

Le bulletin de l'APMEP - N° 532

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2019

**Les maths à portée de main**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



**Au fil des maths**, c'est aussi une revue numérique augmentée :  
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

À ce numéro est joint le BGV  
n° 206 spécial « Journées Nationales ».

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directrice de publication** : Alice ERNOULT.

**Responsable coordinatrice de l'équipe** : Lise MALRIEU.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, Marie-Astrid BÉZARD, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Vincent PANTALONI, Daniel VAGOST, Christine ZELTY .

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLEMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Adrien GUINEMER, Christophe ROMERO, Jacques VALLOIS .

**Illustrateurs** : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET .

**Équipe TFXnique** : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET .

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX

Dépôt légal : Juin 2019

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

# Vers la trigonométrie

*Henry Plane nous propose un bref survol historique sur les origines de la trigonométrie. Nous pourrions découvrir que des notions aujourd'hui équivalentes n'ont pas toujours, au même moment, joué le même rôle.*

## Henry Plane

On chercherait en vain le mot « trigonométrie » dans les traductions françaises de ce qui fut appelé « Géométrie d'Euclide », que ce soit celle réputée la plus ancienne imprimée (vers 1613) de Didier Dounot, celle que Pascal aurait lue en cachette de son père ou celle plus documentée de Peyrard (1819).

En effet, si cette géométrie construit des figures et étudie des rapports, elle ne cherche pas, connaissant trois éléments convenables déterminant un triangle et les ayant mesurés, comment calculer les mesures des trois autres. Cela était la tâche soit des astronomes — le triangle était sphérique — soit de ceux que les latins nommaient « *agrimensores* », arpenteurs, qui se voyaient confier cette tâche par des services de génie civil (cadastre) ou militaire.

Un premier problème se posait alors, lorsque les gens de cette science commencèrent à pratiquer, fin XVI<sup>e</sup> siècle et surtout au XVII<sup>e</sup> siècle, les calculs en système décimal. Les mesures d'arcs en système hérité de Babylone s'adaptaient assez facilement :

- 1 degré = 60 minutes ;
- 0,1 degré = 6 minutes ( $0,1^\circ = 6'$ ) ;
- 1 minute = 60 secondes ;
- 0,01 degré = 36 secondes ( $0,01^\circ = 36''$ ) ;

en revanche, il n'en allait pas de même pour les longueurs (il faudra attendre 1790 pour la création du système métrique et même 1840 pour que l'usage de celui-ci se répande) :

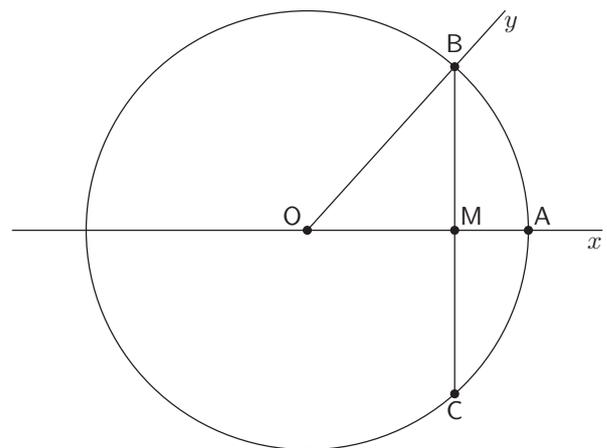
- 1 toise = 6 pieds ; 1 pied = 12 pouces ;

1 pouce = 12 lignes ;

0,1 toise = 7 pouces 2 lignes et  $\frac{2}{5}$  ligne... .

Toutefois le nombre des utilisateurs du calcul décimal ne va cesser de croître, en particulier pour ceux qui furent conduits à pratiquer ce qui fut d'abord la... triangulométrie.

Le problème de base est d'établir le lien entre arc et corde le sous-tendant, et de trouver un procédé fiable pour les mesurer. Il n'est pas défendu de penser que des premières tables furent empiriques, fruits de l'expérience, mais rapidement la géométrie apporta la rigueur par le jeu des polygones réguliers inscrits dans un cercle. Une figure joua alors un rôle primordial :



À l'angle  $\widehat{xOy}$  ou à l'arc  $\widehat{AB}$  correspondant, est associé le segment [BM] sur l'orthogonale à (OA) menée par B et qui recoupe le cercle en C.

(OA) est médiatrice de [BC],  $BC = 2BM$  et l'arc  $\widehat{BC}$  vaut deux fois l'arc  $\widehat{BA}$ .

On retint : BM moitié de la corde sous-tendant l'arc double de l'arc  $\widehat{BA}$ .

Pourquoi la longueur de [BM] reçut-elle le nom de sinus de l'angle  $\widehat{xOy}$  ou de l'arc  $\widehat{AB}$  ?

De la Caille, membre de nombreuses académies des sciences (Paris, Berlin, Saint Petersburg) et très impliqué dans des travaux d'astronomie et de géodésie (mesure d'un degré de méridien au Cap) nous en donne une explication dans ses « *Leçons de géométrie* » (1741).

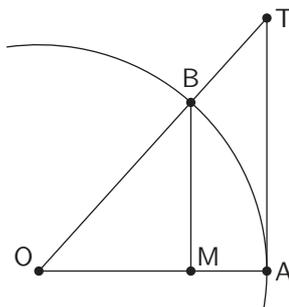
Pour être en état d'en juger, il faut connoître un peu à fond la théorie des *Sinus*. Or par Sinus on entend certaines lignes calculées en parties du rayon du cercle dans lequel on suppose que le triangle à résoudre est inscrit.

Ces lignes, comme on va le voir tout-à-l'heure, sont des moitiés de cordes de ce même cercle; & comme les cordes s'appelloient autrefois *inscripta*, on désigna leurs moitiés par ces deux mots, *femisses inscripta*. Dans la suite on écrivit, dit-on, *f. inf.* afin d'abrégier; & on finit par prononcer *Sinus*, dans le temps où la plupart des mots se terminoient en *us*.

On notera qu'en espagnol cette ligne est appelée « *seno* » et qu'il est écrit  $\widehat{\text{sen}}(\widehat{AOB})$ .

En anglais on écrit  $\widehat{\text{sin}}(\widehat{AOB})$  mais il s'agit de l'abréviation de  $\widehat{\text{sine}}(\widehat{AOB})$ , bien distinct du « *sinus* » qui désigne encore aujourd'hui la cavité de l'os frontal.

Dès la fin du XVI<sup>e</sup> siècle, ce sont les polygones réguliers inscrits dans le cercle qui font le lien entre mesures de l'arc et de la corde. Cela va donner naissance à tout un vocabulaire, des notations et des méthodes de calcul qui ne sont encore qu'une sorte de triangulométrie.



On précisera :

- MB : sinus droit;
- MA : sinus verse;
- AT : tangente;
- OT : sécante

pour la mesure des segments correspondants, le rayon OA étant pris pour unité.

Mais les calculs sont lourds. On peut en juger par l'extrait suivant de formulaire :

$$\begin{aligned} \widehat{\text{sin}} 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \widehat{\text{sin}} 33^\circ &= \frac{\sqrt{3+1}}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5-1}) + \frac{\sqrt{3-1}}{8}\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ \widehat{\text{sin}} 36^\circ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{5-5} \\ \widehat{\text{sin}} 39^\circ &= \frac{\sqrt{5+1}}{8\sqrt{2}}\sqrt{5+1} - \frac{\sqrt{3-1}}{8}\sqrt{5-\sqrt{5}} \\ \widehat{\text{sin}} 42^\circ &= -\frac{1}{8}(\sqrt{5-1}) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ \widehat{\text{sin}} 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pour obtenir une valeur approchée de ces lignes, il ne faut pas oublier que, en système décimal, le calcul d'une racine carrée demande de partir d'un nombre connu avec le double de décimales de celui du nombre attendu.

C'est pourquoi l'arrivée des logarithmes, en particulier ceux de Neper (John Napier, 1614), la publication de tables de logarithmes décimaux (Henry Briggs) et, surtout celles ainsi calculées, des lignes trigonométriques (Gunther, 1620) vont faciliter la tâche.

C'est alors qu'Henrion, qui a déjà donné en 1615 une traduction française des « *Quinze livres de la géométrie d'Euclide* », publiée en 1623, à l'intention des officiers du roi, des « *Mémoires mathématiques* » contenant une « *table des sinus, tangentes et sécantes* » de minute en minute d'arc.

TABLE DES									
30	Sinus		Tangentes		Secantes				
30	50754	86163	58905	169766	116059	197029	30		
31	50779	86148	58944	169653	116079	196932	29		
32	50804	86133	58983	169541	116099	196835	28		
33	50829	86119	59022	169428	116119	196738	27		
34	50854	86104	59061	169315	116139	196641	26		
35	50879	86089	59101	169203	116159	196544	25		
36	50904	86074	59140	169091	116179	196448	24		
37	50929	86059	59179	168979	116199	196351	23		
38	50954	86045	59218	168866	116219	196255	22		
39	50979	86030	59258	168754	116239	196158	21		
40	51004	86015	59297	168643	116259	196062	20		
41	51029	86000	59336	168531	116279	195966	19		
42	51054	85985	59376	168419	116299	195870	18		
43	51079	85970	59415	168308	116319	195774	17		
44	51104	85956	59454	168196	116339	195678	16		
45	51129	85941	59494	168085	116359	195583	15		
46	51154	85926	59533	167974	116380	195487	14		
47	51179	85911	59573	167863	116400	195391	13		
48	51204	85896	59612	167752	116420	195296	12		
49	51229	85881	59651	167641	116440	195201	11		
50	51254	85866	59691	167530	116460	195106	10		
51	51279	85851	59730	167419	116480	195011	9		
52	51304	85836	59770	167309	116501	194911	8		
53	51329	85821	59809	167198	116521	194821	7		
54	51354	85806	59849	167088	116541	194726	6		
55	51379	85792	59888	166978	116562	194632	5		
56	51404	85777	59928	166867	116582	194537	4		
57	51429	85762	59967	166757	116602	194443	3		
58	51454	85747	60007	166647	116623	194349	2		
59	51479	85732	60046	166538	116643	194254	1		
60	51504	85717	60086	166428	116663	194160	0		

Le rayon du cercle est supposé de 100 000 parties, ce qui évite de s'appuyer sur le système décimal, légalement obligatoire mais encore peu répandu.

Dans cette page de l'ouvrage — où il n'y a pas d'abréviation — les relations entre arcs complémentaires sont bien utilisées.

Sinus du complémentaire d'un arc ? En latin, car celui-ci se pratique encore, c'est *complementariis sinus*, qui s'abrégera en co-sinus puis cosinus à la fin de ce XVII<sup>e</sup> siècle.

D'autres propriétés sont mises en avant :

$\sin(180 - x) = \sin(x)$ ; et s'algébriquent :

$\sin(-x) = -\sin(x)$ ;  $\sin(180 + x) = -\sin(x)$ .

On notera que le symbole  $\pi$  et les mesures en radian vont encore attendre un bon siècle.

Dès le début du XVIII<sup>e</sup> siècle, tous les géomètres s'intéressent à ce rameau de la science.

Maintes « formules » surgissent que l'on retient :  $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$  que l'on apprend et fait apprendre...

La notion de fonction prime alors. Sinus et cosinus en sont : continuité, parité, etc.

À ce sujet, on relira avec intérêt l'article « Les formules de trigonométrie sans pleurs » de Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1].



Viennent les développements :

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et dans un autre domaine :  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ .

Au XIX<sup>e</sup> siècle, les séries trigonométriques, ainsi que les séries de Fourier pour d'autres développements, dominent ce chapitre. On est loin de « la *connaissance très utile et nécessaire aux choses géométriques* » que préconisait Henrion dans ses « *Mémoires mathématiques* ».

Et maintenant ? Depuis la fin du XX<sup>e</sup> siècle, la moindre calculatrice d'un élève de lycée a dans les replis cachés (en latin : sinus !) de son méca-

nisme tout ce dont on a besoin pour les calculs trigonométriques. Démontrer des formules de trigonométrie constitue dorénavant une nouvelle classe de problèmes.

### Référence

- [1] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. « Les formules de trigonométrie sans pleurs ». In : *Bulletin de l'APMEP* n° 515 (septembre-octobre 2015). ▶



Henry Plane, professeur de mathématiques retraité, est un membre actif de l'APMEP. Il appartient au groupe M:ATH (Mathématiques : Approche par des Textes Historiques) de l'IREM de Paris VII.

© APMEP Juin 2019

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public



### Abonnement 2019 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur <https://www.apmep.fr>

NOM (établissement ou personne) : .....  
 Adresse : .....  
 Code Postal : ..... Ville : ..... Pays : .....  
 Téléphone : ..... Adresse courriel : .....  
 Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : .....  
 Adresse de livraison : .....  
 Adresse de facturation : .....

Catégorie professionnelle :  étudiant  stagiaire  1<sup>er</sup> degré  2<sup>e</sup> degré  
 service partiel  contractuel  enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : [contactrgpd@apmep.fr](mailto:contactrgpd@apmep.fr).

**Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP** pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur <https://www.apmep.fr>.

- 60 € TTC pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
- 56,87 € TTC pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
- 65 € TTC pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
- 64 € TTC pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

**Règlement** : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

par chèque  par mandat administratif  par virement postal

Date : ..... Signature : ..... Cachet de l'établissement

**Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS**  
[secretariat-apmep@orange.fr](mailto:secretariat-apmep@orange.fr)





# Sommaire du n° 532

## Les maths à portée de main

### Éditorial

### Opinions

Manifeste pour un enseignement des mathématiques dans le socle commun de la voie générale au lycée — APMEP-SMF

✦ Que disent les recherches sur les manuels « *Méthode de Singapour* » ? — Éric Mounier et Nadine Grapin

✦ La manipulation dans l'enseignement des mathématiques — Nicolas Pinel

### Avec les élèves

✦ Le pavé dans la boîte en 6<sup>e</sup> — Anne Dusson et Nathalie Lecouturier

Des caches multitâches — François Drouin

✦ Des *Math & Manips* autour des grandeurs — Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen 29

✦ Les fractions en potions ! — Nicolas Pelay

### 1 Ouvertures 43

✦ Triangulation et impression 3D — Aurélien Alvarez 43

### 3

✦ Visite d'un fablab — Olivier Longuet 52

✦ Des origamis en cours de math — Anne-Marie Aebischer 55

### 3

Femmes et mathématiques, où en est-on ? — Claudie Asselain-Missenard, Anne Estrade, Valérie Larose 63

### 6

✦ À la découverte des flexagones — Loïc Terrier 67

✦ Au calcul bien pesé — Karim Zayana 75

### 14

### Récréations 78

20 Le prix de l'essence flambe-t-il ? — Michel Soufflet 78

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 82

### 20

✦ Devine la date de mon anniversaire — Dominique Souder 84

### 25

### Au fil du temps 86

Vers la trigonométrie — Henry Plane 86

Matériaux pour une documentation 90

Anniversaires — Dominique Cambrésy 94



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr