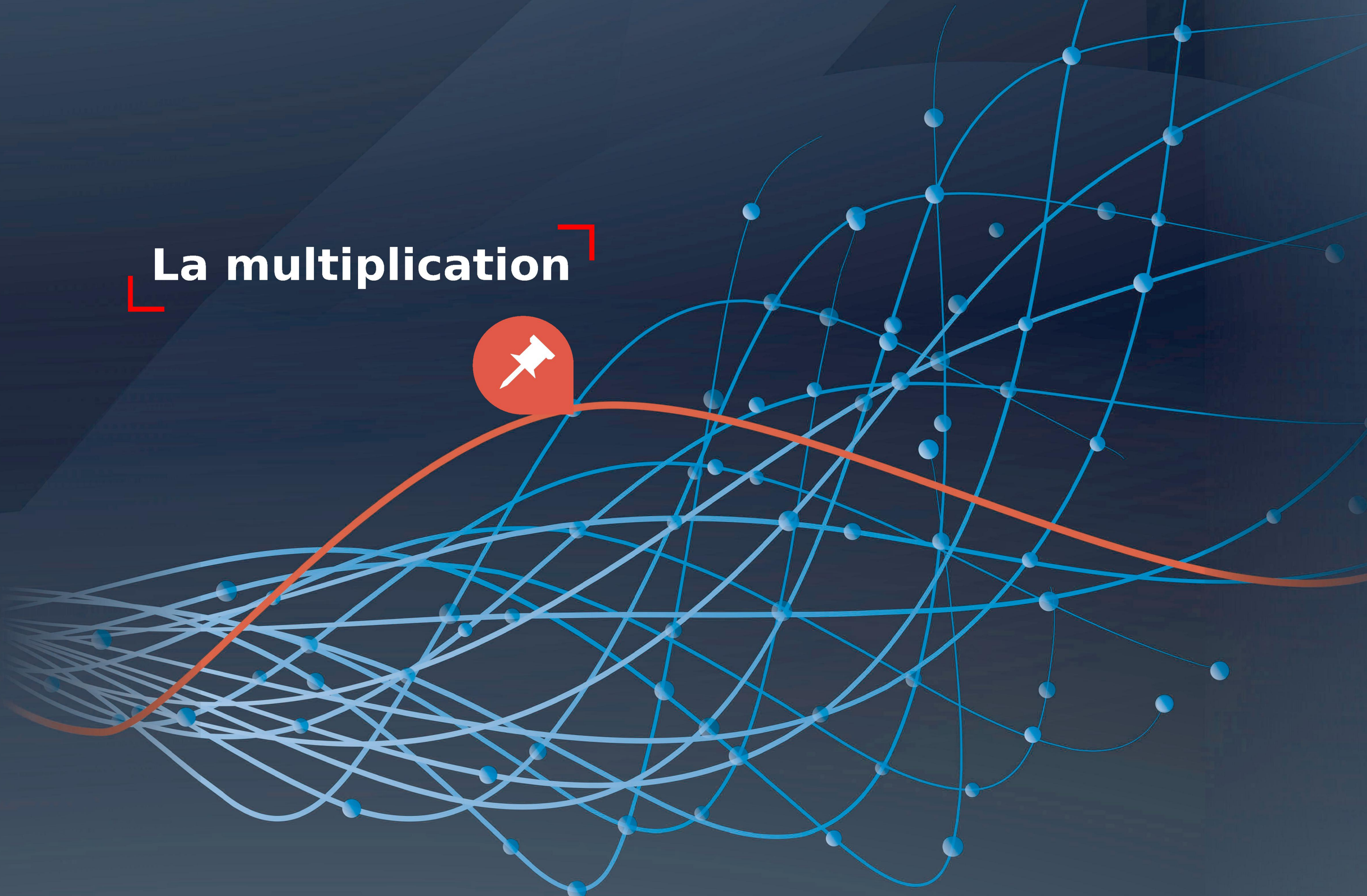
Le bulletin de l'APMEP - N° 527

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2018

La multiplication



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Alice ERNOULT*.

Responsable coordinateur de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Marie-Astrid BÉZARD, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Pierre MONMARCHÉ, Vincent PANTALONI, Henry PLANE, Daniel VAGOST*.

« Fils rouges » numériques : *Paul ATLAN, Laure ÉTÉVEZ, Jean-Pierre GERBAL, Adrien GUINEMER, Simon LE GAL, Julien MARCEAU, Harmia SOIHILI*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET*.

Relations avec le Bureau national : *Catherine CHABRIER*.
Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX
Dépôt légal : Mars 2018
Impression : Imprimerie Horizon P.A. de la plaine de Jouques 200 avenue de Coulin
13420 GEMENOS
ISBN : en cours

APMEP

Dessous de table

Vous avez sûrement déjà visionné à maintes reprises la vidéo La face cachée des tables de multiplication *de Mickaël Launay et vous ne vous en lassez pas !*
Anne-France Acciari et Mathias Zessin nous dévoilent la face cachée de cette vidéo en explicitant certaines des propriétés mathématiques sous-jacentes.

Anne-France Acciari & Mathias Zessin

Avec plus de deux millions de vues, la vidéo *La face cachée des tables de multiplication* de Mickael Launay est un véritable succès sur l'internet.

À quoi tient ce succès ? Peut-être à l'association des tables de multiplication, mauvais souvenir des leçons de mathématiques pour beaucoup, et de la beauté des courbes que l'on peut admirer. Nul besoin de faire des études poussées en algèbre pour avoir appris les tables de multiplication et nul besoin d'avoir des connaissances en art pour être sensible aux magnifiques courbes associées. Mais comment expliquer que des courbes si belles et symétriques apparaissent juste en reliant quelques points d'un cercle selon les tables de multiplication ?

Nous allons nous limiter dans cet article au cas de la table de 2 et à son lien avec une courbe bien connue : la cardioïde. Les résultats se généralisent aisément pour certains nombres plus élevés.

Illusion d'optique

Pour tout entier n, nous appellerons figure de la multiplication par 2 modulo n, la figure obtenue en positionnant les entiers de 0 à $n-1$ sur le cercle unité et en reliant chaque entier à son double modulo n. On s'intéresse au phénomène observé lorsqu'on augmente la valeur de n. Une courbe étrange semble apparaître. Elle ressemble bien à une cardioïde.

Nous allons démontrer que c'est bien le cas et qu'elle apparaît de la manière suivante : les segments tracés sont tous tangents à la cardioïde. C'est cette propriété qui est à la base de l'illusion d'optique observée.

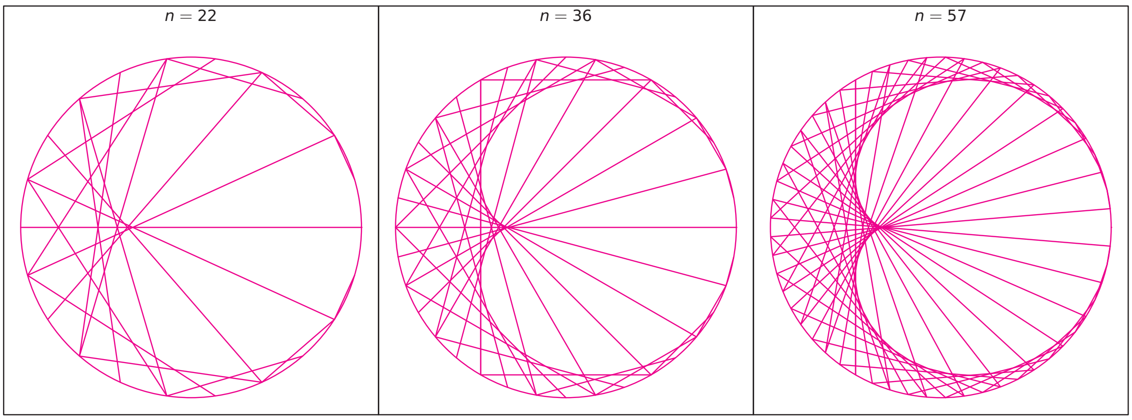


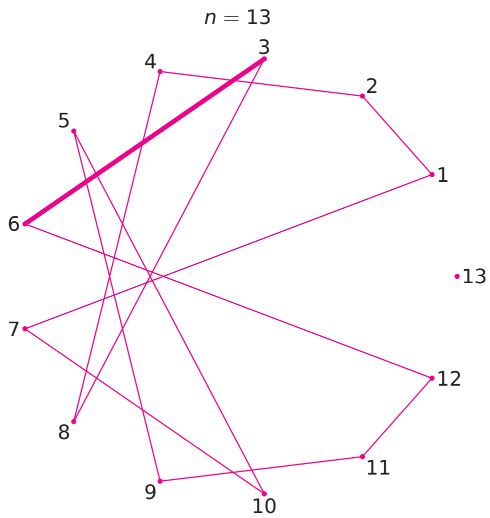
Figure 1. *Table de* 2 *modulo* 22, 36 *et* 57.

Étude du cercle unité

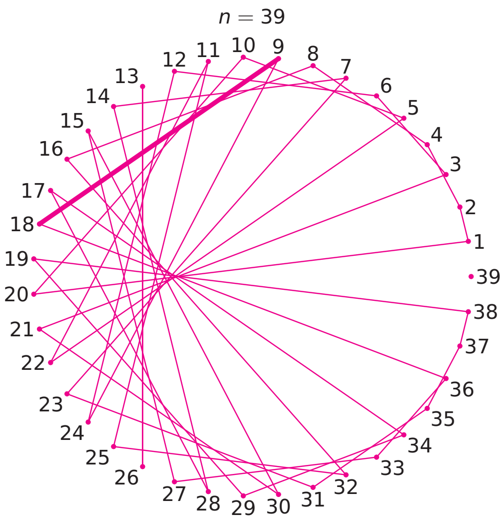
On considère que le cercle de la figure est le cercle unité du plan complexe.

Le nombre 0 sera situé au point d'affixe 1 et les nombres de 1 à $n-1$ seront disposés régulièrement sur le cercle dans le sens trigonométrique.

Démontrons dans un premier temps qu'à tout point du cercle unité correspond un unique point de la figure, indépendamment de n. Illustrons ceci par l'exemple ci-dessous. On pourra alors donner à n la valeur qu'on souhaite, afin d'avoir un nombre suffisant de points et que se dégage une jolie courbe.



Le nombre 3 est envoyé sur le nombre 6



Le nombre 9 est envoyé sur le nombre 18

Figure 2. *Les deux nombres de départ correspondent au même point du cercle unité et ils sont envoyés sur des nombres correspondants à un même point du cercle unité. La même corde est tracée dans les deux cas.*

Soit $k \in [1\,;n-1]$. L'affixe de la position du nombre k est alors $\exp(\mathrm{i}\theta)$, avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. L'affixe de la position du nombre $2k$ est alors $\exp(2\mathrm{i}\theta)$.

Si on fait varier n, un même point du cercle peut être l'image d'un nombre k modulo n et d'un nombre k' modulo n' (voir exemple ci-contre). Le point auquel il sera relié est le même, que l'on raisonne avec n ou n'. En effet, ces points ont une affixe de même argument θ et l'argument des affixes des points correspondant à $2k$ et $2k'$ sera donc égal à 2θ.

On a alors montré que l'image d'un point par l'opération « multiplication par 2 » ne dépend pas du n choisi, c'est-à-dire du nombre de points sur le cercle.

On en déduit qu'on peut, en un certain sens, faire tendre n vers $+\infty$ et obtenir une figure où chaque point d'affixe $\exp(\mathrm{i}\theta)$ est relié à un point du cercle d'affixe $\exp(2\mathrm{i}\theta)$.

On s'affranchit maintenant du n et on considère l'ensemble des points du cercle unité.

La cardioïde

De façon générale, une cardioïde est un ensemble que l'on peut paramétrer de la façon suivante : $C = \{(x(\theta)\,;\,y(\theta)),\ \theta \in]-\pi\,;\pi]\}$ avec

$$x(\theta) = a\cos(\theta)(1+\cos(\theta)) + b$$
$$y(\theta) = a\sin(\theta)(1+\cos(\theta)) + c$$

où a, b et c sont des nombres réels.

Pour chaque valeur du paramètre θ, nous noterons M_θ le point de C correspondant. Et nous noterons A_θ le point du cercle unité de coordonnées $(\cos(\theta)\,;\,\sin(\theta))$.

Lorsqu'une courbe donnée est paramétrée sous la forme $(x(\theta)\,;\,y(\theta))$, θ variant dans $\mathbb{R}$, le vecteur $(x'(\theta)\,;\,y'(\theta))$ est un vecteur tangent à la courbe au point de coordonnées $(x(\theta)\,;\,y(\theta))$ considéré.

Détermination des paramètres de la cardioïde

Nous supposons maintenant que la figure que l'on voit apparaître à l'intérieur du cercle est bien une cardioïde et que chaque segment de la figure de multiplication par 2 est tangent à cette cardioïde.

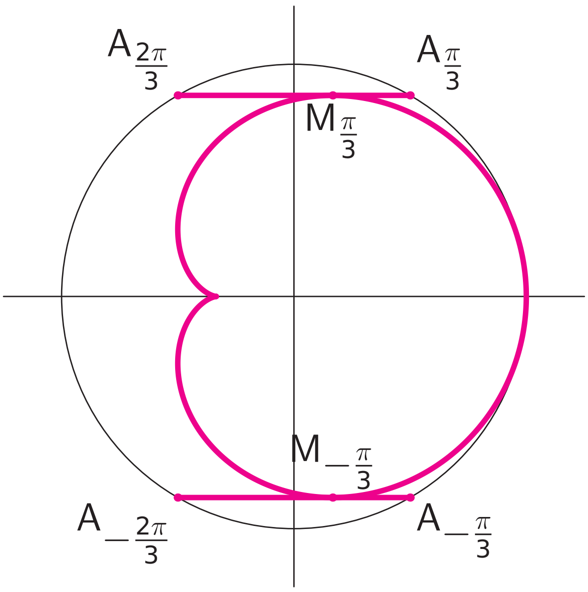
Déterminons maintenant les paramètres de la cardioïde qui nous intéresse.

La cardioïde recherchée est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On obtient une telle symétrie si l'abscisse x est une fonction paire et l'ordonnée y est une fonction impaire. C'est le cas si et seulement si c est nul.

Nous appellerons sommet de la cardioïde l'unique point de rebroussement que l'on peut voir sur la courbe. Ce sommet se trouve sur l'axe des abscisses et le vecteur tangent à la courbe est horizontal en ce point.

Déterminons ses coordonnées.

Le vecteur tangent est horizontal quand $y'(\theta) = 0$. Des calculs permettent de trouver que c'est le cas pour trois valeurs de θ : π, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. En se référant au dessin et à la symétrie de la courbe ou par détermination du point de rebroussement par le calcul, le sommet est alors M_π et ses coordonnées sont $(b\,;\,0)$. De plus, $M_{\frac{\pi}{3}}$ est le point le plus haut et $M_{-\frac{\pi}{3}}$ est le point le plus bas de la cardioïde.



Le segment $[A_\theta A_{2\theta}]$ est horizontal lorsque les points A_θ et $A_{2\theta}$ sont distincts et ont la même ordonnée, c'est-à-dire quand $\sin(\theta) = \sin(2\theta)$ et ceci est vérifié pour trois valeurs de θ : $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ et π. En considérant que les points du paragraphe précédent sont les points de tangence de ces trois segments à la courbe et en classant les ordonnées, on obtient que $M_{\frac{\pi}{3}}$ se trouve sur le segment $\left[A_{\frac{\pi}{3}} A_{\frac{2\pi}{3}}\right]$ et $M_{-\frac{\pi}{3}}$ sur le segment $\left[A_{-\frac{\pi}{3}} A_{-\frac{2\pi}{3}}\right]$. Les points

$$M_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{4}a + b\,;\, \frac{3\sqrt{3}}{4}a\right) \text{ et } A_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

doivent alors avoir la même ordonnée, et on obtient $a = \frac{2}{3}$.

De même, le vecteur tangent est vertical quand $x'(\theta) = 0$.

Et ceci est vérifié pour quatre valeurs de θ : 0, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π. Le segment $[A_\theta A_{2\theta}]$ est vertical lorsque les points A_θ et $A_{2\theta}$ ont la même abscisse, c'est-à-dire lorsque $\cos(\theta) = \cos(2\theta)$ et ceci est vérifié pour trois valeurs de θ : 0, $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. Les points

$$M_{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{1}{4}a + b\,;\, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right) \text{ et } A_{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

doivent avoir la même abscisse et $a = \frac{2}{3}$, donc $b = -\frac{1}{3}$.

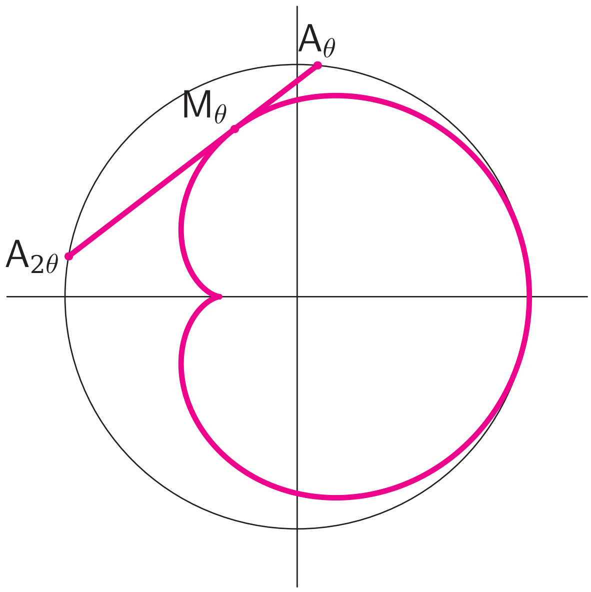
La cardioïde cherchée est donc l'ensemble :

$$C = \left\{\left(\frac{2}{3}\cos(\theta)(1+\cos(\theta)) - \frac{1}{3}\,;\, \frac{2}{3}\sin(\theta)(1+\cos(\theta))\right)\right\}$$

avec $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$.

Expliquons pourquoi la courbe obtenue est bien une cardioïde

Voyons maintenant pourquoi les segments tracés sont tous tangents à la cardioïde déterminée dans la partie précédente.



Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En calculant les affixes des vecteurs $\overrightarrow{A_\theta M_\theta}$ et $\overrightarrow{A_{2\theta} M_\theta}$, on démontre que les points A_θ, M_θ et $A_{2\theta}$ sont alignés. En effet :

$$\overrightarrow{A_\theta M_\theta}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos(\theta)(1+\cos(\theta)) - \frac{1}{3} - \cos(\theta) \\ \frac{2}{3}\sin(\theta)(1+\cos(\theta)) - \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_\theta M_\theta}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cos(\theta) + \frac{2}{3}\cos^2(\theta) - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{3}\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_{2\theta}M_\theta}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\cos(\theta)(1+\cos(\theta))-\frac{1}{3}-\cos(2\theta)\\ \\ \frac{2}{3}\sin(\theta)(1+\cos(\theta))-\sin(2\theta)\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{A_{2\theta}M_\theta}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\cos(\theta)(1+\cos(\theta))-\frac{1}{3}-2\cos^2(\theta)+1\\ \\ \frac{2}{3}\sin(\theta)(1+\cos(\theta))-2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{A_{2\theta}M_\theta}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\cos(\theta)-\frac{4}{3}\cos^2(\theta)+\frac{2}{3}\\ \\ -\frac{4}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)+\frac{2}{3}\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{A_{2\theta}M_\theta}=-2\overrightarrow{A_\theta M_\theta}$.

De plus en comparant la pente de la droite $(A_\theta A_{2\theta})$ à celle du vecteur tangent à la cardioïde en M_θ, on se rend compte qu'elles sont égales.

Calculons m_θ, la pente de la droite $(A_\theta A_{2\theta})$:

$$m_\theta=\frac{\sin(2\theta)-sin(\theta)}{\cos(2\theta)-\cos(\theta)}.$$

Calculons p_θ, la pente du vecteur tangent à la cardioïde en M_θ :

$$\begin{aligned}p_\theta&=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}\\&=\frac{\left(\frac{2}{3}\sin(\theta)(1+\cos(\theta))\right)'}{\left(\frac{2}{3}\cos(\theta)(1+\cos(\theta))-\frac{1}{3}\right)'}\\&=\frac{\frac{2}{3}\left(\cos(\theta)(1+\cos(\theta))+\sin(\theta)(-\sin(\theta))\right)}{\frac{2}{3}\left(-\sin(\theta)(1+\cos(\theta))+\cos(\theta)(-\sin(\theta))\right)}\\&=\frac{\cos(2\theta)+\cos(\theta)}{-\sin(2\theta)-\sin(\theta)}.\end{aligned}$$

En vérifiant que les produits en croix sont égaux, on montre aisément l'égalité des quotients.

On a alors $m_\theta=p_\theta$, les deux pentes sont égales. On en déduit que le segment $[A_\theta\,;A_{2\theta}]$ est tangent à la cardioïde au point M_θ.

Compléments

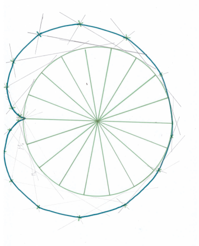
La cardioïde est une courbe apparaissant naturellement dans un bon nombre de phénomènes. Le joli site Math-curve les recense.

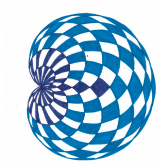
La façon de construire une cardioïde que nous étudions ici est dite « de Crémona ». Elle correspond à l'enveloppe des cordes $[PQ]$, où P et Q sont deux points parcourant le cercle dans le même sens, l'un allant deux fois plus vite que l'autre.

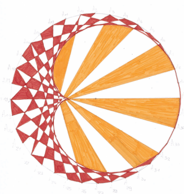
Parmi les propriétés de la cardioïde, on remarque également qu'elle est une épicycloïde : on peut l'obtenir en faisant rouler un cercle de rayon 1 à l'extérieur d'un cercle de rayon 1 et en observant la trajectoire d'un point du petit cercle. Les figures observées dans la vidéo sont obtenues en ne considérant plus seulement la multiplication par 2 mais les multiplications par des entiers k de plus en plus grands. On reconnaît (au moins pour des petites valeurs de k) l'épicycloïde obtenue en faisant rouler le cercle de rayon $\frac{1}{k}$ à l'extérieur d'un cercle de rayon 1. La propriété étudiée ici semble donc se généraliser.

La cardioïde peut être tracée de multiples façons, et on peut la faire construire par des élèves de 6e, notamment dans le cas $n=36$.

Anne-France Acciari est enseignante au collège Nelson Mandela à Illkirch et Mathias Zessin à l'INSA à Strasbourg. Ils se sont inspirés, pour cet article, d'un devoir maison donné aux étudiants de l'INSA par Jean-Romain Heu.







Sommaire du nº 527

La multiplication

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr