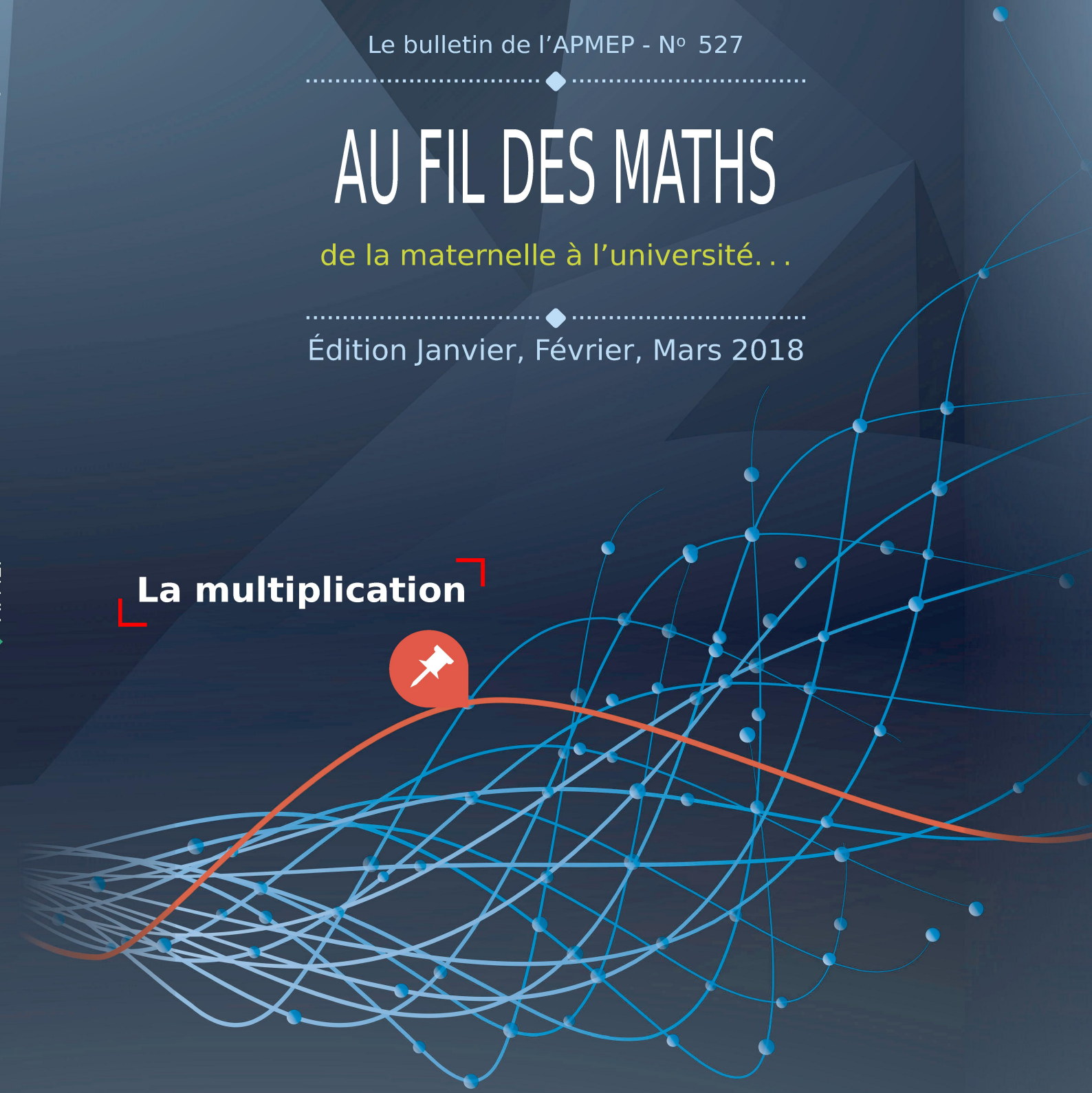
Le bulletin de l'APMEP - N° 527

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2018

La multiplication



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Alice Ernoult*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise Malrieu*.

Rédacteurs : *Marie-Astrid Bézard, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Lise Malrieu, Jean-Marie Martin, Pierre Monmarché, Vincent Pantaloni, Henry Plane, Daniel Vagost*.

« Fils rouges » numériques : *Paul Atlan, Laure Étévez, Jean-Pierre Gerbal, Adrien Guinemer, Simon Le Gal, Julien Marceau, Harmia Soihili*.

Illustrateurs : *Pol Le Gall, Olivier Longuet, Jean-Sébastien Masset*.

Équipe TEXnique : *François Couturier, Isabelle Flavier, Anne Héam, François Pétiard, Olivier Reboux, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Michel Suquet*.

Relations avec le Bureau national : *Catherine Chabrier*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier Reboux
Dépôt légal : Mars 2018
Impression : Imprimerie Horizon P.A. de la plaine de Jouques 200 avenue de Coulin 13420 GEMENOS
ISBN : en cours

AU FIL DES MATHS

L'arithmétique en jouant

« Les enfants n'ont point d'affaires plus sérieuses que leurs jeux » *écrivait Montaigne. Une fois encore, Jean Fromentin nous fait faire des mathématiques en jouant et c'est un plaisir de le suivre… au crayon ou à la souris !*

Jean Fromentin

C'est un des premiers jeux que j'ai utilisé en classe, donc à des fins d'apprentissage. Dans les années 70, l'arithmétique avec les multiples, diviseurs, PGCD, PPCM était au programme en 6e et en 5e. Et, après avoir offert ce Spirograph à mes enfants, j'ai vu tout de suite le profit pédagogique que je pouvais en tirer.

La fiche d'activité que j'avais réalisée à cette époque est publiée dans la brochure *JEUX 5* de l'APMEP, que vous pouvez encore vous procurer.

Le principe de ce jeu est de dessiner des lignes avec des roues dentées qui tournent contre d'autres engrenages. On devine qu'il s'agit d'épicycloïdes ; mais de telles courbes n'étaient tout de même pas un objet d'étude à ce niveau-là !

Figure 1. *Le spirograph.*

Ce jeu de plus de soixante ans est toujours commercialisé, mais la composition des boîtes au niveau des roues dentées peut varier d'une édition à l'autre. Aussi, les roues utilisées dans l'activité peuvent ne pas figurer dans les boîtes de jeu à votre disposition. Je possédais six jeux pour une classe d'environ vingt-quatre élèves. Deux tables rapprochées recevaient un jeu pour un groupe de quatre élèves.

Voici l'ensemble des roues dentées que comportaient les boîtes. Sur chaque roue est inscrit son nombre de dents. Mais j'avais collé de petites étiquettes, indiquant le nombre de dents, à côté de chaque roue pour faciliter le repérage des roues à utiliser. Ces numéros sont les suivants : 24, 30, 32, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 56, 60, 63, 64, 72, 75, 80, 84, 144 et 150 ; 96 et 105 pour l'intérieur des couronnes.

Pour les tracés, les roues étaient fixées, à cette époque, sur un carton épais par de petites épingles. Dans les nouvelles éditions, ces petites épingles n'existent plus pour des raisons de sécurité, ce qui ne facilite donc pas le tracé.

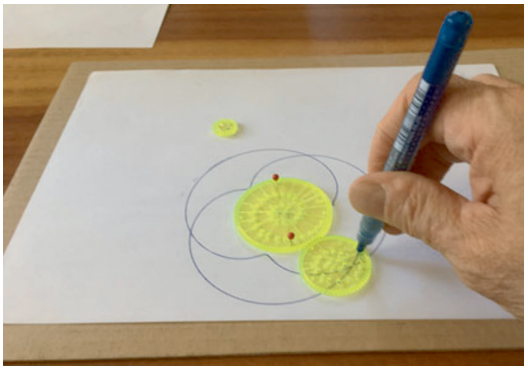


Figure 2. *Deux épingles, un stylo fin et c'est parti !*

L'exercice de base consiste à placer une feuille (blanche) sur le carton, d'y fixer une roue (roue *« fixe »*), de poser contre elle une roue *« mobile »*, de positionner un crayon dans l'un des trous de la roue mobile et de tracer une ligne en faisant tourner la roue mobile autour de la roue fixe et en gardant sans cesse le contact entre les deux roues.

Le Spirograph : un jeu numérique ?

La question peut paraître incongrue vu le thème abordé par la pratique de ce jeu. Mais le mot numérique désigne aussi la possibilité d'utiliser les écrans numériques. Et BINGO ! Ce jeu peut être aussi pratiqué sur ordinateur. Un immense merci à Nathan Friend qui a transposé à l'identique l'ensemble des éléments du Spirograph car je ne vous dis pas le nombre de ratés que j'ai rencontrés pour les dessins de cet article, essentiellement dus au fait que la roue mobile se décroche un peu trop facilement de la roue fixe.

Nathan Friend a donc été bien inspiré d'en faire un « *jeu numérique* » appelé, comme il se devait, **Inspirograph** ! Pour l'instant, ce matériel est utilisable uniquement en ligne sur le site . N'hésitez pas à l'utiliser au fil de la lecture de cet article. Tout ce que vous pourrez y lire dans est donc réalisable de façon ô combien plus simple !

> Rappelons qu'un jeu utilisé en classe de mathématiques, même s'il a un caractère ludique, doit amener les élèves, par sa pratique, à progresser dans leur savoirs et savoir-faire mathématiques. De plus, ici, l'étude mathématique du jeu a des retombées certaines sur son utilisation ludique.

Observations, manipulations

Avant de se lancer dans l'activité, il faut bien sûr que les élèves prennent connaissance du matériel ou du logiciel en ligne. C'est l'occasion de leur laisser un peu de liberté dans l'utilisation du jeu, ce qui leur permettra de mieux rentrer dans l'activité proprement dite.

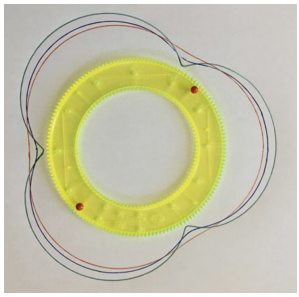


Figure 3. *Accentuation des points de rebroussements.*

Il est important que les élèves acquièrent une certaine dextérité pour la suite de l'activité, surtout que la consigne est de mettre le crayon dans le trou le plus près du bord de la roue mobile (voir la figure 2).

En effet, en plaçant le crayon ainsi, on accentue le dessin des boucles et on peut ainsi mieux les repérer. Les minima (points les plus près de la roue fixe) correspondent aux points de rebroussement d'une épicycloïde.

Dans la suite, nous mettrons en caractère gras **le numéro de la roue fixe** et en italique *celui de la roue mobile*.

La figure 4 est une copie de la feuille de dessin du logiciel.

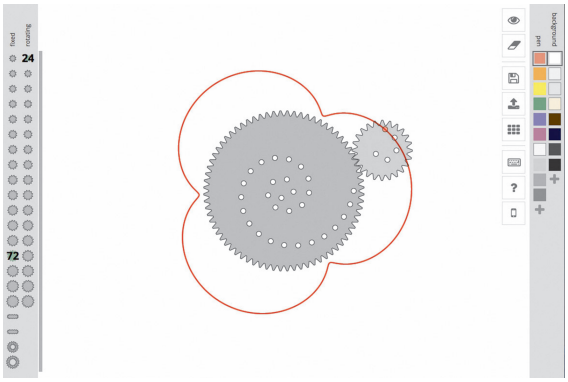


Figure 4. *Inspirograph.*

Par des clics de souris, on choisit dans les deux colonnes de gauche la roue fixe et la roue mobile, puis le trou de la roue mobile dans lequel on veut mettre le crayon. Un clic appuyé sur la roue mobile enclenche le dessin en déplaçant la souris dans un sens ou dans l'autre. En passant et repassant sur le dessin, le tracé est un peu plus accentué. On peut changer la couleur du crayon, celle de la feuille de dessin, cacher les roues, effacer le dessin. Vivement que cette application soit disponible sur tablette !

Une première notion : la division euclidienne

Prenons le couple (**56** ; *24*) et faisons faire à la roue mobile une révolution autour la roue **fixe**, donc sans dépasser la position initiale de la roue *mobile*. Dans ce cas, on a dessiné deux boucles entières et un morceau de boucle.

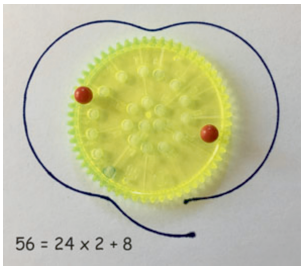


Figure 5. *Le quotient et reste.*

Les deux boucles entières correspondent à 2×24 dents et le morceau de boucle au reste de dents sur la roue fixe. On a bien une situation de division euclidienne : le

nombre de dents de la roue fixe est **le dividende**, le nombre de dents de la roue mobile est **le diviseur** et le nombre de boucles entières est **le quotient**.

Si la courbe ne se referme pas exactement en fin de révolution, le nombre de dents qui « restent » entre les deux minima extrêmes est le reste. Si la courbe se referme exactement, **le reste** est alors nul.

À l'issue de cette première expérience, on peut proposer aux élèves, à l'aide d'un vidéoprojecteur, une série de petits problèmes sur la division euclidienne tel celui de la figure 6.

Le seul renseignement évident est le nombre de boucles entières, c'est-à-dire le quotient. On leur indique alors deux des trois renseignements manquants et ils doivent trouver le troisième. Par exemple, ici, en leur indiquant que la roue fixe a 150 dents (dividende) et qu'il reste 6 dents à la roue mobile pour finir sa révolution, ils devront trouver le diviseur (nombre de dents de la roue mobile). Suivant les renseignements donnés, une telle image est donc à la base de trois petits problèmes.

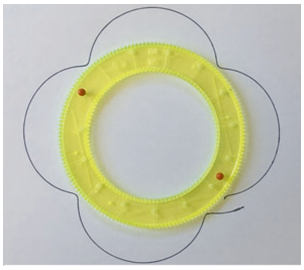


Figure 6. *Une image, trois problèmes.*

Multiples et diviseurs

Ce jeu permet donc de matérialiser, par les tracés, les notions de multiples et de diviseurs. Si la courbe se referme exactement au bout d'un tour, en dessinant par exemple trois boucles, alors le nombre de dents de la roue fixe est égal au triple du nombre de dents de la roue mobile. La figure 7 montre le couple de roues (**72** ; *24*).

On peut alors demander aux élèves de repérer tous les couples de roues dont les numéros sont multiples ou diviseurs l'un de l'autre et de donner tous les couples à 2 boucles, tous ceux à 3 boucles, 4 boucles...

Avec quels couples de roues obtient-on le maximum de boucles ?

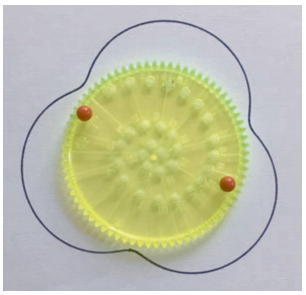


Figure 7. *Multiples et diviseurs :* (***72*** ; *24*).

Multiples communs

Si on fait tourner la roue mobile de 40 dents autour de la roue fixe de 50 dents jusqu'à ce que la courbe se referme, la roue mobile a dessiné *5* boucles (repérés facilement par les 5 minima) en faisant *4* révolutions autour de la roue fixe. Le nombre total de dents parcourues sur la roue fixe (50×4) est égal au produit du nombre de dents de la roue mobile par le nombre de boucles (40×5). Ce nombre, 200, est donc à la fois multiple de 40 et de 50, et c'est le plus petit non nul ; c'est donc le PPCM de 40 et de 50.

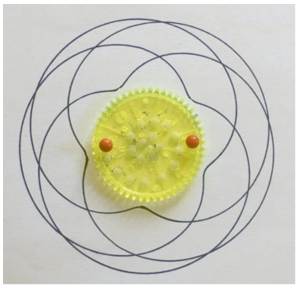


Figure 8. *PPCM de 40 et 50.*

Comme pour la division euclidienne, on peut proposer aux élèves des séries de situations comme celle de la figure 9. On observe qu'il y a 3 minima, donc 3 boucles et 2 révolutions de la roue mobile autour de la roue fixe. En donnant le nombre de dents de l'une des deux roues, les élèves doivent trouver le nombre de dents de l'autre roue. Ici, la roue fixe possède 84 dents. Comme il y a deux révolutions, la roue mobile a parcouru 2×84 dents, soit 168 dents. Comme elle a tracé 3 boucles, elle possède donc $168 \div 3$ dents, soit 56 dents.

Même si la notion de PPCM n'est pas dans les programmes, il n'est pas interdit de faire cette activité. Pour des nombres simples, on rencontre déjà cette notion à propos des fractions à mettre au même dénominateur.

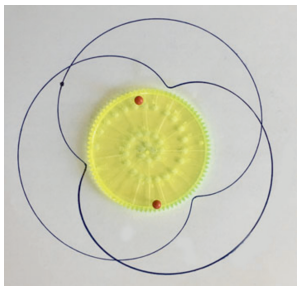


Figure 9. *Combien de dents ?*

Nombres premiers entre eux

Dans l'exemple du couple de roues (**50** ; *40*), on peut remarquer que les 5 minima sont répartis régulièrement sur la roue fixe et donc qu'ils sont toutes les 10 dents ; on observe que 10 est le PGCD de 40 et de 50 !

Dans l'exemple du couple de roues (**84** ; *56*), on peut remarquer que les 3 minima sont répartis régulièrement sur la roue fixe et donc les minima sont toutes les 28 dents ; on observe aussi que 28 est le PGCD de 56 et de 84 !

Si m désigne le nombre de minima sur la roue fixe et r le nombre de révolutions de la roue mobile autour de la roue fixe, on a la formule suivante :

$$\text{PPCM} = \text{PGCD} \times m \times r.$$

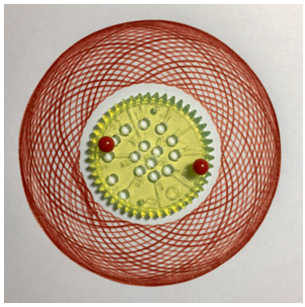


Figure 10. *Multiples et diviseurs :* (**45** ; *32*).

Dans l'exemple de la figure 10 (situation difficile à dessiner vu le grand nombre de boucles à tracer), avec le couple de roues (**45** ; *32*), les minima sont à chaque dent de la roue fixe. La roue mobile a donc fait 45 boucles et 32 révolutions autour de la roue fixe. Le PPCM est donc 45×32 et le PGCD est 1. Les nombres 45 et 32 sont en effet premiers entre eux.

Des tracés semblables, des fractions égales

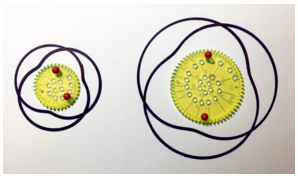


Figure 11. *Des fractions ? Où ça ?*

Les deux tracés de la figure 11 ont les mêmes nombres de minima ($m = 3$) et de révolutions ($r = 2$). Les deux couples de roues choisies ici sont (**36** ; *24*) et (**60** ; *40*). Ces deux couples de nombres sont dans la même proportion $\frac{2}{3}$, soit $\frac{r}{m}$. Ces tracés semblables désignent donc des fractions égales, la fraction réduite étant $\frac{r}{m}$.

On peut aussi remarquer que le deuxième dessin est un agrandissement du premier dans le rapport $\frac{60}{36}$, soit $\frac{5}{3}$.

Voici les couples de roues correspondant à quelques fractions choisies :

- $\frac{1}{2}$: (**84** ; *42*), (**80** ; *40*), (**72** ; *36*), (**64** ; *32*), (**60** ; *30*), (**48** ; *24*) ;
- $\frac{1}{3}$: (**72** ; *24*) ;
- $\frac{2}{3}$: (**84** ; *56*), (**75** ; *50*), (**72** ; *48*), (**63** ; *42*), (**60** ; *40*), (**48** ; *32*), (**45** ; *30*), (**36** ; *24*) ;
- $\frac{3}{4}$: (**84** ; *63*), (**80** ; *60*), (**64** ; *48*), (**60** ; *45*), (**56** ; *42*), (**48** ; *36*), (**40** ; *30*), (**32** ; *24*) ;
- $\frac{2}{5}$: (**80** ; *32*), (**75** ; *30*), (**60** ; *24*) ;
- $\frac{3}{5}$: (**80** ; *48*), (**75** ; *45*), (**60** ; *36*), (**50** ; *30*), (**40** ; *24*).

Pour aller plus loin dans l'arithmétique en jouant, vous trouverez la suite de cet article. . . *Des épicycloïdes aux hypocycloïdes* dans la partie numérique de la revue.

© APMEP *Mars 2018*

Spirograph
2€
L'ARRÊT S'EFFECTUE UNE FOIS QUE VOUS ÊTES REVENU EN POSITION DE DÉPART.
ÇA A L'AIR BIEN COMME MANÈGE
NOMBRE DE DENTS DE L'AXE : 72
NOMBRE DE DENTS DE LA NACELLE : 35
TIENS, POURQUOI DONNENT-ILS CES INFORMATIONS ?
AH, ÇA DÉMARRE
OULÀ, ÇA FAIT MAL AU CŒUR
JE NE VAIS PAS TENIR LÀ DEDANS
HEUREUSEMENT, JE SUIS BIENTÔT ARRIVÉ !
MALHEUR ! 35 ET 72 SONT PREMIERS ENTRE EUX !
O-L

Sommaire du nº 527

La multiplication

Éditorial 1

Réflexions sur l'enseignement des mathématiques — Commissions premier degré et collège de l'APMEP 3

Les débuts de la multiplication à l'école — Jean Toromanoff 6

Exprimer la multiplication au cycle 2 — Serge Petit 12

La multiplication en CE1 — Christine Choquet 17

Des bâtons pour multiplier — Séverine Chassagne-Lambert & Valérie Larose 22

Prof ou magicien ? — Dominique Souder 25

Dessous de table : la face cachée des tables de multiplication en partie dévoilée ! — Anne-France Acciari & Mathias Zessin 29

La multiplication : découvertes en DNL — Anne Reyssat 33

Aperçu sur quelques techniques multiplicatives — Anne Boyé 39

Pas de probas, pas de chocolat ! — Karim Zayana 45

Agrandissement, réduction. . ., rotation — Christian Mercat 49

Questions autour de la multiplication des flottants — François Boucher 56

Jouons le jeu : le salon Culture et Jeux Mathématiques — Marie-José Pestel 69

Petites récréations — Mireille Genin 73

Arrêtons le carrelage — Olivier Longuet 74

L'arithmétique en jouant : le Spirograph — Jean Fromentin 76

Ils sont fous ces Romains ! — Harmia Soilihi 81

L'APMEP joue et gagne ! — Nicole Toussaint & Jean Fromentin 83

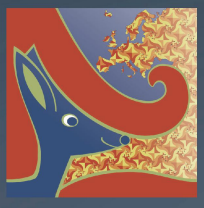
Au fil du temps — Dominique Cambrésy 89

Multiplication et histoire — Henry Plane 91

Matériaux pour une documentation 93

Le *JEUX* nouveau est arrivé ! — Bruno Alaplantive & Frédérique Fournier 95

CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr