

Le bulletin de l'APMEP - N° 530

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2018

**Le demi-cercle (1)**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



***Au fil des maths***, c'est aussi une revue numérique augmentée :  
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

**À ce numéro est joint un appel à candidature pour le Comité National ou le bulletin de réabonnement « établissement ».**

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directrice de publication** : Alice ERNOULT.

**Responsable coordinatrice de l'équipe** : Lise MALRIEU.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, Marie-Astrid BÉZARD, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Vincent PANTALONI, Daniel VAGOST, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLEMENT, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Adrien GUINEMER, Jacques VALLOIS.

**Illustrateurs** : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

**Équipe T<sub>E</sub>Xnique** : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX

Dépôt légal : Décembre 2018. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



# Certains cercles sont vicieux

*Tout géométriques qu'ils soient au premier abord, les cercles mènent une existence propre en dehors du champ mathématique. C'est l'occasion d'en soulever le côté sombre, grâce au regard décalé de Claudie Asselain-Missenard.*

**Claudie Asselain-Missenard**

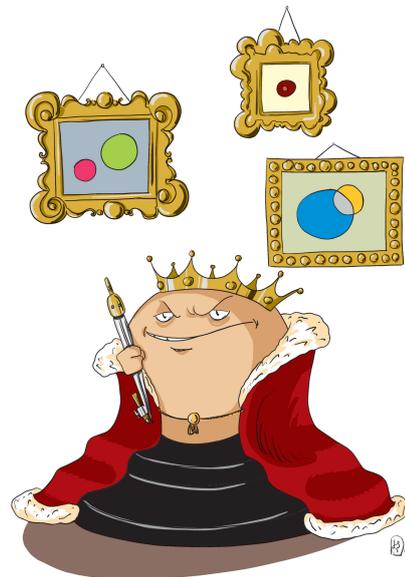
## Vices et vertus

Le cercle est le champion de l'esthétique. Une sorte de reine de beauté, sans doute le plus beau des objets géométriques. Cela le rend même un peu arrogant, de se promener comme ça, avec sa cour innombrable de symétries dont il ne se sépare jamais. Sans oublier son infinité de tangentes qui le serrent de près en toute occasion et l'enveloppent affectueusement.

Gardez-vous bien de vous fier complètement à cette belle apparence. Malgré ce physique avenant, le cercle est un être extrêmement fermé. Très renfermé, même. Il a une irrépressible tendance à se fermer sur lui-même. Plus grave encore, il conserve en son sein des points qui ne lui appartiennent même pas et qu'il empêche de sortir explorer le vaste plan sans la moindre légitimité.

Une preuve de plus qu'il se sent supérieur aux autres objets est sa résistance obstinée à se laisser mesurer. Non, les nombres entiers ne sont pas assez bons pour mesurer Monsieur, ni les décimaux, ni même les rationnels. N'est-ce pas la preuve de la plus grande des vanités, qu'il ait

ainsi fallu aller chercher un ensemble de nombres juste pour mesurer Monsieur. . .

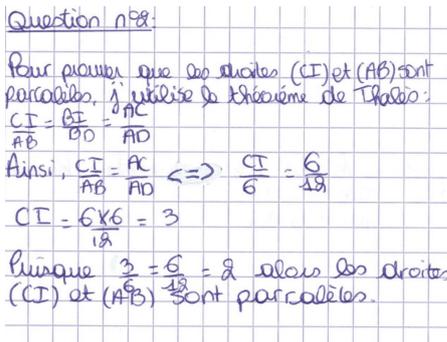


Et même s'il avait comme complice la diagonale du carré et qu'au final, d'autres en ont profité, on peut dire que le cercle a quand même drôlement donné du fil à retordre à des générations de mathématiciens. Vraiment, le cercle est un objet qui ne se laisse pas approcher facilement.



Mais, en plus des défauts ci-dessus mentionnés, faites très attention. Car le cercle est parfois vicieux. Oui, mesdames et messieurs, vicieux. Et je pèse mes mots !

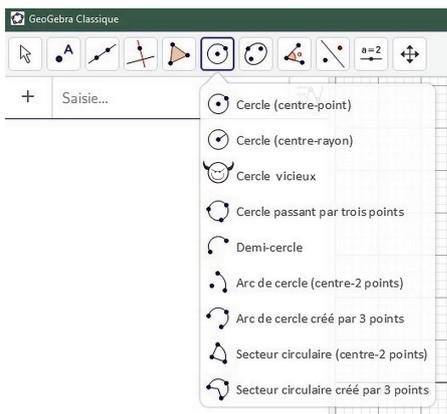
Tellement vicieux qu'il se plaît à tromper la jeunesse. Ainsi, certains de nos élèves adorent le cercle vicieux. Et le pratiquent avec enthousiasme.



Certains cercles vicieux sont si mal cachés qu'il est aisé de les percevoir.

*Qu'est-ce qu'une toise ? Une toise, c'est six pieds. Et qu'est-ce qu'un pied ? Le sixième de la toise.*

Mais parfois le cercle vicieux se dissimule un peu plus habilement et seul un observateur un peu attentif parvient à le déceler.



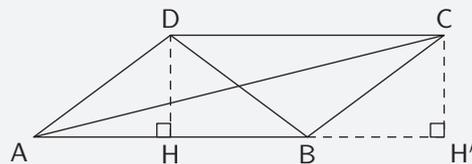
*Le théorème du parallélogramme est peu connu de nos jours et pourtant fort esthétique. Il affirme que si ABCD est un parallélogramme, la somme des carrés de ses diagonales est égale à la somme des carrés de ses côtés :*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

*Et ce qu'il y a de fantastique dans ce résultat, c'est qu'il apporte une démonstration très simple du théorème de Pythagore : dans le cas particulier où le parallélogramme ABCD est un rectangle, ses diagonales AC et BD sont égales. Le théorème du parallélogramme peut alors s'écrire :  $2AB^2 + 2BC^2 = 2AC^2$ . Concluez par vous-mêmes !*

Ce qui est un peu moins fantastique, c'est que, si on se penche sur des démonstrations élémentaires de ce théorème du parallélogramme, voilà ce qu'on rencontre le plus couramment. Regardons par exemple celle trouvée sur le site de l'APMEP, proposée par Frédéric de Ligt :

On trace la hauteur issue d'un sommet, notons-le D, du parallélogramme ABCD dont le pied H est situé dans le côté [AB], ce qui est toujours possible. On note H' le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle DHB rectangle en H et le triangle ACH' rectangle en H' :



$$DB^2 = DH^2 + (AB - AH)^2 \quad (1)$$

et  $AC^2 = CH'^2 + AH'^2$  ou encore, puisque les triangles ADH et BCH' sont égaux et donc que  $CH' = DH$  et  $BH' = AH$ ,

$$AC^2 = DH^2 + (AB + AH)^2 \quad (2)$$

On additionne membre à membre (1) et (2) :  $BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2DH^2 + 2AH^2 = 2AB^2 + 2BC^2$  et donc finalement

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Certes, on a démontré le théorème de Pythagore comme conséquence du théorème du parallélogramme, mais ce théorème est démontré ci-dessus... en utilisant le théorème de Pythagore. Moralité : dans ce monde merveilleux des mathématiques où l'équivalence des propriétés règne en maître, il faut un peu de vigilance pour éviter de tourner en rond avec la plus parfaite bonne foi. Et bâtir une axiomatique complète d'une théorie



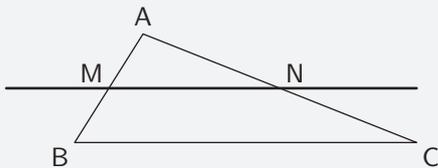


en se gardant des cercles vicieux est une activité difficile. Euclide (au III<sup>e</sup> siècle avant J-C) et Hilbert (au début du XX<sup>e</sup> siècle) l'ont fait pour la géométrie.

Quelquefois, un raisonnement facétieux semble imiter le cercle vicieux. Mais c'est juste une blague, pour embrouiller le client.

### Regardez par exemple la démonstration de la réciproque du théorème des milieux dans le triangle :

*Hypothèses : ABC est un triangle. M est le milieu de [AB]. La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N. À démontrer : N est le milieu de [AC].*



Soit N' le milieu de [AC]. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, (MN') est parallèle à (BC). Comme par M ne passe qu'une seule droite parallèle à (BC), les droites (MN) et (MN') sont confondues et donc N' = N, autrement dit N est le milieu de [AC].

Ce n'est que la démonstration (légitime) du théorème réciproque à l'aide du théorème direct. Sans doute à éviter devant un géomètre débutant si on ne veut pas le plonger dans la perplexité...

### Spirale infernale

Mon propos ne serait pas complet si j'oubliais d'évoquer la spirale infernale. Un genre de variante en dimension 3 de notre cercle vicieux. On peut même affirmer que la projection sur un plan d'une spirale infernale est un cercle vicieux (théorème branlant reposant sur des objets sans fondement). Mais de quoi s'agit-il au juste ? On en a une idée dès qu'on pénètre dans l'univers de la récursivité. Pensez à la malheureuse fonction : let  $f(x) = 1 + f(x + 1)$ , qui court éternellement vers le haut en cherchant à se définir. Mais pour trouver de bons exemples, je quitterai le champ des mathématiques pour prendre ces exemples

dans le champ de l'enseignement (des mathématiques).

### Spirale du découragement

Un enfant commence à avoir des difficultés. Il récolte pour la première fois une mauvaise note et un commentaire peu flatteur sur son travail. Au contrôle suivant, stressé par l'expérience précédente, il arrive encore moins à montrer ce qu'il sait. D'où commentaire encore un peu moins flatteur de l'enseignant. Et la spirale du découragement est enclenchée, l'élève se met à se penser lui-même comme nul en maths et le tour est joué.

### Le long déclin de l'enseignement des maths

Tout aussi dramatique, mais se jouant à une autre échelle, cette spirale s'est enclenchée dans notre système scolaire depuis un certain temps. On manque de professeurs motivés et qualifiés pour enseigner les mathématiques. Du coup, on diminue les horaires d'enseignement de la discipline. L'apprentissage se transforme alors en une course échevelée qui en largue plus d'un et diminue l'attractivité de la discipline. S'ensuit un désintérêt pour la discipline, d'où un accroissement de la difficulté à recruter de bons enseignants, crise de recrutement qui conduit à la diminution des horaires, qui...

Pas bien réjouissant tout cela. Certes, il serait urgent de redresser la situation. Mais redresser le cercle, vous n'y pensez pas ! Et pourquoi pas le quadraturer tant que vous y êtes ?



Claudie Asselain-Missenard, professeure retraitée, depuis très longtemps active au sein de l'APMEP, à la fois au niveau national et dans la Régionale Île-de-France. Auteure de nombreux articles, vous pouvez retrouver sa plume alerte dans le recueil « Humeurs et tableau noir » (éditions ACL-les éditions du Kangourou) et dans la nouvelle brochure de l'APMEP « Prof de Maths : un chouette métier ! ».

# Sommaire du n° 530

## Le demi-cercle (1)

### Éditorial

### Opinions

L'APMEP et la réforme du lycée — Bureau et Commission Lycée

Une rentrée pas comme les autres au lycée — Commission Lycée de l'APMEP

✦ Certains cercles sont vicieux — Claudie Asselain-Missenard

Confiance? — Serge Petit

### Avec les élèves

✦ Des animaux... compassés! — Yvan Monari

Le dispositif *Mathématiques* — Olivier Le Dantec et Marie Anackiewicz

✦ Les anneaux olympiques — Valérie Larose

✦ Le thaMographe — Thierry Delattre

Coup de cœur : « Facéties Mathémagiques »

Décomposition des nombres en maternelle — Laurence Le Corf

1 **Ouvertures** 41

3 ✦ Changement de regard sur le cercle — Caroline Bulf & Valentina Celi 41

3 ✦ Cercles discrets — François Boucher 50

5 **Récréations** 67

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 67

8 La semaine des mathématiques — Valérie Larose 69

11 L'alcool au volant — Michel Soufflet 71

17 ✦ Cercle limite — Olivier Longuet 73

**Au fil du temps** 75

21 ✦ Matériaux pour une documentation 75

28 ✦ Le cercle — Peut-on en faire toute une histoire? — Henry Plane 79

35 Anniversaires — Dominique Cambrésy 83

37 Élémentaire, mon cher Euclide! — Pierre Legrand 85



Culture**MATH**



APMEP

www.apmep.fr