

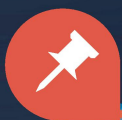
Le bulletin de l'APMEP - N° 531

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2019

Le demi-cercle (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Alice ERNOULT.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, Marie-Astrid BÉZARD, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Vincent PANTALONI, Daniel VAGOST, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLEMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX

Dépôt légal : Mars 2019

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297



Des cercles sur des surfaces ?

Chacun connaît le cercle d'Euclide, bien rond, bien lisse, bien convexe, avec son centre et son rayon.

Robert Ferréol nous propose de découvrir des cercles exotiques mais cependant très proches, ayant plusieurs centres ou rayons, éventuellement tangents à eux-mêmes, voire même avec plusieurs composantes connexes.

Robert Ferréol

Comment définir, et réaliser, un cercle sur une surface quelconque ?

Deux définitions

Nous allons voir que les définitions du cercle auxquelles nous sommes habitués dans le plan peuvent conduire sur des surfaces dans l'espace à des réalisations distinctes !

Éliminons tout d'abord la définition du tracé avec un compas : si on plante la pointe du compas en un point de la surface, il faut déjà, pour tracer un « cercle », que la deuxième branche du compas ne rencontre pas la surface ; et si c'est le cas, on obtient l'ensemble des points de la surface situés à une distance en *ligne droite* de la pointe ; autrement dit l'intersection d'une sphère centrée sur la surface avec cette surface. L'étude des intersections sphère-surface est certes très intéressante, mais nous aimerions nous occuper des cercles vus par des habitants de la surface qui, comme nous sur la terre, seraient suffisamment petits pour ne pas voir que leur surface est courbe. . .

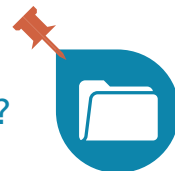
La définition scolaire (et pas du tout naturelle chez les élèves !) du cercle est : « ensemble des points situés à même distance d'un centre ». On peut la transposer sur une surface, à condition de prendre comme distance la distance géodésique, c'est-à-dire la longueur du plus court chemin inclus dans la surface (ce chemin s'appelle une géodésique) : ce sera notre « définition 1 ». Concrètement, pour obtenir une géodésique ; on tend un fil entre deux points en l'appliquant sur la surface (mais ceci ne fonctionne que si la surface est toujours située du même côté du plan tangent, comme par exemple un ellipsoïde).

Plus mathématiquement, une géodésique est une courbe dont le plan osculateur¹ contient la normale² à la surface.

L'autre définition, qui sera plus naturelle pour les habitants de la surface, est celle d'une *courbe à courbure constante* (dans un véhicule parcourant la surface en bloquant le volant, on avance en tournant régulièrement vers la droite, ou la gauche.). Mais quelle est la définition de cette

1. Plan osculateur à une courbe dans l'espace : limite, lorsque t tend vers t_0 , du plan $P(t; t_0)$ passant par le point de paramètre t et contenant la tangente à la courbe en t_0 ; intuitivement c'est le meilleur plan épousant la courbe. Cinématiquement, il est défini par le vecteur vitesse et le vecteur accélération.

2. Normale en un point d'une surface : droite perpendiculaire au plan tangent passant par le point.



courbure, dite « courbure géodésique », pour une courbe tracée sur une surface ?

En un point donné, ce sera l'inverse du rayon de la meilleure sphère épousant la courbe, centrée dans le plan tangent à cette courbe. Mais quelle est cette meilleure sphère ? On démontre que c'est la sphère centrée dans le plan tangent à la surface qui contient le cercle osculateur³ à la courbe. Son centre (centre de courbure géodésique) se projette donc dans le plan osculateur à la courbe en le centre de courbure (voir la figure 1).

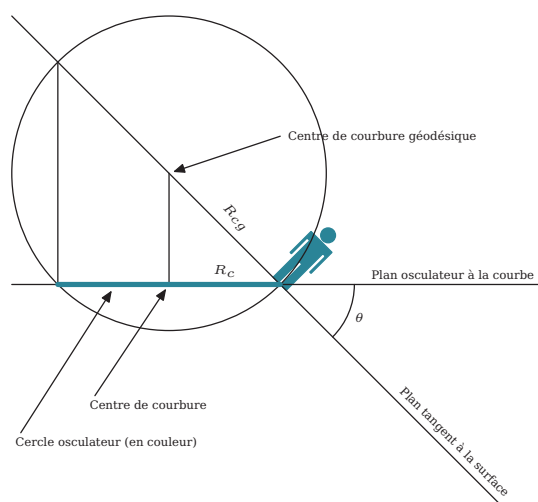


Figure 1. Vue en coupe dans le plan perpendiculaire à la tangente en un point de la courbe.

Le rayon de courbure R_c et le rayon de courbure géodésique R_{cg} (vu par les habitants de la surface) sont donc reliés par la relation

$$R_{cg} = \frac{R_c}{\cos(\theta)}$$

où θ est l'angle entre le plan osculateur à la courbe et le plan tangent à la surface. En prenant les inverses, la courbure γ et la courbure géodésique γ_g sont reliées par $\gamma_g = \gamma \cos(\theta)$. Prenons un exemple extrême : l'équateur de la terre (ou plus généralement d'un grand cercle d'une sphère). Le cercle osculateur à l'équateur est

l'équateur lui-même. Les habitants de l'équateur ont un plan tangent (à la sphère terre) qui est perpendiculaire au plan de l'équateur, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$ et ils voient donc l'équateur avec une courbure nulle ; la courbure réelle de l'équateur est non nulle (c'est l'inverse du rayon de la terre), mais sa courbure géodésique est nulle ; d'ailleurs si une route suit l'équateur, ne sera-t-elle pas rectiligne ?

La sphère

Commençons justement par la sphère. C'est le seul cas où les cercles géodésiques sont des cercles « normaux » ; mais on va voir qu'ils ont 4 rayons possibles ! Considérons le cercle parallèle de colatitude θ d'une sphère de rayon a (voir la figure 2) ; en tant que cercle « normal » il a pour rayon $a \sin(\theta)$. Avec la définition 1, il a deux centres, les pôles nord et sud N et S , et donc deux rayons $a\theta$ et $a(\pi - \theta)$. Avec la définition 2, son centre Ω est le point du plan tangent à la sphère en un point M du cercle qui se projette sur le plan du cercle au centre « normal » de ce cercle, et son rayon est donc $a \tan(\theta)$.

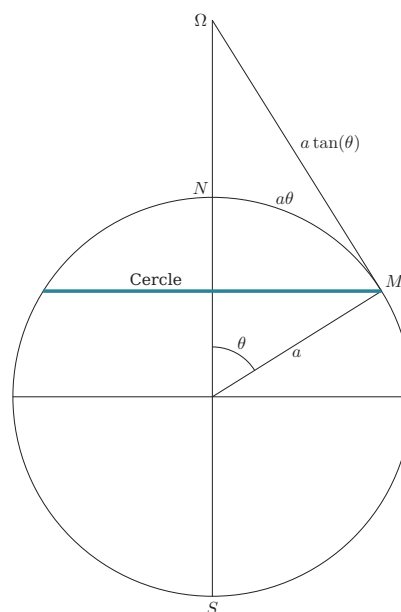


Figure 2. Cas de la sphère.

3. Cercle osculateur (ou « de courbure ») à une courbe de l'espace en un point de paramètre t_0 : limite, lorsque t tend vers t_0 , du cercle passant par les points de paramètre t et t_0 et tangent à la courbe en t_0 (cercle situé dans le plan $P(t; t_0)$ ci-dessus) ; inclus dans le plan osculateur, c'est intuitivement le meilleur cercle épousant la courbe. Son rayon est le rayon de courbure, et l'inverse de ce rayon, la courbure.



L'équateur, qui a donc a pour rayon habituel, a donc $\frac{\pi}{2}a$ pour rayon avec la définition 1, et ∞ avec la définition 2 (c'est une géodésique, comme on l'a vu plus haut).

Les cylindres

Une catégorie de surfaces où les cercles géodésiques sont faciles à déterminer est formée par les cylindres, pas seulement de révolution. Si vous prenez une feuille de papier cartonné rectangulaire où est tracé un cercle, la posez verticalement sur une table, et forcez la base à suivre une courbe donnée, le cercle courbé tracé sur la feuille sera un cercle géodésique de la feuille-cylindre. Simple à faire avec du carton, moins simple mathématiquement !

Pour que les distances soient conservées dans le cylindre, il faut paramétrer la courbe de base par son abscisse curviligne

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases}$$

et dans le cylindre

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = z \end{cases}$$

les points sont repérés par leurs coordonnées dites « géodésiques » s et z . Pour obtenir un cercle géodésique de centre $(0; 0; 0)$ et de rayon r , il suffit de poser $s = r \cos(\theta)$, $z = r \sin(\theta)$, d'où la paramétrisation de ce cercle (r fixé, t variable) :

$$\begin{cases} x = f(r \cos(\theta)) \\ y = g(r \cos(\theta)) \\ z = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

Par exemple, pour le cylindre de révolution de rayon a , on a $f(s) = a \cos\left(\frac{s}{a}\right)$, $g(s) = a \sin\left(\frac{s}{a}\right)$

d'où la paramétrisation du cercle géodésique :

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{r}{a} \cos(\theta)\right) \\ y = a \sin\left(\frac{r}{a} \cos(\theta)\right) \\ z = r \sin(\theta) \end{cases}$$

La figure 3 a été obtenue en demandant à Maple® de tracer la surface paramétrée en u et v :

$$\begin{cases} x = \cos(u \cos(v)) \\ y = \sin(u \cos(v)) \\ z = u \sin(v) \end{cases}$$

en faisant apparaître les lignes obtenues à u et v constants. On voit alors bien apparaître les cercles géodésiques centrés en O ainsi que les géodésiques issues de O .

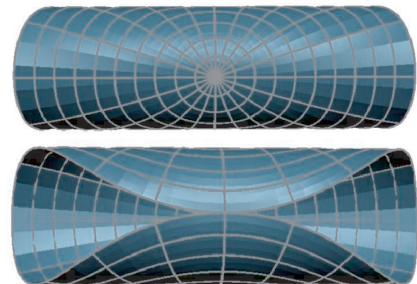


Figure 3. Cercles géodésiques et géodésiques.

Dès que le diamètre du cercle géodésique est supérieur à la circonférence du cylindre, le « cercle » se recoupe lui-même, et arrive même un moment où il passe par son centre (figure 4) !

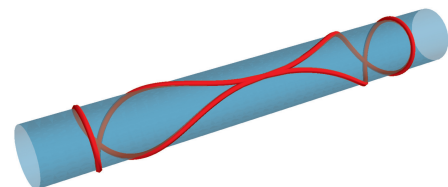
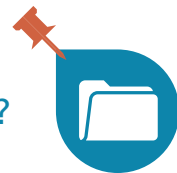


Figure 4. Cercle géodésique sur un cylindre.

Malheureusement peu de courbes ont une abscisse curviligne qui se calcule à l'aide des fonctions usuelles... J'aurais aimé tracer des cercles sur un cylindre de base une sinusoïde, mais



comme son abscisse curviligne n'est pas sympathique, vous aurez droit à un cylindre de base une arche de cycloïde (figure 5).

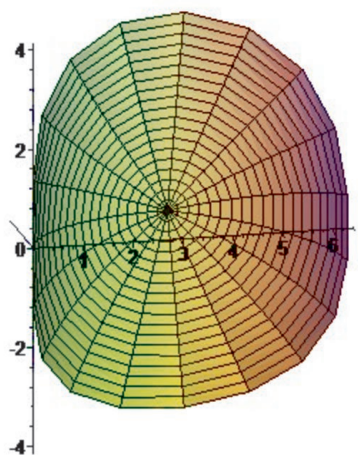


Figure 5. Cercle géodésique sur un cylindre de base une arche de cycloïde.

Tous calculs faits, la surface est paramétrée en u et v par :

$$\begin{cases} x = \arccos(u \cos v) - u \cos(v \sqrt{1 - u^2 \cos^2 v}) \\ y = 1 - u^2 \cos^2 v \\ z = 2u \sin v \end{cases}$$

Les surfaces développables

Les cylindres, avec les cônes, sont des cas particuliers de surfaces dites « développables », des surfaces réglées⁴ telles que le plan tangent est toujours le même le long d'une génératrice.

Lorsqu'on les pose sur un plan, elles peuvent rouler sans glisser sur ce plan, et les cercles géodésiques (par la définition 1 ou la définition 2) sont les courbes dont la trace sur le plan est un cercle habituel.

Voici la paramétrisation du cercle géodésique de rayon r , de centre situé à une distance a du sommet d'un cône de demi-angle au sommet α (variable t) :

4. Surface réglée : qui est réunion de droites (les génératrices).

$$\begin{cases} x = |a + r e^{it}| \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\arg(a + r e^{it})}{\sin(\alpha)}\right) \\ y = |a + r e^{it}| \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\arg(a + r e^{it})}{\sin(\alpha)}\right) ; \\ z = |a + r e^{it}| \cos(\alpha) \end{cases}$$

la figure 6 a été tracée par Alain Esculier à partir de cette formule à l'aide du logiciel Povray.

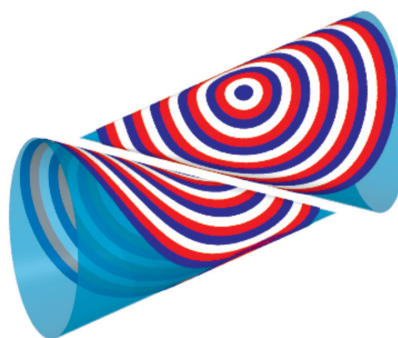


Figure 6. Cercles sur un cône.

Mais vous pouvez courber une feuille de papier cartonné (sans pli) de sorte qu'elle ne soit ni un cylindre, ni un cône. Les cercles que vous aurez tracés au préalable seront des cercles géodésiques de cette surface développable.

C'est ce que j'ai fait avec ces dessous d'assiettes rapportés du Mexique (figure 7) !



Figure 7

Dans les exemples précédents, on sous-entendait l'existence d'un plan tangent en tout point. Mais on peut aussi tracer des cercles sur des polyèdres. Pour des cercles de rayon pas trop grand, on peut



développer l'un de leurs patrons, tracer un cercle et reconstituer le polyèdre. Voici par exemple, des cercles géodésiques centrés au sommet d'un cube dont on remarque qu'ils ont une longueur égale au $\frac{3}{4}$ de leur longueur habituelle, en tous cas tant que le rayon est inférieur au côté du cube (figure 8).

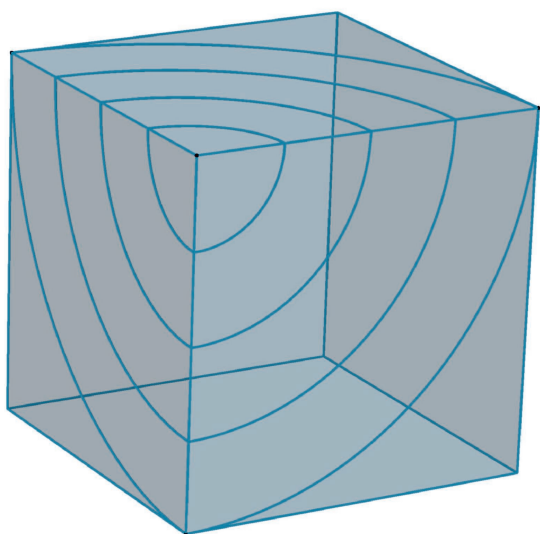


Figure 8. Cercles sur un cube.

Pour des cercles de rayons plus grands ou centrés en un point quelconque du cube, cela se complique nettement avec des possibilités de « cercles » de même centre qui se croisent ou qui ne se ferment pas. Si des lecteurs veulent étudier la question, il y aura une synthèse des résultats dans le prochain numéro...

Les surfaces à courbure totale constante

Quelques points théoriques :

1. D'après le théorème dit « de Meusnier », les surfaces présentent en chaque point deux cercles de courbure⁵ principaux orthogonaux indiquant chacun les extremums γ_1 et γ_2 de la courbure des sections normales de la surface. La courbure totale est alors le produit $\gamma_1 \gamma_2$.

5. Cercles de courbure en un point d'une surface : cercles de courbure des sections de la surface par des plans contenant la normale à la surface. La normale étant orientée, leur rayon peut être positif ou négatif, et les courbures correspondantes également.

2. Une surface est dite *applicable* sur une autre si pour tout point de la première il existe une bijection d'un voisinage de ce point (dans la surface) sur une partie de la deuxième qui conserve la distance géodésique.
3. Beltrami a montré en 1868 que les surfaces à courbure totale constante donnée sont applicables entre elles (et en particulier à une sphère si la courbure est strictement positive, à une pseudo-sphère (voir plus loin) si elle est strictement négative, et à un plan si elle est nulle).
4. Whittemore a démontré en 1901 que les deux définitions des cercles géodésiques coïncident pour les surfaces à courbure totale constante.

On en déduit que les cercles géodésiques des surfaces à courbure totale constante sont les courbes qui deviennent des cercles classiques quand on applique la surface à :

- un plan quand la courbure totale est nulle (surfaces développables déjà considérées) ;
- une sphère de rayon R quand la courbure totale est $\frac{1}{R^2}$;
- une pseudo-sphère de pseudo-rayon R quand la courbure totale est $-\frac{1}{R^2}$.

La pseudo-sphère a été définie par Beltrami en 1868 dans sa recherche d'une surface à courbure totale constante négative simple : c'est en effet la seule surface de révolution à courbure totale constante négative dont la paramétrisation fait intervenir les fonctions usuelles. Voir plus de détails sur [▶](#).

Voici une figure qui a été réalisée par Yves Martin à l'aide du logiciel CarMetal, montrant un triangle formé de segments de géodésiques (en bleu), avec son cercle circonscrit (en rouge), tracés sur la pseudo-sphère (figure 9 ; [▶](#)).

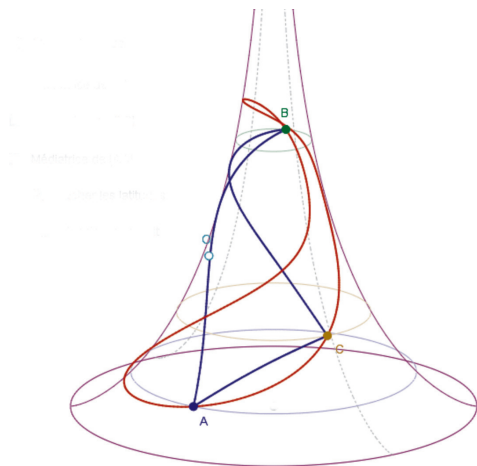
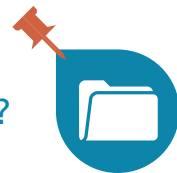


Figure 9

Contre-exemples à l'équivalence des définitions 1 et 2

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x; y) = ((x-1)^2 + y^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 - 1);$$

on aura compris qu'elle a été définie pour que la surface associée d'équation $z = f(x; y)$ contienne dans le plan $z = 0$ les deux cercles horizontaux de centre $(\pm 1; 0; 0)$ et de rayon 1 (figure 10). Attention, un seul cercle n'aurait pas fourni de contre-exemple, car les cercles parallèles d'une surface de révolution sont bien des cercles géodésiques...

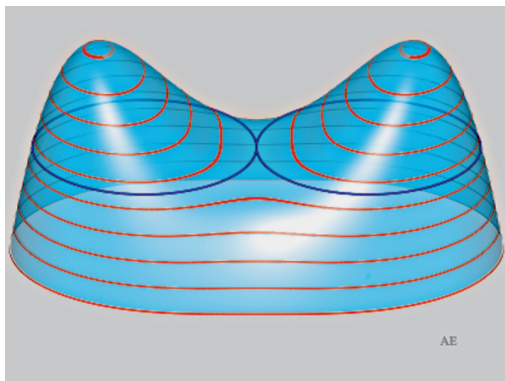


Figure 10. Les cercles sont en bleu, les lignes rouges sont des lignes de niveau.

Ces deux cercles ont une courbure constante (par définition !) mais n'ont pas une courbure géodé-

sique constante puisque le plan tangent ne fait pas un angle constant avec le plan des cercles (visuellement, et par le calcul) : la définition 2 n'est donc pas vérifiée.

Visuellement la définition 1 n'est pas vérifiée, mais Robert March l'a montré par la méthode suivante. Il a modélisé la surface avec le logiciel Rhinocéros et tracé la section du mamelon par le plan de symétrie ; cette section est une géodésique et si le cercle vérifiait la définition 1, son « centre » serait au milieu de cette géodésique. Il a donc tracé les géodésiques issues de ce point, et a vérifié qu'elles n'étaient pas de longueur constante (figure 11).

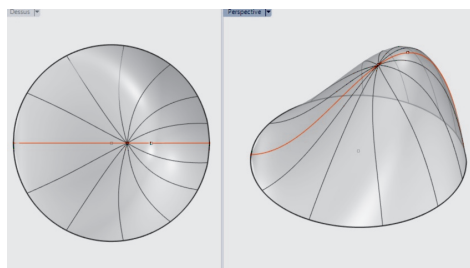


Figure 11

Donc déjà, un cercle n'a donc aucune raison d'être un cercle géodésique.

Maintenant, élevons la fonction f au carré de sorte que le plan tangent soit horizontal le long des cercles (figure 12).

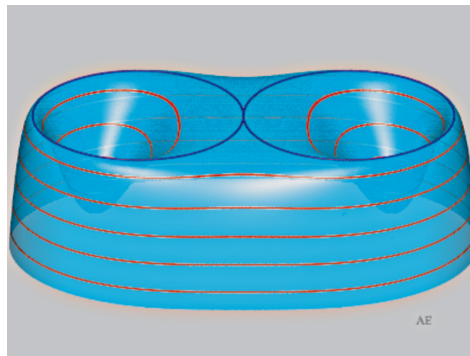


Figure 12

Le plan tangent fait cette fois un angle constant (nul) avec le plan des cercles, donc ce sont des cercles géodésiques pour la définition 2, et de



la même façon que plus haut, pas pour la définition 1... Le contre-exemple où la définition 1 est réalisée et non la 2 nous sera donné par le paraboloïde hyperbolique équilatère $z = xy$. Sont tracées sur les figures 13 et 14, les géodésiques issues de O et les points à distance géodésique données de O , figurant les cercles géodésiques de la définition 1.

On constate par le calcul que la courbure géodésique n'est pas constante le long de ces « cercles », et que donc la définition 2 n'est pas réalisée.

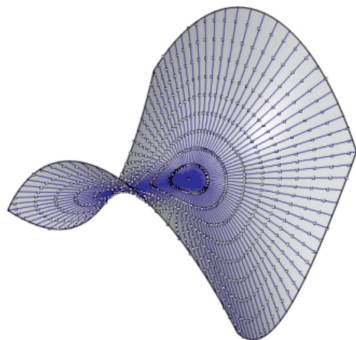


Figure 13. Vue en perspective du paraboloïde hyperbolique avec les géodésiques issues du col, et des points à distance géodésique donnée depuis le col. Cela visualise des cercles géodésiques pour la définition 1 mais pas la 2.

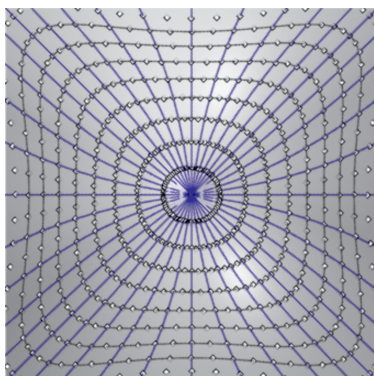


Figure 14

D'ailleurs, en relisant la démonstration de Whittemore, je me suis persuadé que la condition de constance de la courbure totale est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait l'équivalence entre les définitions 1 et 2. Les surfaces à courbure constante étant en fait assez rares, on peut dire qu'en général, sur une surface quelconque, si on avance en bifurquant à gauche ou à

droite d'un angle constant, il n'existera pas forcément un point situé à distance (géodésique) constante durant notre parcours. Ou qu'inversement si on trace une courbe en tendant un fil planté en un point fixe, la courbure (géodésique) ne sera pas constante...

Voir aussi les notations sur les surfaces sur le site [mathcurve](http://mathcurve.com) .

Références

- [1] Georges Valiron. *Équations fonctionnelles et applications*. Paris : Masson, 1950.
- [2] Wikipédia. *Courbes gauches*. .
- [3] Wikipédia. *Plan osculateur*. .
- [4] Wikipédia. *Cercle osculateur*. .
- [5] Wikipédia. *Repère de Frénet*. .
- [6] J. K. Whittemore. « A Note on Geodesic Circles ». In : *Annals of Mathematics* 3.1/4 (1901). , pp. 21-24.



Robert Ferréol est un jeune retraité, ayant enseigné les mathématiques en CPGE, passionné de géométrie et lauréat du prix Anatole Decerf en 2008 pour son site sur les courbes et les surfaces remarquables mathcurve.com.

ferreol@mathcurve.com



Sommaire du n° 531

Le demi-cercle (2)

Éditorial

Opinions

À la recherche des mathématiques disparues...
— Alice Ernoult

Manipuler en mathématiques... oui mais — Joël Briand

Avec les élèves

M@ths en-vie — Carole Cortay et Christophe Gilger

Les Devoirs Maison, formation plutôt qu'évaluation
— Antoine Laniray

✦ Quelques bricolages pour le cercle trigonométrique
— Olivier Longuet

Escape Game, des révisions revisitées — Fabien Aoustin

Atelier Math et anamorphoses — Mireille Génin

Ouvertures

✦ Des cercles sur des surfaces ? — Robert Ferréol

✦ Décupler les angles — Serge Cantat

1 ✦ Haïku — Richard Cauche 51

3 Oui, les mathématiques peuvent surprendre !
— Jean-Baptiste Hiriart-Urruty 52

✦ 3 Tournez méninges — Karim Zayana 58

6 Du bon usage de l'algèbre en histoire du calcul
— Jérôme Gavin et Alain Schärli 62

✦ 6 Le *Grand Rampant* — Claudie Asselain-Missenard 66

10 Colonies de vacances — Vincent Bansaye 69

Récréations 71

De surprenantes arithmétiques (II) — André-Jean Glière 71

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 77

Au fil du temps 79

✦ Un π -nacle des mathématiques — Henrique Vilas Boas 79

Matériaux pour une documentation 82

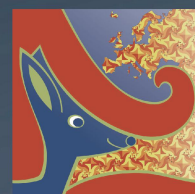
Anniversaires — Dominique Cambrésy 85

In memoriam Éric Trotoux — Pierre Ageron 87

Les équerres d'Arenas — Bernard Parzysz 89



CultureMATH



APMEP
www.apmep.fr