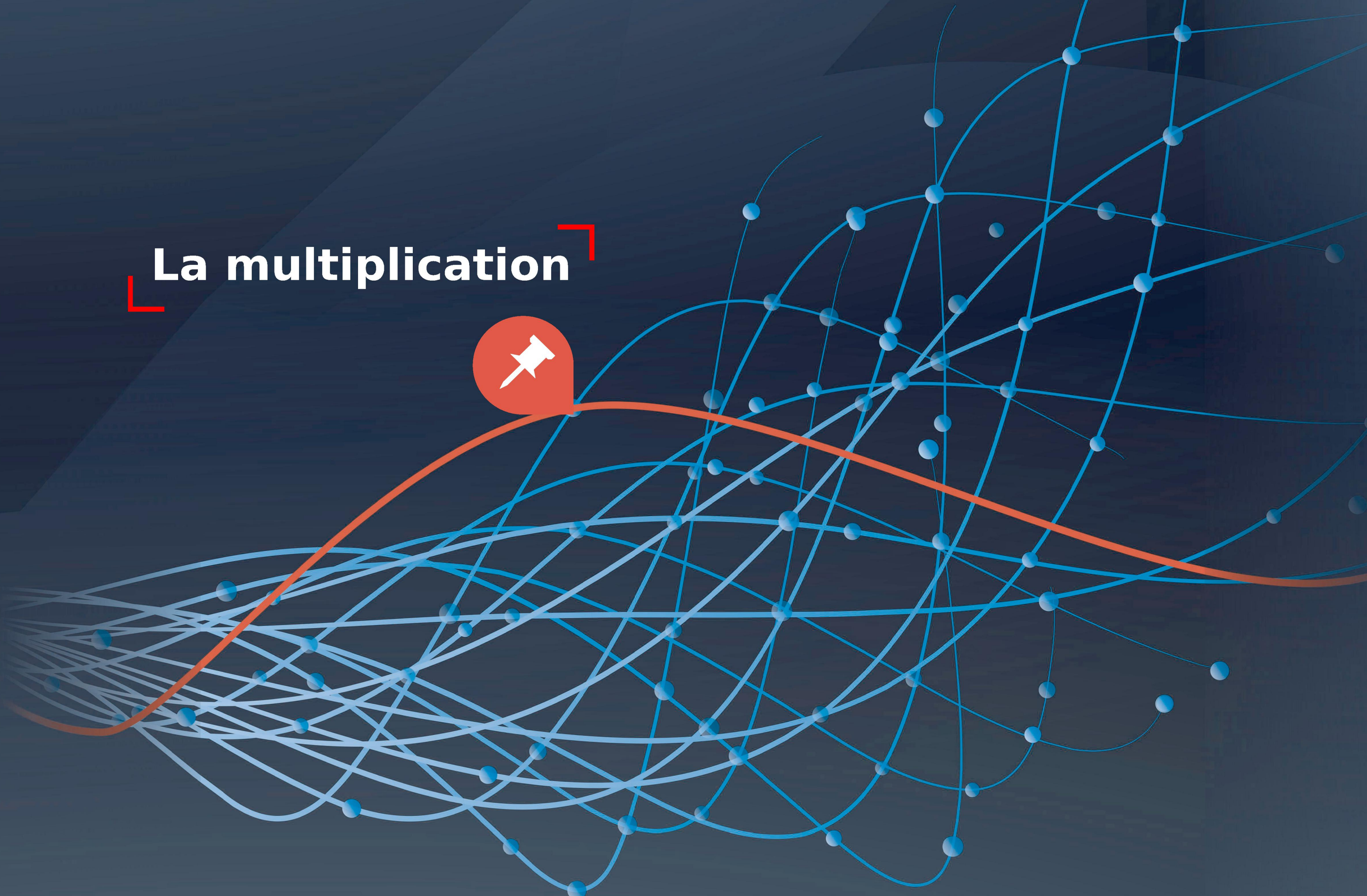
Le bulletin de l'APMEP - N° 527

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2018

La multiplication



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier Reboux
Dépôt légal : Mars 2018
Impression : Imprimerie Horizon P.A. de la plaine de Jouques 200 avenue de Coulin
13420 GEMENOS
ISBN : en cours

Techniques multiplicatives

Tous les types de numération, qu'ils soient additifs ou de position, permettent de réaliser assez facilement des additions et des soustractions. Il n'en va pas de même pour la multiplication et la division. Anne Boyé nous présente ici quelques méthodes de multiplication utilisées à travers les âges et les cultures.

Anne Boyé

L'opération de multiplication est suffisamment complexe pour avoir donné naissance à des procédures variées dont la confrontation peut s'avérer très riche pour l'enseignement de l'arithmétique et au delà. Elle peut par exemple aider à revisiter les principes de notre système de numération, à mieux appréhender les propriétés de commutativité, d'associativité, de distributivité sur l'addition, ou à reconnaître des équivalences de procédures ou d'écritures.

Les techniques de calcul que nous rapportons sont liées à l'écriture des nombres, mais aussi à la façon dont on les pense, aux nécessités économiques, ou à toute autre activité faisant intervenir nombres et quantités.

Leur transmission s'est faite au gré des contacts humains et c'est en général une rencontre entre des besoins et des techniques qui fera qu'elles seront retenues.

Enfin nous ne présenterons que des procédures de multiplication portant sur ce que l'on nomme des nombres abstraits. Dans certaines cultures les nombres (et les procédures de calculs qui les régissent) concernant des situations concrètes — de mesures, par exemple — peuvent différer selon le contexte (voir par exemple [1], pour la Mésopotamie).

Les systèmes de numération

Numérations parlées et écrites : permettent d'exprimer les nombres, éventuellement à l'aide de symboles.
Numérations figurées : utilisent — entre autres — des petits objets comme des cailloux (*calculi* d'où notre *calcul*) ou des jetons, ou les *qipus* (ficelles à nœuds) incas ou encore... les doigts ! Des dispositifs matériels comme les abaques peuvent permettent d'effectuer les calculs.

Une numération écrite doit potentiellement transcrire « tous » les nombres possibles, en principe sans ambiguïté, et permettre de réaliser « simplement » les quatre opérations.
Dans un système **additif**, un nombre est formé par la juxtaposition de symboles, répétés autant de fois qu'il le faut, sa valeur étant la somme des symboles qui le composent (cf. figure 1).
Dans un système **positionnel**, la valeur du symbole varie en fonction de la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre. Cette numération implique l'utilisation d'une base. Dans notre numération indo-arabe, qui est de ce type, la base est dix. Le système chinois ancien (environ 2 000 ans av. J-C), était aussi un système positionnel de base dix. Ce système a l'inconvénient, comme le système babylonien, de ne pas avoir de zéro, du moins jusqu'au XIII^e^ siècle.
Parmi les systèmes hybrides, on trouve la numération mésopotamienne (babylonienne) en base soixante, qui utilise deux symboles, le clou 𒁹 (un) et le chevron 𒌋 (dix).
𒁹 𒐈 représente 1 soixantaine et 3 unités, soit 63.
𒐖 𒌋𒐙 représente 2 soixantaines et 15 unités, soit 135.
Comme il n'y a pas de zéro, les différents ordres sont séparés par des espaces plus ou moins grands et il peut y avoir des ambiguïtés de lecture. Ainsi 𒁹 𒐈 peut il représenter 63, mais aussi une soixantaine de soixantaines, zéro soixantaine et trois unités (3 603), etc.

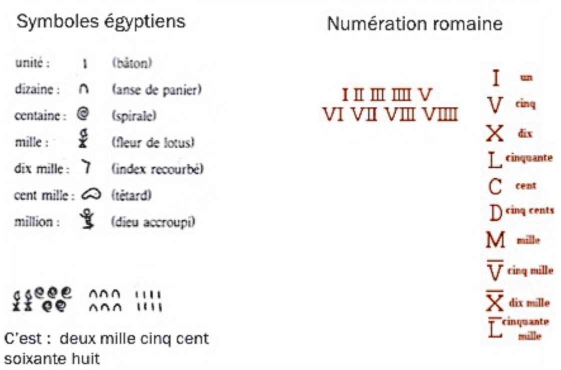


Figure 1. *Différents systèmes additifs de numération.*

Multiplication babylonienne

Le système de numération babylonien pour les nombres abstraits est un système de numération positionnel de base soixante, avec une « sous-base » dix (voir encadré).

Il n'y a pas de signe pour indiquer l'ordre de grandeur, comme notre zéro et notre virgule qui permettent de distinguer les unités, les dizaines, les dixièmes... En revanche des espaces plus ou moins grands marquent l'absence de soixantaine, ou d'unité, ou de soixantième... Un symbole signifiant cette absence, une sorte de « zéro » avant l'heure mais qui n'est en aucun cas un nombre à part entière, jamais placé en début ou en fin, apparaîtra tardivement, entre le VIe et le IIIe siècle avant J-C.

Les historiens qualifient cette numération de « sexagésimale positionnelle relative ». Il y a en quelque sorte une virgule flottante.

61 s'écrit soit $1 \times 60 + 1$

Mais en augmentant légèrement l'espace entre les chiffres on obtient $1 \times 60^2 + 1 = 3\,601$

ou encore $1 \times 60^2 + 1 \times 60 = 3\,660$

ou peut-être $1 + 1 \times 60^{-1} \simeq 1{,}0167$

Figure 2. *Exemple d'écriture babylonienne.*

Cette particularité pourrait faciliter certaines opérations, par exemple la multiplication, quand on en maîtrise la pratique. On ne s'occupe que des « chiffres significatifs », on examine ensuite l'ordre de grandeur selon le problème traité. Il y a tout de même de nombreux inconvénients.

Un matériau très important a été recueilli sous la forme de tablettes d'argile dont beaucoup concernent des textes mathématiques. On y trouve en particulier des tables d'inverses, de multiplications, de carrés...

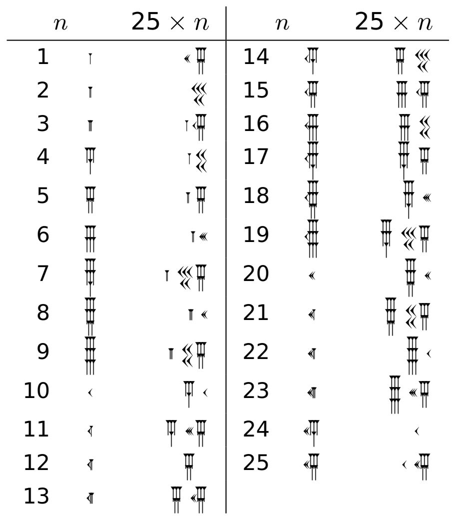


Figure 3. *Table babylonienne du 25.*

Un grand nombre de ces tablettes sont scolaires, et l'apprentissage de la multiplication y occupe une place majeure. Mais les étapes du calcul proprement dit ne sont jamais explicites ; seuls figurent la donnée et le résultat. Les archéologues en sont donc réduits à imaginer les techniques de calcul. Étant donné l'importance des tables de carrés, on a pu conjecturer qu'une des techniques de multiplication utilisait la formule suivante :

$$A \times B = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$$

En se souvenant au passage que diviser par 2, c'est multiplier par $\frac{1}{2}$. On peut donc aussi utiliser les tables d'inverses. Or l'inverse de 2, c'est 30 (sous entendu 30 soixantièmes). En effet, 30 soixantièmes, c'est une demi-unité. Il faudrait écrire que l'inverse de 2 c'est : 0␣30, comme nous écririons 0,5. Mais il n'y a ni zéro, ni virgule.

La multiplication babylonienne demande de connaître la table des carrés :

$$21 \times 17 = \left(\frac{38}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 19^2 - 2^2$$

or : $19^2 = 361 =$ $(= 6 \times 60 + 1)$

donc $19^2 - 2^2 = 5 \times 60 + 57 =$

$21 \times 17 =$

Figure 4. *Multiplication babylonienne : 21×17.*

Tout ceci reste raisonnable si les nombres ne sont pas trop grands, et si les carrés se trouvent dans la table. Sur une tablette par exemple, l'élève a besoin du carré de 7␣35. Et il écrit directement :

$$\begin{array}{r} 7␣35 \\ 7␣35 \\ \hline 57␣30␣25 \end{array}$$

Ce qui est juste mais semble trop abrupt pour être réalisé mentalement. On a donc pu faire l'hypothèse, comme pour les abaques romains, d'instruments de calculs « matériels » non retrouvés ou d'abaques tracés dans la poussière puis effacés.

Multiplication égyptienne

La numération égyptienne hiéroglyphique, à laquelle nous nous référons ici, est additive à base dix. Elle semblerait *a priori* très peu adaptée aux calculs, en particulier à la multiplication.

Dans les faits, la multiplication égyptienne relève d'une technique très opérante qui repose sur la duplication. Elle est connue depuis la découverte du papyrus Rhind, daté de 1650 av. J-C, et sera utilisée jusqu'au xxᵉ siècle avec des variantes telle celle dite du paysan russe. Elle consiste à décomposer le multiplicateur en somme de puissances de deux, et à calculer les doubles successifs du multiplicande.

Principe de la multiplication égyptienne

La multiplication égyptienne fonctionne par doublements successifs du multiplicande :

- Le multiplicateur est tout d'abord décomposé en une somme de puissances de 2

$$43 = \underset{2^5}{32} + \underset{2^4}{16} + \underset{2^3}{8} + \underset{2^2}{4} + \underset{2^1}{2} + \underset{2^0}{1}$$

- La multiplication est posée

$$92 \times 43 = 92 \times (32 + 8 + 2 + 1)$$

- La distribution du multiplicande sur les termes de la décomposition du multiplicateur fait apparaître les doubles successifs

$$\begin{aligned} 92 \times 43 &= 92 \times \underset{2^5}{32} + \underset{2^4}{0} + 92 \times \underset{2^3}{8} + \underset{2^2}{0} + 92 \times \underset{2^1}{2} + 92 \times \underset{2^0}{1} \\ &= 2\,944 + 0 + 736 + 0 + 184 + 92 \\ &= 3\,956 \end{aligned}$$

Cette méthode de décomposition permet de construire une technique opératoire très simple.

Multiplication égyptienne : technique opératoire

92 ✓	1
184 ✓	2
368	4
736 ✓	8
1 472	16
2 944 ✓	32
3 956	

1 On écrit en colonne les puissances successives de 2

2 On écrit en face les doubles successifs du multiplicande

3 Puis on retient les termes appartenant à la décomposition du multiplicateur

4 Enfin, on fait la somme des doubles conservés

Variante dite « à la russe »

Dans cette variante, on écrit dans une colonne les doubles successifs du multiplicande et dans l'autre les moitiés successives du multiplicateur (arrondies à l'entier inférieur). On somme ensuite les entrées de la première colonne correspondant à des nombres impairs dans la seconde.

Principe de la multiplication « à la russe »

92	43
184	21
~~368~~	~~10~~
736	5
~~1 472~~	~~2~~
2 944	1
3 956	

1 On écrit les doubles successifs du multiplicande

2 On écrit en face les moitiés successives du multiplicateur, en arrondissant à l'entier inférieur

3 Puis on supprime les termes pairs de la décomposition

4 Et on supprime les termes correspondants des doubles successifs

5 Enfin, on fait la somme des doubles conservés

La technique des abaques

La quasi impossibilité d'opérer avec certaines numérations, comme la numération romaine par exemple, a rendu nécessaire des procédés « manuels », dont l'abaque et le calcul à jetons.

Les abaques sont couramment utilisés dans les civilisations grecques et romaines. L'abaque à poussière est une série de colonnes tracées dans le sable, symbolisant les puissances de dix. On peut ensuite y inscrire des chiffres à l'aide du doigt ou d'un stylet.

L'abaque à jetons est une table sur laquelle des sillons parallèles tracés à l'avance séparent les différents ordres d'unités. Certains abaques sont des petites tables transportables. Un nombre est représenté en plaçant dans chaque colonne les jetons nécessaires. Le mot « calcul » est hérité du nom « *calculi* » (cailloux) donné aux jetons par les latins.

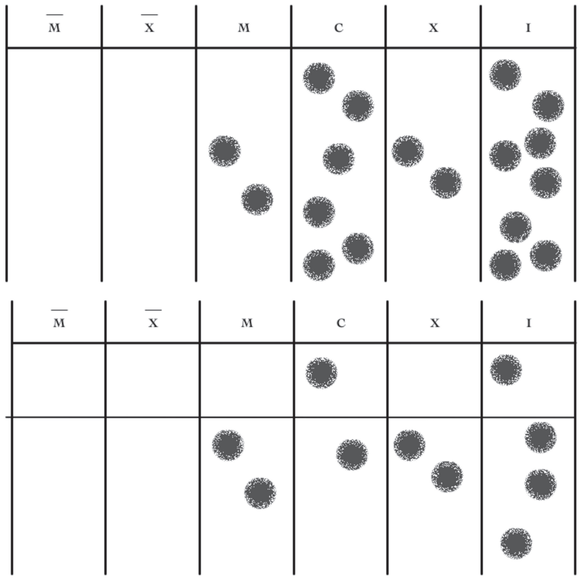


Figure 5. *Représentation de 2 628 sur un abaque romain simple (en haut) et avec ligne des 5 (en bas) — Les bouliers chinois sont encore basés sur le même principe.*

Les additions et les soustractions ne posent aucun problème avec les abaques. La multiplication, qui s'effectue par somme de produits partiels, demande en revanche un long apprentissage.

Le calcul à l'abaque permet de faire des opérations avec n'importe quel système de numération de base dix, sans utiliser de symboles d'écriture des nombres. Cependant, pour des multiplications de grands nombres il devient rapidement fastidieux. La multiplication à l'égyptienne, par duplication, sera longtemps préférée dans ce cas.

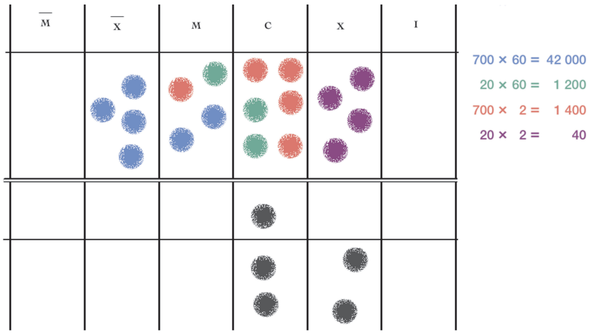


Figure 6. *Représentation de 720 × 62 sur un abaque romain.*

Abacistes *vs* algoristes

Si l'histoire de la transmission des sciences est complexe, retenons simplement que vers la fin du viii^e^ siècle, les savants du monde arabe vont accéder aux connaissances de la civilisation indienne, adoptant en particulier l'ensemble du système numérique : les chiffres, la numération décimale de position, le zéro et les méthodes de calcul. L'un des grands savants de la civilisation arabo-musulmane[1] qui a largement contribué à vulgariser ces nouvelles méthodes d'origine indienne est le perse Mohammed Ibn Mussa al-Khwarizmi (≈780-850), dans son ouvrage *Le Livre sur le calcul indien*. Son œuvre connaîtra un tel succès en Europe occidentale que son nom, latinisé et déformé en *algorismus*, *algorisme*, puis *algorithme* désignera pendant longtemps l'ensemble du calcul avec les chiffres indo-arabes.

Parmi les méthodes de multiplication, il en est une que nous retrouvons à des périodes différentes en Chine, en Inde, dans les pays d'Islam, puis plus tard en Europe : la technique du tableau, aussi appelée « par grillage », « par filet », puis plus tard « par jalousie » ou « *per gelosia* », du nom des fenêtres vénitiennes à jalousies. Elle est très simple, efficace et très bien adaptée aux numérations de position.

Voici deux exemples que l'on comprendra aisément.

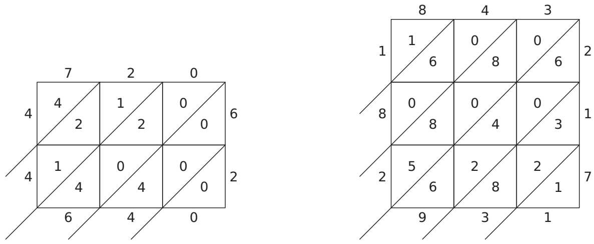


Figure 7. *720 × 62 et 843 × 217* « per gelosia ».

Pour mettre en valeur l'efficacité de cette méthode de calcul Nicolas Chuquet, en 1484, dans son *Triparty en la science des nombres*[2], propose plusieurs moyens d'effectuer des multiplications, dont la technique par tableau qu'il nomme *par quarrée* ou *quadrangulaire*, et dont il indique qu'on peut la commencer « a dextre ou a senestre », et il choisit des très grands nombres.
Nous sommes alors en Europe au xv^e^ siècle. Il aura fallu longtemps avant que les chiffres indo-arabes et les nouvelles techniques de calcul n'arrivent en Europe occidentale et y soient acceptées. Leur première introduction intervient vers l'an mil, par l'intermédiaire de Gerbert d'Aurillac, qui deviendra pape en 1003 sous le nom de Sylvestre II. À l'occasion d'un long séjour en Espagne, il s'est initié à la science arabe. Il ne réussira pas à propager les nouveaux chiffres indo-arabes en Europe, se heurtant à de farouches résistances. Son seul apport durable consistera à simplifier l'abaque dit romain. Il remplacera les jetons d'une colonne par un seul jeton où sera inscrit le nombre d'unités en chiffres arabes. Certains, séduits par cette idée, inscriront cependant les nombres sur les jetons en chiffres romains.

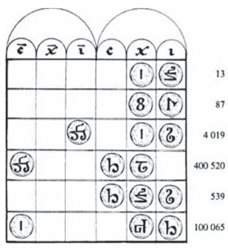


Figure 8. *Abaque de Gerbert d'Aurillac.*

Il n'y a pas de zéro et l'absence d'unités dans une colonne se repère par un vide. C'est seulement le *Liber Abaci* de Léonard de Pise, dit Fibonacci, qui permettra en 1202 la diffusion de ce qu'on nommera l'algorisme. Les savants européens adopteront avec enthousiasme ce nouveau calcul, mais ce sera loin d'être le cas pour

1. Le « monde arabe » recouvre les territoires qui ont en commun la langue arabe, ou qui ont été à un moment ou à un autre sous domination musulmane. Du viii^e^ au xv^e^ siècle, il s'étendait sur trois continents. La Perse en faisait partie ainsi que la péninsule Ibérique (Al Andalus). C'était alors un foyer de très haute culture cosmopolite.
2. Nicolas Chuquet est un mathématicien lyonnais qui écrit en français. Son ouvrage manuscrit fut perdu et ne sera finalement publié qu'en 1881.

les « calculateurs » professionnels, les commerçants, les banquiers. C'est une sorte de lutte entre les algoristes, et les abacistes, entre les calculs « à la plume » et les calculs « à jets », entre le calcul écrit et le calcul à jetons.

Le calcul sur abaque a survécu très longtemps. Son interdiction [3] dans les écoles et les administrations françaises au moment de la révolution donne à penser qu'il était encore utilisé à la fin du XVIIIe siècle. En 1673, Argan, dans *Le malade imaginaire*, fait et refait au moyen d'une table à jetons, le compte des multiples remèdes de son apothicaire ; Mme de Sévigné, dans une lettre à sa fille, en 1671, en témoigne : « Nous avons trouvé, avec ces jetons qui sont si bons, que j'aurais eu cinq cent trente mille livres de bien, en comptant toutes mes petites successions. » Même Leibniz fait encore sur l'abaque certains calculs. Quant à Montaigne, à la fin du XVIe siècle, il déclarera : « je ne sais compter ni à jets, ni à plume. » Après le *Liber Abaci*, il faudra attendre la fin du XVe siècle avec l'ouvrage de Luca Pacioli, *Summa de Arithmetica*, en 1494, pour que les nouvelles méthodes soient largement diffusées [4]. Les auteurs de ces ouvrages reprennent les méthodes de multiplications connues, dont celle *« per gelosia »*. Mais ces techniques ont quelques inconvénients : le tracé du quadrillage demande plus de temps que la multiplication elle-même, et l'on commence à se soucier d'économiser encre et papier.

En 1617, dans sa *Rhabdologie*, Neper mettra au point un instrument de calcul qui sera utilisé jusqu'à la fin du XIXe siècle en Europe. Il s'agit d'un jeu de bâtons, qu'on nommera « les bâtons de Neper », qui compte au moins onze baguettes, chacune formée de 10 cases, qui permettent de reproduire plus rapidement et sans papier le rectangle de la méthode *« per gelosia »*.

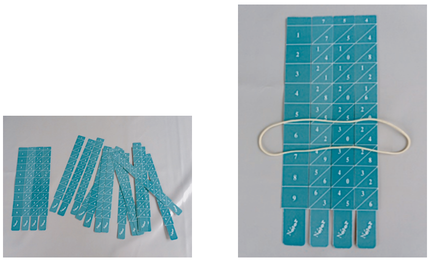


Figure 9. *Bâtons pédagogiques imaginés par Michel Mouyssinat.*

Neper est par ailleurs l'inventeur des logarithmes, autre technique puissante pour la multiplication, en particulier des nombres « astronomiques ». Les logarithmes permettront, dès leur invention, de développer des « règles à calcul » [5]. Elles seront utilisées et perfectionnées jusqu'à être supplantées récemment par les ordinateurs et les calculatrices.

C'est une autre technique, déjà connue des mathématiciens arabes sous le nom de « méthode des maisons » ou « de l'échiquier » et diffusée par Luca Pacioli qui emportera finalement l'adhésion du plus grand nombre.

Figure 10. *Multiplication de 9 876 par 6 789 dans le* Summa de Arithmetica *de Pacioli.*

Nous reconnaissons bien sûr notre multiplication actuelle, celle que tous les élèves apprennent désormais à l'école. Très rapidement les petites cases ont disparu. Voici des exemples présentés dans le *Triparty* de Nicolas Chuquet :

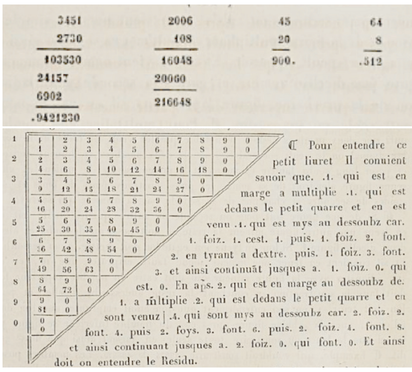


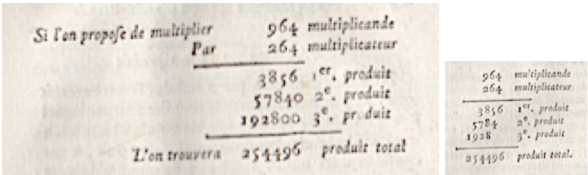
Figure 11. *Exemples de multiplications posées et d'une table commentée tirés du* Triparty *de Chuquet.*

3. Loi du 1er vendémiaire an IV (23 septembre 1795). Jusqu'à l'instauration du système métrique les mesures, la monnaie, ne relevaient pas d'un système décimal ; il y eut de nombreuses réticences à ce changement parmi la population. C'est la loi du 4 juillet 1837 qui rendra définitivement obligatoire le système métrique, à compter du 1er janvier 1840. Ce qui sera accepté sans trop de peine puisqu'il avait été enseigné dès l'école primaire depuis la loi de 1795, ainsi que la pratique des opérations « à la plume ».

4. Le *Triparty* de Nicolas Chuquet ne fut imprimé, comme nous l'avons signalé, qu'en 1881. Il témoigne donc de la connaissance des techniques et de la volonté de les diffuser, mais n'eut pas d'influence directe.

5. C'est le mathématicien et astronome Edmund Gunther qui inventera en 1620 une règle utilisant la propriété que le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes. En 1671, Seth Partridge imaginera la règle à coulisse dont le principe sera conservé jusqu'aux règles à calcul du XXe siècle.

Trois-cents ans plus tard, en 1768, Camus[6] décrit cette technique de multiplication « à l'italienne » dans ses *Éléments d'arithmétique*, en indiquant qu'il n'est pas utile de conserver les zéros.


Si l'on propose de multiplier 964 multiplicande
Par 264 multiplicateur
3856 1er. produit
57840 2e. produit
192800 3e. produit
L'on trouvera 254496 produit total

964 multiplicande
264 multiplicateur
3856 1er. produit
5784 2e. produit
1928 3e. produit
254496 produit total.

Figure 12. *Multiplication de 964 par 264, Camus,* Éléments d'Arithmétique*, 1768.*

Nous ne pouvons conclure cette brève présentation de techniques de multiplication sans évoquer la preuve par 9, utilisée par les mathématiciens arabes dès le ɪxe siècle. Cette preuve et d'autres étaient déjà très pratiquées en Inde où les mathématiciens étaient très experts dans la manipulation des restes. On trouve une description « moderne » des surplus et de la preuve par 9 dans *L'Arithmétique en sa perfection*, de François Legendre, publié en 1745.

La preuve par 9

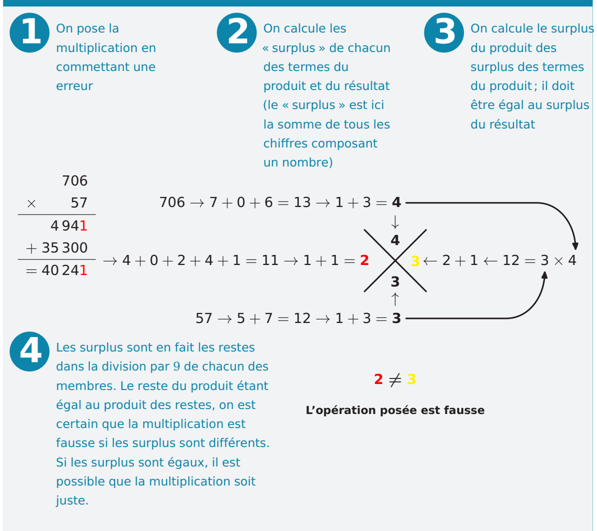


Figure 13. *Technique de la preuve par 9.*

En conclusion

Retenons de ce court voyage historique que, même lorsque les systèmes de numération ne permettaient pas de réaliser les multiplications directement par écrit, des techniques et des outils remarquables permettaient aux comptables de faire leur travail — souvent très efficacement avec un peu d'habitude. Les bouliers sont d'ailleurs toujours très utilisés au siècle de la calculatrice.

Remarquons également que toutes les méthodes vues ici reposent sur une décomposition bien choisie du nombre, et sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Les calculs ne sont au demeurant pas intrinsèquement faciles ou compliqués. C'est la technique, choisie à bon escient, qui conditionne la difficulté.

Par exemple la multiplication en base deux, qui peut sembler particulièrement simple et sera bien adaptée aux ordinateurs n'est pas du tout pratique pour des usages comptables « à la main ». Le choix de la technique demande donc une certaine intelligence du calcul et une bonne compréhension du nombre.

Nous espérons que ce petit aperçu, très partiel sur la multiplication puisse enrichir la réflexion et proposer des pistes pour l'apprentissage.

Quelques références consultées

[1] C. Proust. « La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul ». In : *Revue d'histoire des mathématiques* 6 (2001), 1 001-1 011.

[2] André Allard. « La révolution arithmétique du Moyen-Âge ». In : *La recherche* 26.277 (1995), pp. 742-748.

[3] Camus. *Éléments d'arithmétique, Cours de mathématiques première partie*. 4e éd. 1768.

[4] Jean-Luc Chabert *et alii*. *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce (nouvelle édition 2010)*. Belin, 1994.

[5] Nicolas Chuquet. *Le triparty en la science des nombres*. Aristide Marre en 1881, Rome, imprimerie des sciences mathématiques et physiques, 1484.

[6] Étienne Ghys. *Les tables de multiplication, mauvais souvenir ?* . 2009.

[7] Luca Pacioli. *Summa de arithmetica, geometria. Proportioni et proportionalita*. 1494.

[8] « Naissance des nombres, comptes et légendes ». In : *Le Courrier de l'UNESCO* (novembre 1993).

Anne Boyé est agrégée de mathématiques et professeure de lycée retraitée. Elle est aussi docteure en histoire des mathématiques, chercheuse associée au Centre François Viète d'épistémologie, d'histoire des sciences et des techniques, au sein de l'Université de Nantes. Elle est active à l'IREM des Pays de la Loire et à la régionale de Nantes de l'APMEP.

6. Vous trouverez une courte biographie de Charles Camus à la page 90.

Sommaire du nº 527

La multiplication

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr