). Dès lors, on placera quatre points cardinaux, alias des fractions $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. Le signe négatif s'interprétera comme un recul : ne dit-on pas « huit heures moins dix » pour revenir dix minutes en arrière ? Et de même qu'un athlète véloce peut revenir à votre hauteur après vous avoir pris un tour, on identifiera $\frac{2}{3}$ à $\frac{5}{3}$, à $\frac{8}{3}$, ou à $-\frac{1}{3}$ (celui-là triche).

Mesurer en unité de tour libère de toute échelle et dispense de raisonner sur le cercle unité. Sauf à le subdiviser, donc à manipuler des fractions, le pas de mesure est cependant grossier. Quant à la mesure, elle occulte le nombre $\pi$ dont on ne perçoit plus la filiation au cercle. Aussi existe-t-il différentes variantes, présentées ici, aboutissant aux unités d'angle usuelles et gagnant sur l'un ou l'autre des tableaux.

## Du repérage en radian au repérage gradué

Un protocole voisin consiste à repérer un point du cercle par une longueur d'arc le séparant d'une origine donnée. Pour un résultat universel, on chemine cette fois sur le cercle de rayon[1] normalisé à 1. Les considérations algébriques (signes, congruences) soulevées précédemment demeurent. Comme le nombre $\pi$ exprime, en unité de longueur, le demi-périmètre du cercle de rayon 1, les mesures $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, (toutes définies modulo $2\pi$) marquent les points cardinaux. De ces modalités découle le radian, étalon servant à mesurer aussi bien qu'à désigner des angles.

Les lignes trigonométriques, en tant que fonctions numériques d'un argument réel $x$ impli-

1. De là, peut-être, l'origine du mot radian, issu du latin « radius » signifiant rayon.

citement lié à une mesure en radian, s'en déduisent. À tout $x$ on associe un unique point du cercle unité en parcourant une distance orientée, point que l'on projette ensuite orthogonalement sur l'axe des abscisses (cosinus) et sur l'axe des ordonnées (sinus). La tangente s'obtient par une « projection radiale » sur la droite d'équation $x = 1$ ; voir la figure 1.

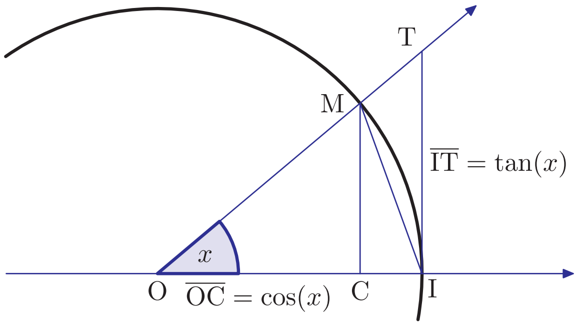



Figure 1. *Lignes trigonométriques.*

Derechef, l'emboîtement des aires triangulaires OIM et OIT des deux côtés de la portion de disque $\widehat{\mathrm{OIM}}$ fournissent le traditionnel encadrement : $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$ sur la plage $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, utile aux sciences physiques pour estimer combien $\sin(x)$ approche $x$ pour les petits angles, et aux mathématiques pour dériver la fonction sinus en 0. Le cosinus intervient, tangible, dans les dispositifs mécaniques bielle-manivelle : deux tiges, ici de même longueur $\frac{1}{2}$, s'articulent en un coude ; l'extrémité du premier bras est fixe, celle du second coulisse le long d'un rail, convertissant un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne de va-et-vient (principe de la scierie romaine) et vice-versa (principe du moteur à piston), figure 2. L'ensemble dessine un triangle isocèle déformable. Dans GeoGebra, le point B, mobile et dont s'imprime la trace, décrit le cercle centré en O de rayon $\frac{1}{2}$. À l'intersection du cercle centré en B de rayon $\frac{1}{2}$ et de l'axe horizontal, les points C et D se confondent alternativement avec le point O. Un test conditionnel portant sur le signe de leur abscisse sélectionne l'un ou l'autre.

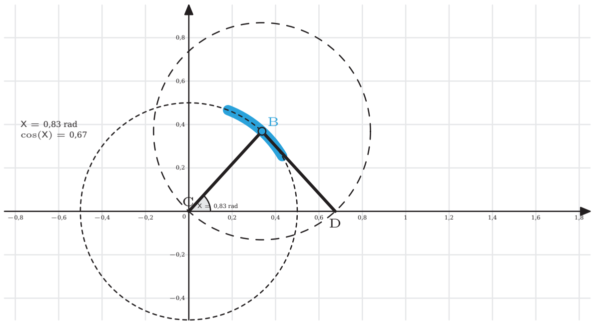



Figure 2. *Bielle-manivelle sous* GeoGebra.

En le dimensionnant différemment, le système est également plaisant et facile à fabriquer, figure 3. La course $\overline{\mathrm{OM}}$ y vaut plus généralement $h\cos(x) + \sqrt{g^2 - h^2\sin^2(x)}$ quand $h < g$.

Le radian n'est, pas davantage que le tour, une unité très fine pour jalonner le cercle. Comme leurs noms l'indiquent, les degré et grade le graduent par degrés plus resserrés. Le degré, très ancien, partage le cercle en 360. 360 possède pléthore de diviseurs puisque 60, base du système sexagésimal, en admet lui-même beaucoup. À telle enseigne que la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le sixième, le dixième, le douzième, le vingt-quatrième de cercle coïncident avec des graduations entières. Intérêt incident : la Terre tourne de pile 15° sur elle-même en une heure. De plus, 360 étant proche de 365 (la durée moyenne en jours d'une révolution terrestre), la Terre tourne donc d'environ un degré par rapport au soleil en 24 heures. Le grade est, lui, un héritage de la Révolution française et n'est plus guère utilisé de nos jours qu'en topographie. L'unité partage le cercle en 400. La circonférence de la Terre valant 40 000 km [2], un grade couvrait donc exactement 100 km d'un méridien — idée *a priori* séduisante.

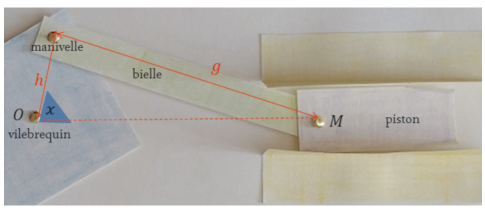



Figure 3. *Bielle-manivelle en carton et attaches parisiennes.*

2. L'Académie des sciences dépêcha plusieurs missions d'exploration sur différents méridiens au XVIIIe siècle afin d'établir précisément cette valeur. Si le nombre présente autant de zéros, c'est que la définition du mètre a, un temps, été choisie pour.

## Les modèles et leurs limites

Le radian sert d'abscisse curviligne au cercle trigonométrique : il le balise, autant que des bornes kilométriques disposées le long d'une route. On bobine ainsi virtuellement un fil gradué en unité de longueur autour d'un moyeu de rayon 1. Il y a « enroulement de la droite numérique sur le cercle ». Attacher l'observateur à la droite apporte une vision duale, où le cercle se met à rouler sur l'axe. La distance parcourue au sol se reporte intégralement sur le pneu : l'odomètre d'un véhicule automobile fonctionne sur ce principe.

Comme tout modèle, celui de la bobine de fil (ou du tuyau d'arrosage, ou du rouleau de sopalin) doit être examiné sous plusieurs coutures, et poussé jusqu'à la marge. Pour tant de tours de bobine, quelle longueur de fil ? Inversement, à telle longueur $L$, combien de tours ? Voilà, de prime abord, des questions anodines, au reliquat de tour ou de fil près. C'est oublier qu'un vrai fil n'est pas infiniment mince. Imparfaite, la bobine s'épaissit ; le rayon enfle ; l'enroulement se spirale comme un boa. La photographie 4 en rend compte avec réalisme. Il est toutefois plus commode, bien qu'inexact, de superposer des couronnes concentriques, en imaginant une discontinuité à chaque tour. Et plus simple d'arrondir[3] le nombre $n$ de tours à un entier. Suivant cette pensée, notons $R = R_0$ le rayon de la bobine à vide, $e$ l'épaisseur du fil. Après un tour complet, le rayon devient $R_1 = R_0 + e$ et la longueur de fil emmagasinée vaut $L_1 = 2\pi R_0$. Après un deuxième tour, le rayon est $R_2 = R_1 + e$ et la longueur emmagasinée s'est accrue : $L_2 = L_1 + 2\pi R_1$. L'expression de $L_n$ dépend de $n$, et inversement. Sans l'expliciter, on peut toujours la programmer par boucle bornée « FOR » pour répondre à la première question ($L_n$ fonction de $n$), et par boucle conditionnelle « WHILE » pour l'autre ($n$ fonction de $L$) comme dans le script Python ci-dessous.

3. Ce mot prend ici tout son sens.

Figure 4. *Une corde enroulée.*

**Fonction NombreTours**

```python
from math import *
def NombreTours(L,R,e):
    n = 0
    Lcourant = 0
    Rcourant = R
    while(L > Lcourant):
        Lcourant = Lcourant + 2*pi*Rcourant
        Rcourant = Rcourant + e
        n = n+1
    return n
```

Par exemple, une corde de longueur $L = 100$ m, d'épaisseur $e = 0{,}5$ cm, enroulée (à plat) autour d'un moyeu de rayon $R = 1$ cm effectue peu ou prou 79 tours, tandis que le calcul naïf renverrait un nombre de tours de $\dfrac{L}{2\pi R} \simeq 1\,591$, distorsion de taille !

Intéressons-nous au problème réciproque. Un jour que je tournais en bourrique sur un rouleau d'adhésif sans en trouver le bord, je me demandai soudain « quelle est donc l'épaisseur du ruban ? », cliché 5. Ça semble fin, mais encore… faute d'instrument de précision, comment s'en sortir ?

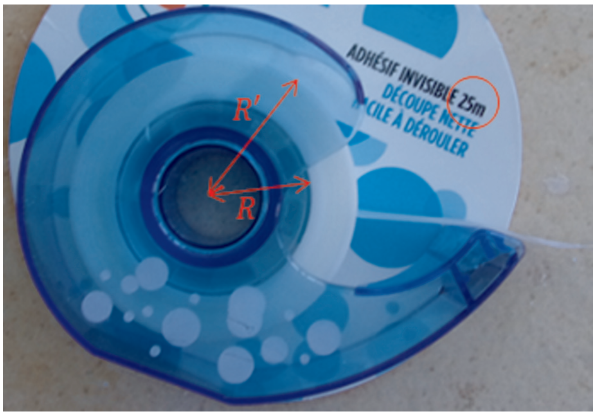



Figure 5. *Un rouleau de ruban adhésif.*

D'abord je mesure à la règle les rayons intérieur $R$ et extérieur $R'$ : j'obtiens 1,8 cm et 2,65 cm. Puis je déroule entièrement la bande[4]. Or, par sommation arithmétique $L$ vaut le périmètre médian (de rayon la moyenne de $R$ et $R'$, ou plutôt $R'-e$ puisque $R'$ a été mesuré à la surface du dernier bobinage) que multiplie le nombre de tours :

$$L = \frac{2\pi R + 2\pi\,(R'-e)}{2} \cdot \frac{(R'-R)}{e}$$

Numériquement $e \simeq 0{,}047$ mm, par calcul direct (l'équation n'est jamais que du premier degré) ou bien via un langage formel comme XCas, code ci-dessous. C'est environ l'épaisseur d'une feuille de papier ou d'un cheveu. Vérifications : je me rappelle avoir fait 178 tours trois quarts. Rassurant : cette quantité est comprise entre $\dfrac{L}{2\pi R'} \simeq 150$ et $\dfrac{L}{2\pi R} \simeq 221$. Mieux, dans la relation $n = \dfrac{R'-R}{e}$, le membre de droite est estimé à 179 sur la foi de l'épaisseur $e$ calculée ci-avant et des relevés de $R$ et $R'$. La boucle est bouclée : réalisée sans trucage, l'expérience valide le modèle dans les conditions d'applications choisies.

```
R := 1.8 ; Rp := 2.65 ; L := 2500
        [1.8, 2.65, 2500]
solve(L = pi*(R + Rp − x)*(Rp − R)/x)
        [0.00474815798028]
```

Karim Zayana est inspecteur général, professeur invité à l'Institut Mines-Télécom (Paris). Cet article fait suite à plusieurs échanges avec les équipes enseignantes dans les académies de Reims (lycée Marie de Champagne, Troyes) et de Dijon (lycée Pontus de Tyard, Chalon-sur-Saône), années 2016 et 2017.



4. Je réaliserai, plus tard, que la longueur $L$ était inscrite sur l'emballage, figure 5 : $L = 25$ m.

# Sommaire du nº 531

## Le demi-cercle (2)