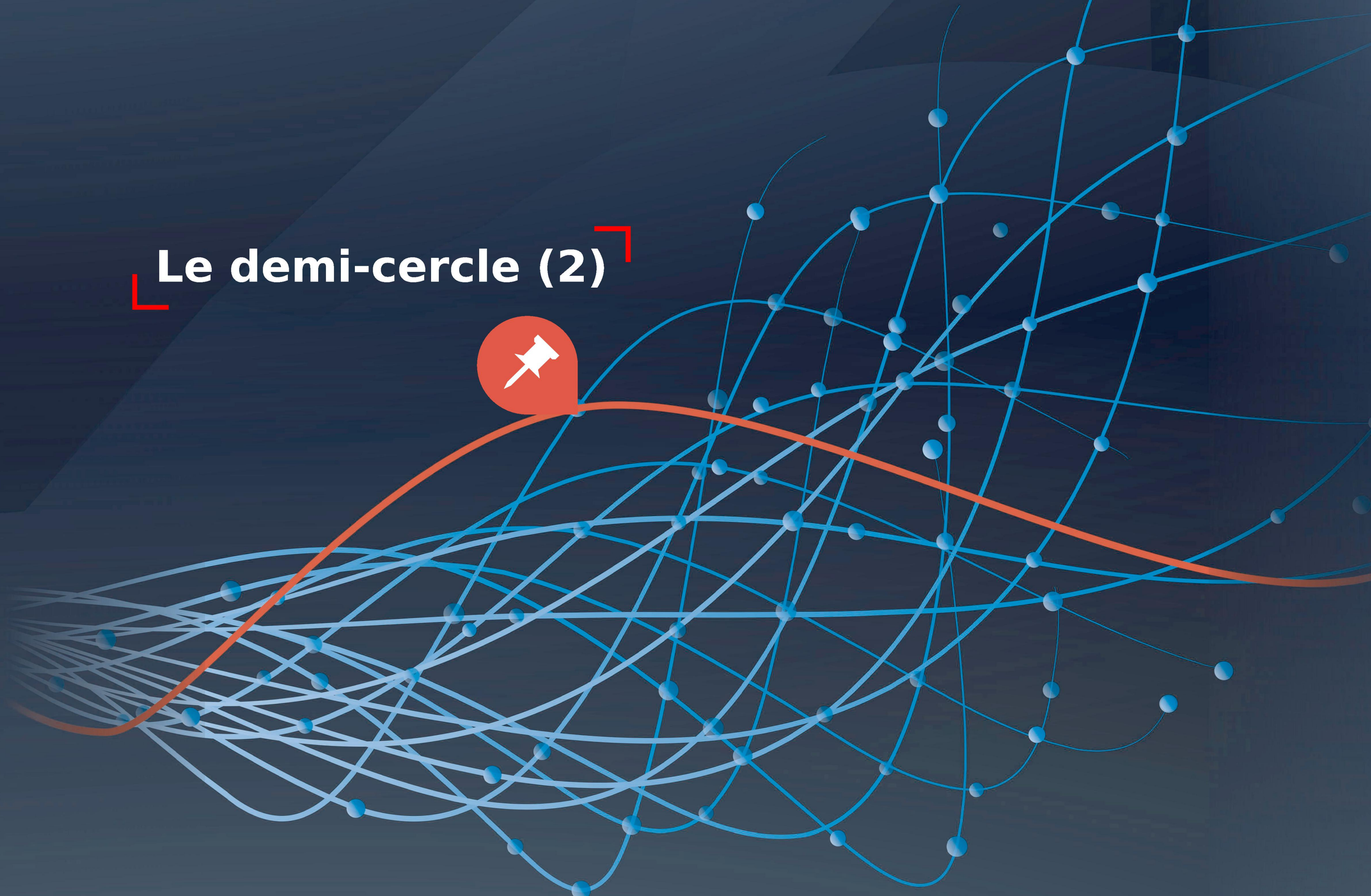
Le bulletin de l'APMEP - N^{o} 531

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2019

Le demi-cercle (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths.*
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX
Dépôt légal : Mars 2019
Impression : Imprimerie Corlet.
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

APMEP

Oui, les mathématiques peuvent surprendre !

L'intuition et le bon sens peuvent-ils suffire ? Dans cet article, l'auteur expose quatre situations qui montrent que ce n'est pas toujours le cas et que, fort heureusement, les mathématiques peuvent nous être utiles. . .

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Introduction

On a coutume de dire que l'apprentissage des mathématiques a pour but d'acquérir une rigueur du raisonnement, un esprit d'argumentation et de synthèse, un savoir-faire pour une utilisation des résultats et techniques apprises dans d'autres sciences telles que la physique, l'économie, l'informatique, etc. Cela est vrai [1]. **Mais les mathématiques sont aussi la puissance de ce qui est démontré** et qui s'impose à tous. . . Un collègue (du domaine de la mécanique) que j'écoutais lors d'une conférence disait qu'on pouvait tricher avec les lois de la République (à qui pensait-il ?) mais qu'on ne pouvait tricher avec les lois fondamentales de la dynamique. On peut transposer l'affirmation aux lois de l'arithmétique : 6 fois 7 fait 42, quelle que soit votre orientation politique, votre nationalité, votre statut social. . . Ne dit-on pas « c'est mathématique ! » lorsque l'on veut signifier, dans une discussion, que ce que l'on annonce ne peut être contesté ? Quant à l'expression familière « ce n'est pas mathématiquement fait », si chère aux journalistes sportifs, elle montre bien que tant qu'une possibilité existe, ce n'est pas son contraire, c'est-à-dire l'impossibilité de la chose, qui doit être clamée.

Mais les résultats de calculs mathématiques confortent-ils ce que l'intuition, le bon sens, des exemples analogues, etc. semblent indiquer ? Fort heureusement oui. Lors d'une conférence où j'exposais sur les stratégies optimales à adopter dans des sports où l'on a droit à deux essais dans les mises en jeu (comme au tennis, à la pelote à cesta punta [2], . . .) ([1]), je donnais comme exemple le cas d'un joueur de tennis disposant seulement de deux services, l'un fort et risqué, l'autre plus faible mais plus sûr ; la modélisation probabiliste (simple) que j'avais présentée donnait, par calculs, la stratégie optimale suivante : d'abord le service fort et risqué, puis, en cas d'échec, le plus faible mais plus sûr. Cela correspondait à ce qu'une réflexion logique indiquait et je concluais, satisfait, que les calculs mathématiques confortaient ce que tout le monde pensait. . . Alors une main se leva dans l'auditoire et la remarque fusa : « *Mais alors. . . pourquoi faire des mathématiques puisque la stratégie de service évoquée découlait du bon sens et était proposée par la très grande majorité ?* ». En effet. Mais ce n'est pas toujours le cas. Dans le texte présent, nous allons montrer à l'aide d'exemples simples, allant du niveau collège à celui de l'université, comment certains résultats sont contre-intuitifs, surprenants, difficiles à admettre même. . . et pourtant, ils sont vrais et irréfutables.

---

1. À ce sujet, on écoutera ou lira avec intérêt les deux avis récents suivants :
- Le philosophe et académicien Michel Serres et Michel Polacco parlent de l'inutile, ;
- « Pas d'avenir sans maths » par Patrice Caine, PDG du groupe Thales, .

2. Spécialité de pelote basque .

La TVA, avant ou après le rabais ?

Jonathan, élève au collège, accompagne ses parents qui vont acheter la voiture de leur rêve, la Mathix. Visite chez le premier concessionnaire. On évoque le prix de base, hors taxe (HT), qui est S (en euros par exemple)... mais, leur dit-on, il ne faut pas oublier d'ajouter la TVA qui est de 20 %, de manière à avoir le prix toutes taxes comprises (TTC). La négociation s'engage et, en fin de discussions, le vendeur est décidé à leur faire une réduction de 7 %, sur le prix hors taxe précise-t-il. Comme il faut faire jouer la concurrence, Jonathan et ses parents rendent visite à un deuxième concessionnaire, bien décidés à obtenir mieux que chez le premier. Le prix de base S est le même... On évoque inévitablement la réduction de 7 % sur le prix HT que leur a consentie le premier concessionnaire. Le deuxième concessionnaire assène alors un argument qui devrait emporter la décision : *« Oui mais moi, je vous fais la même réduction sur le prix TTC »*. Ah ! qui fait donc la meilleure offre, le premier ou le deuxième concessionnaire ? Posez la question autour de vous et vous verrez qu'une réponse rapide, sans réflexion certes, est : *« Le deuxième bien sûr »*.

La réponse est fausse, les deux offres sont strictement les mêmes... C'est le fait d'appliquer un rabais à une somme plus importante, dans le cas du deuxième concessionnaire, qui induit en erreur. Vérifions cela rapidement.

Pour le premier concessionnaire, le prix de vente proposé est
$$(S \times 0{,}93) \times 1{,}20\ ;$$
pour le deuxième, elle est de
$$(S \times 1{,}20) \times 0{,}93.$$
Dans le deuxième cas, la réduction s'applique certes à une plus grande somme, mais dans le premier cas, la dilatation par application du taux de TVA s'applique à une plus petite somme. Bref, les propriétés de la multiplication qui sont utilisées sont à la fois l'associativité et la commutativité.

L'élève cycliste pressé...

Jonathan, toujours lui, a décidé d'aller au collège en vélo ; le collège est à une distance d (en km) de son domicile. Il se fixe comme objectif de faire l'aller-retour à une vitesse moyenne de $20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Jonathan part le matin et, arrivé à son collège, son compteur — pardon une application sur son ordiphone — lui indique qu'il a parcouru le trajet à une vitesse moyenne de $10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Atch ! c'est un peu lent... Question : À quelle vitesse moyenne doit-il parcourir le chemin du retour pour être sûr d'atteindre l'objectif qu'il s'est fixé ? Posez la question autour de vous et vous verrez... Premier type de réponse : $30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$... Non, la moyenne de 10 et de 30 est bien 20, mais ça ne marche pas comme ça pour les vitesses. Autres tentatives : $35\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, ... Enfin une réponse plus sensée : *« Il faut qu'il aille plus vite qu'à l'aller ! »*. Bien sûr, mais ça ne répond pas à la question... La réponse — et c'est en cela que le résultat est surprenant — est : c'est impossible ! Que Jonathan revienne du collège chez lui à $100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, à la vitesse du son et ou à celle de la lumière, la vitesse moyenne sur l'aller-retour n'atteindra jamais $20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vos interlocuteurs sont dubitatifs... C'est là qu'il faut avoir recours à l'argument ultime : démontrons-le !

La vitesse V, la distance parcourue D, le temps de parcours T, sont trois variables[3] liées par l'équation simple $D = V \times T$. Faisons pour notre cas un rapide et facile calcul algébrique :

- à l'aller, $d = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \times T_{\text{aller}}$;
- Au retour, $d = V_{\text{retour}} \times T_{\text{retour}}$.

L'objectif assigné est :
$$2d = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \times (T_{\text{aller}} + T_{\text{retour}}).$$
Cela conduit à $\dfrac{d}{V_{\text{retour}}} = 0$ ou bien $T_{\text{retour}} = 0\ldots$

3. Ici comme ailleurs, les lettres indiquent les mesures en « l'unité qui convient » de la grandeur correspondante.

Surprenant ! Surprenant aussi que le résultat ne dépende pas de la distance d entre le domicile et le collège de Jonathan. Vos interlocuteurs sont ébahis. . . Pour enfoncer le clou, proposons-leur un exemple, avec $d = 10\,\text{km}$. L'aller-retour fait donc 20 km, et comme l'objectif visé est de parcourir cette distance à une vitesse moyenne de $20\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$, il faudra donc faire l'aller-retour en 1 heure. Mais l'aller (de 10 km) étant parcouru à une vitesse moyenne de $10\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$, le temps de parcours aller est déjà de 1 heure. . . Trop lent, trop tard, Jonathan ne rattrapera jamais son retard.

Un collègue, paisible retraité, à qui nous exposions ce petit problème nous répondit en disant : « *Il faut voir ça d'une manière graphique, les vitesses c'est comme les pentes de droites* ». Voici donc son explication géométrique, que l'on suggère de suivre sur la figure ci-dessous.

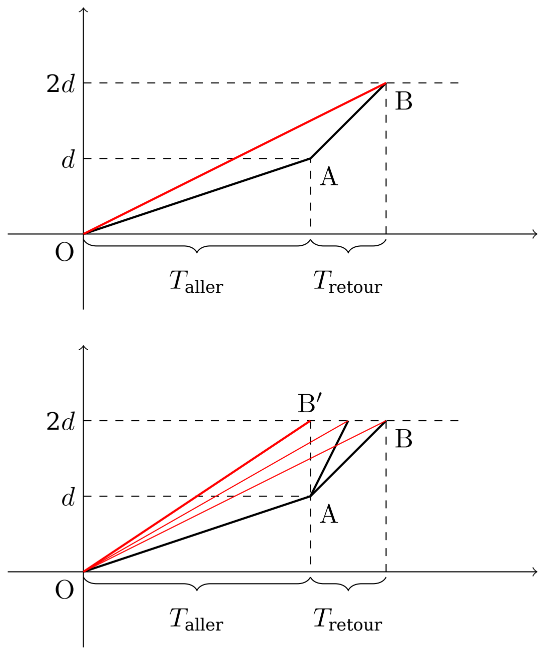


Figure 1

En abscisse figure le temps, en ordonnée la distance parcourue.

La pente (ou coefficient directeur) de la droite (OA) est V_{aller}, par exemple $10\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$; la relation $d = 10\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1} \times T_{\text{aller}}$ se lit clairement sur le graphique. De même, la pente de la droite (AB) est V_{retour} et, de nouveau, $d = V_{\text{retour}} \times T_{\text{retour}}$. La durée totale du parcours est $T_{\text{aller}} + T_{\text{retour}}$ et, encore, $2d = V_{\text{moyenne}} \times (T_{\text{aller}} + T_{\text{retour}})$, où V_{moyenne} désigne la vitesse moyenne sur la totalité du trajet aller-retour. Mais c'est qu'ici on voit très bien ce qu'est V_{moyenne} : c'est la pente de la droite (OB). Et si on veut que V_{moyenne} soit $20\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$, soit le double de la pente de (OA), il faudrait que B soit « poussé » en B', à la verticale de A, et donc la pente de (AB') (représentant V_{retour}) serait infinie !

Cet exemple est aussi l'occasion de faire toucher du doigt, si l'on peut dire, la notion d'asymptote, . . . c'est-à-dire l'inaccessible. En effet, avec les simples relations algébriques indiquées plus haut, on obtient la relation suivante entre V_{retour} et V_{moyenne} :

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{20\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1} \times V_{\text{retour}}}{10\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1} + V_{\text{retour}}} \quad \left(< 20\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}\right).$$

Ainsi, si V_{retour} est au maximum $40\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$ — pas si mal comme vitesse pour revenir en vélo du collège à la maison — la vitesse moyenne V_{moyenne} sur l'aller-retour sera de $16\,\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$.

Comment ça. . . on crée de la surface ?

Considérons un carré de 8 cm de côté, partagé en 4 morceaux comme l'indique la figure 2a ci-dessous ; la superficie totale du carré est de $64\,\text{cm}^2$. Nous redisposons ces 4 morceaux d'une manière différente, à la manière d'un puzzle, comme cela est indiqué dans la figure 2b. Nous conseillons au lecteur de le faire, comme nous l'avons fait nous-même, avec une feuille de carton découpée aux ciseaux.

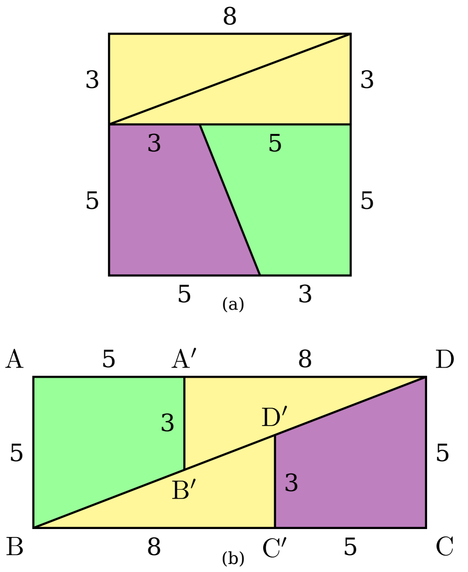


Figure 2

Atch ! que se passe-t-il ? Nous avons à présent un rectangle de côtés 5 cm et 8 cm + 5 cm = 13 cm, soit de superficie totale 65 cm^2. Nous aurions ainsi « créé » 1 cm^2 ? Très surprenant, il doit y avoir un truc... Mais quoi ? Les mathématiques sont là, sorte de règle d'esprit et du raisonnement, pour dire que cela n'est pas possible... Reste à trouver la faille dans notre construction. Et là notre bon vieux théorème de Thalès vient à la rescousse. Les deux segments concaténés $[\mathrm{BB}']$ et $[\mathrm{B}'\mathrm{D}]$ ne sont pas en ligne droite... En effet, s'ils l'étaient, le théorème de Thalès appliquée aux parallèles (AB) et $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$ du triangle supposé ABD nous indiquerait que $\dfrac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$ serait égal à $\dfrac{\mathrm{DA}'}{\mathrm{DA}} = \dfrac{8}{13} \approx 0{,}61\ldots$ Donc, $\mathrm{BB}'\mathrm{D}$ n'est pas un côté du triangle ABD ! De fait, la figure 3 montre un interstice de 1 cm^2 qui s'est faufilé entre les deux lignes légèrement brisées $\mathrm{BB}'\mathrm{D}$ et $\mathrm{BD}'\mathrm{D}$. Étonnant, non ?

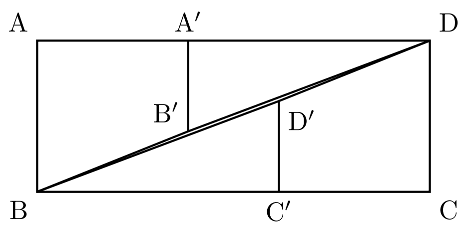


Figure 3

Comment se faire embobiner par le cercle...

Le cercle, objet mathématique « parfait » s'il en est, peut être la source de surprises même sur des questions simples. Nous en donnons ci-dessous deux exemples.

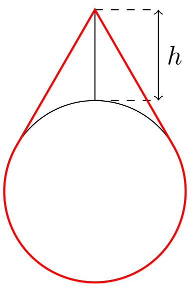
Allongeons le rayon...

Prenons une balle de ping-pong et la Terre, toutes deux assimilées à deux sphères parfaites, l'une de rayon 2 cm, l'autre de rayon 6 400 km... objets de tailles très différentes donc, puisque le facteur multiplicatif pour passer de l'un à l'autre est 32×10^7. Considérons une ficelle qui fait exactement le tour de ces objets, suivant un grand cercle. Nous savons, bien sûr, comment calculer la longueur de cette ficelle, elle est de 2π fois le rayon.

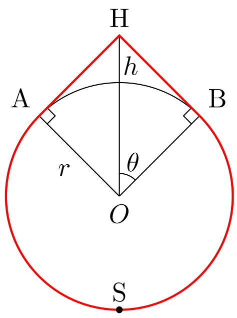
Considérons maintenant une ficelle qui fait le tour de ces objets en restant toujours à 1 m de la surface... Elle sera forcément plus longue. Mais pour quel objet, la balle de ping-pong ou la Terre, l'allongement sera-t-il le plus grand ? Posez la question autour de vous... et vous verrez qu'une réponse spontanée est : *« Pour la Terre bien sûr ! »*. Or, aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'en est rien : les deux ficelles ont été rallongées d'exactement la même longueur, de 6,283 m environ. En effet, du périmètre d'origine $2\pi r$ on est passé au périmètre $2\pi(r + 1\,\mathrm{m})$, soit un accroissement de 2π m. Étonnant, non ? Avoir donné les rayons respectifs de la balle de ping-pong et de la Terre n'a servi à rien, sinon à perturber, laissant penser qu'ils devaient intervenir dans les calculs.

Étirons à peine la circonférence...

On reprend l'exemple de la Terre assimilée à une sphère de rayon $r = 6\,400$ km. Une corde bien serrée l'entoure au niveau d'un plan passant par les deux pôles, lequel coupe la sphère en deux. Cette corde est longue, plus de 40 000 km. On allonge la corde de seulement 1 m. On tire ensuite la corde en un point : elle reste dans le plan méridien qui coupe la Terre en deux, mais est tendue de façon à décoller de la surface de la Terre au maximum : voir la figure 4a ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle, bien sûr). Question : de quelle hauteur h la corde décolle-t-elle ? Posez la question autour de vous et vous entendrez les réponses spontanées suivantes : « *Pratiquement rien… l'allongement de la corde ne représente que* $\dfrac{1}{(4\times 10^7)}$ *de la longueur initiale de la corde* », « *Très peu, de l'ordre de quelques* cm*…* ». Or, il n'en est rien… La réponse est surprenante, et seule une démonstration, en faisant le calcul effectif, permet de se convaincre du résultat. Le décollement h est de plus de 120 m !



(a)



(b)

Figure 4

Faisons les calculs précis, lesquels ne font intervenir que de simples considérations trigonométriques dans un triangle.

La figure 4b nous indique le calcul suivant : la longueur de la corde allongée est $\mathrm{AH}+\mathrm{HB}+\widehat{\mathrm{BSA}}$, où $\widehat{\mathrm{BSA}}$ est la longueur de l'arc de cercle passant par le sud S. Étant donné l'angle θ (en radians) provoqué par le décollement jusqu'à H (voir la figure), on a clairement :

$$\mathrm{AH} = \mathrm{HB} = r\tan(\theta)\ ;$$
$$\widehat{\mathrm{BSA}} = 2\pi r - 2\theta r.$$

Par construction,

$$\mathrm{AH}+\mathrm{HB}+\widehat{\mathrm{BSA}} = 2\pi r + 1\,\mathrm{m},\ \text{et } h + r = \frac{r}{\cos(\theta)}\cdot$$

On déduit des formules ci-dessus le procédé en deux étapes pour calculer h :

- résoudre l'équation $\tan(\theta) - \theta = \dfrac{1\,\mathrm{m}}{2r}$; la solution est notée θ^* ;
- calculer $\cos(\theta^*)$, puis $h = \dfrac{r}{\cos(\theta^*)} - r$.

Pour l'exemple qui nous concerne, $r = 6{,}4\cdot 10^6$ m. Un calcul numérique, avec `Xcas` en ligne par exemple, conduit à :

$$\theta = 0{,}006\,165\ \text{rad et } h = 121{,}644\,7\ \text{m}.$$

On peut aussi se permettre ici des approximations « raisonnables » des fonctions trigonométriques et rationnelles en jeu. En effet, avec le r qui est donné, la solution θ^* de l'équation $\tan(\theta) - \theta = \dfrac{1\,\mathrm{m}}{2r}$ sera forcément très petite. Il est donc licite d'utiliser les approximations polynomiales données par les développements de Taylor au voisinage de 0 :

$$\tan(\theta) - \theta \approx \frac{\theta^3}{3}\ ;$$
$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}\ ;$$
$$\frac{1}{\cos(\theta)} \approx 1 + \frac{\theta^2}{2}\cdot$$

Avec ce jeu d'approximations, on arrive à

$$h \approx \frac{r^{\frac{1}{3}}}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 121{,}644\,0\ \text{m},$$

ce qui n'est pas si mal, comparé au résultat numérique produit plus haut.

Généralisons ce qui précède. Si, au lieu de 1 m, on allonge la corde d'une longueur ℓ (en m), une bonne approximation du décollement $h(\ell)$ est

$$h(\ell) \approx \frac{r^{\frac{1}{3}}}{2}\left(\frac{3\ell}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (\mathscr{A})$$

On voit donc que le comportement de h comme fonction de ℓ est en $\ell^{\frac{2}{3}}$ mais que le facteur multiplicatif, faisant intervenir $r^{\frac{1}{3}}$, est important. C'est la raison de notre résultat surprenant.

Conclusion

À l'issue de l'exposé de ces quelques exemples simples, que l'on pourrait multiplier, notamment dans le domaine du calcul des probabilités, on voit comment notre intuition, notre bon sens, nos réactions par habitudes ou simple analogie, peuvent être contredites par les résultats d'un calcul mathématique. Les mathématiques sont là pour ça ; n'est vrai que ce qui est démontré, et non ce qui paraît intuitif ou est supputé. C'est précisément l'un des rôles de l'apprentissage mathématique que d'acquérir ce que d'autres ont appelé « l'hygiène d'esprit d'un citoyen ».

Remerciements

Je remercie les relecteurs ainsi que le référent qui s'est occupé de cet article ; leurs remarques ont permis d'améliorer la version initiale.

Les exemples présentés dans cette note n'ont pas prétention à l'originalité ; ils ont été collectés à la suite de lectures. Par exemple, je me suis aperçu, très récemment, que la question traitée au paragraphe *Comment ça... on crée de la surface ?* porte souvent le nom de puzzle ou paradoxe de Lewis Carroll. En fait, il remonte au moins à O. Schlömilch qui, dans un journal allemand de Maths et Physique, l'a publié en 1868 dans la rubrique « Communications plus petites » (nous l'avons vérifié). Il semble que ce paradoxe ait été retrouvé dans les papiers de Lewis Carroll après sa mort.

Un relecteur m'a signalé que l'exemple évoqué au paragraphe *Étirons à peine la circonférence...* figurait dans un livre d'A. Bellos (de 2016 ; traduction française de titre *« Le cercle des problèmes incongrus »*, publiée en 2018). En fait, cet exemple, sans doute fort ancien aussi, n'y est pas traité de manière complète comme ici ; seule la formule d'approximation ci-contre ($\mathscr{A}$) y est suggérée.

Référence

[1] J.-B. Hiriart-Urruty. « Stratégie optimale des mises en jeu à deux engagements. » In : *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)* (1981), pp. 830-833.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (*alias* JBHU) est professeur émérite à l'université Paul Sabatier de Toulouse. Son domaine de recherche est l'optimisation. Il a aussi publié de nombreux ouvrages mathématiques (de recherche ou pour l'enseignement). Il est également impliqué dans la diffusion des sciences et des mathématiques en particulier au travers de l'association *Fermat Science*.

jbhu@math.univ-toulouse.fr

Sommaire du nº 531

Le demi-cercle (2)

Éditorial 1

Opinions 3

À la recherche des mathématiques disparues. . . — Alice Ernoult 3

Manipuler en mathématiques. . . oui mais — Joël Briand 6

Avec les élèves 10

M@ths en–vie — Carole Cortay et Christophe Gilger 10

Les Devoirs Maison, formation plutôt qu'évaluation — Antoine Laniray 16

Quelques bricolages pour le cercle trigonométrique — Olivier Longuet 20

Escape Game, des révisions revisitées — Fabien Aoustin 26

Atelier Math et anamorphoses — Mireille Génin 32

Ouvertures 38

Des cercles sur des surfaces ? — Robert Ferréol 38

Décupler les angles — Serge Cantat 45

Haïku — Richard Cauche 51

Oui, les mathématiques peuvent surprendre ! — Jean-Baptiste Hiriart-Urruty 52

Tournez méninges — Karim Zayana 58

Du bon usage de l'algèbre en histoire du calcul — Jérôme Gavin et Alain Schärlig 62

Le *Grand Rampant* — Claudie Asselain-Missenard 66

Colonies de vacances — Vincent Bansaye 69

Récréations 71

De surprenantes arithmétiques (II) — André-Jean Glière 71

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 77

Au fil du temps 79

Un π-nacle des mathématiques — Henrique Vilas Boas 79

Matériaux pour une documentation 82

Anniversaires — Dominique Cambrésy 85

In memoriam Éric Trotoux — Pierre Ageron 87

Les équerres d'Arenas — Bernard Parzysz 89

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr