

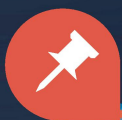
Le bulletin de l'APMEP - N° 529

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Juillet, Août, Septembre 2018

La différenciation



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette *Visages de l'APMEP.*

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Alice ERNOULT.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Marie-Astrid BÉZARD, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Jean-Marie MARTIN, Pierre MONMARCHÉ, Vincent PANTALONI, Daniel VAGOST, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Adrien GUINEMER.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Olivier REBOUX, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX

Dépôt légal : Septembre 2018

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

Les cryptarithmes



Derrière le mot mystérieux de « cryptarithmes » se cachent de jolies énigmes ne nécessitant que des connaissances élémentaires sur les opérations, et qui ont eu leur heure de gloire il y a une centaine d'années. Pierre Legrand nous les fait (re)découvrir dans cet article. Vous en trouverez une version légèrement différente dans le n° 58 de MathemaTICE, enrichie par Patrick Raffinat de considérations algorithmiques et informatiques ▶.

Pierre Legrand

Les récréations arithmétiques ont un passé vieux d'au moins deux millénaires, mais elles ont évolué avec le temps. Celles qu'a connues l'Antiquité grecque portaient le plus souvent sur des problèmes du premier degré tels qu'en utilisa jadis notre certificat d'études. Puis sont venus au fil du temps des casse-têtes plus variés et souvent plus complexes.

Un des types les plus élémentaires d'énigme arithmétique, les additions et multiplications lacunaires ou masquées, n'a pourtant fait une timide entrée¹ qu'à la fin du XIX^e siècle. Les exemples se sont multipliés dans la première moitié du XX^e siècle et ce type de jeu a connu alors une vogue certaine, avant de retomber dans un relatif oubli.

Notons cependant que les jeux venus récemment du Japon, comme le sudoku, le bento ou le fubuki, ont avec les problèmes dont nous allons parler une parenté certaine.

Quel intérêt pour les élèves ?

Les cryptarithmes², puisque tel est leur nom, ne font appel qu'à un strict minimum de notions mathématiques : les quatre opérations, le maniement des inégalités, la divisibilité, des rudiments sur les congruences (qu'on peut toujours remplacer par l'étude des restes de division par 2, 5, 10, 100 ou 1 000) et à l'occasion le raisonnement par l'absurde. Ils sont donc marginaux par rapport aux programmes des classes.

En revanche, ils demandent de la méthode, une certaine ingéniosité et la capacité d'utiliser plusieurs idées différentes pour parvenir à un résultat. S'ils ne contribuent guère à consolider les connaissances, ils constituent, outre un agréable passe-temps, un bon entraînement à l'autonomie de raisonnement.

1. Une partie de ce retard s'explique par le temps qu'ont mis la numération décimale et les règles de calcul allant avec elle pour entrer vraiment dans les mœurs.

2. Du grec : κρυπτος (*kryptos*, caché) et αριθμος (*arithmos*, nombre). Le terme daterait de 1931.



Un modèle simple : les additions lacunaires

Il s'agit de reconstituer une addition dans laquelle certains chiffres ont été masqués.

Selon le nombre de chiffres occultés, le travail peut être immédiat ou demander un peu de réflexion. Si on se limite à des exercices où manquent au plus deux chiffres, ce type de jeu peut être utilisé au cours moyen ou en sixième pour consolider la maîtrise de l'addition et de la soustraction et approfondir la compréhension de leurs mécanismes.

Quelques exemples élémentaires

En voici quatre qui, vu leur simplicité, sont donnés sans justification de leur solution :

$174 + 2 \blacksquare 8 = 40 \blacksquare$	$71 + 9 \blacksquare = \blacksquare 65$
$174 + 228 = 402$	$71 + 94 = 165$
$1 \blacksquare 6 \blacksquare + \blacksquare 3 \blacksquare 7 = 5073$	$7 + \blacksquare \blacksquare = \blacksquare \blacksquare 3$
$1766 + 3307 = 5073$	$7 + 96 = 103$

Chacun de ces exemples peut être présenté de trois façons : une addition ($x + y = z$) comme ci-dessus et deux soustractions ($z - x = y$, $z - y = x$).

Un exemple un peu plus complexe

Soit à compléter $1 \blacksquare 8 \blacksquare + \blacksquare 4 \blacksquare 5 = \blacksquare \blacksquare 721$.

Le premier membre est inférieur à $2\,000 + 9\,500$, soit $11\,500$. Le second membre est donc au plus égal à $10\,721$, mais comme il a 5 chiffres et se termine par 721, c'est $10\,721$.

On est donc ramené à $1 \blacksquare 8 \blacksquare + \blacksquare 4 \blacksquare 5 = 10\,721$. La considération du chiffre des unités mène à $1 \blacksquare 86 + \blacksquare 4 \blacksquare 5 = 10\,721$, dont on déduit $1 \blacksquare 80 + \blacksquare 4 \blacksquare 0 = 10\,710$. On est ainsi ramené à $1 \blacksquare 8 + \blacksquare 4 \blacksquare = 1\,071$. Le chiffre des unités de $\blacksquare 4 \blacksquare$ est donc 3.

De $1 \blacksquare 8 + \blacksquare 43 = 1\,071$ on déduit immédiatement $1 \blacksquare 0 + \blacksquare 40 = 1\,060$, donc $1 \blacksquare + \blacksquare 4 = 106$. On

en tire aisément que les deux chiffres manquants sont respectivement 2 et 9.

Finalement, l'addition reconstituée est :

$$1\,286 + 9\,435 = 10\,721.$$

Et les multiplications lacunaires ?

Là encore des exemples simples permettent d'exercer les élèves.

Cela va du très simple $25 \times \blacksquare = 17 \blacksquare$ au déjà plus sophistiqué $5 \blacksquare \times \blacksquare 7 = 1 \blacksquare \blacksquare 6$ ($58 \times 27 = 1\,566$), qui exige de se rappeler que dans la table de multiplication par 7 le seul cas où le produit finit par 6 est 8×7 ; il reste ensuite à essayer les produits de 58 par 17, 27 et 37.

Les additions cryptées

Dans la résolution des problèmes précédents, nous avons été un peu gênés par le fait que les chiffres manquants dans l'égalité de départ étaient représentés par le même symbole. Il aurait sans doute été plus commode de leur donner à chacun un nom.

Cela nous mène à l'idée d'*addition cryptée*, où chaque chiffre est représenté par une lettre, toujours la même, deux chiffres différents étant représentés par deux lettres différentes, la lettre la plus à gauche de l'écriture d'un nombre ne représentant jamais zéro.

Nous donnons ci-après, dans l'ordre de difficulté croissante, des problèmes dont tous les chiffres sont cryptés. Nous utiliserons les conventions d'écriture suivantes :

- Une écriture décimale comportant au moins deux symboles dont au moins une lettre est surignée : ainsi $\overline{A2B}$ désigne le nombre dont A est le chiffre des centaines, 2 celui des dizaines, B celui des unités.



- Une écriture décimale comportant la seule lettre O est surlignée, de façon à bien distinguer du zéro (0) le nombre représenté par la seule lettre $\overline{O}$.
- Afin d'éviter toute confusion, les produits sont toujours désignés par le symbole $\times$: on peut ainsi distinguer nettement $2 \times N$ de $\overline{2N}$.

Un exemple simple : $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{CDA}$

$\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ sont strictement inférieurs à 100, donc leur somme l'est à 200, donc $C = 1$.

En regardant le chiffre des unités du total on obtient alors $A = 2$.

$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{CDA}$ s'écrit donc

$$20 + 1 + 10 \times B + 1 = 100 + 10 \times D + 2,$$

soit $10 \times (B - D) = 80$, donc $B = D + 8$, donc $D = 0$, $B = 8$ ($D \neq 1$ car $D \neq C$).

Finalement : **$21 + 81 = 102$** .

Hésitation : $\overline{NON} + \overline{NON} = \overline{OUI}$

On a évidemment $\overline{NON} < 500$, donc $N \leq 4$.

Dans l'addition des unités il ne peut y avoir de retenue, car $N + N \leq 8$, donc $I = N + N$, ce qui permet de supprimer dans l'égalité le chiffre des unités :

$$\overline{NO} + \overline{NO} = \overline{OU}.$$

Si l'addition $\overline{O} + \overline{O}$ ne donnait pas lieu à retenue, on aurait $\overline{O} = N + N$, donc $\overline{O} = I$, ce qui est à exclure. Il y a donc une retenue et l'on a : $\overline{O} = 2 \times N + 1$ et $\overline{O} + \overline{O} = U + 10$.

De $I = 2 \times N$ et $\overline{O} = 2 \times N + 1$ on tire $U = 4 \times N - 8$. De $U \geq 0$ on tire $N \geq 2$. Or on a vu que $N \leq 4$; donc $N \in \{2; 3; 4\}$. Mais $N = 4$ entraîne $I = U = 8$, ce qui est exclu.

- Supposons $N = 2$. On a $I = 4$, $\overline{O} = 5$, $U = 0$. On est conduit à **$252 + 252 = 504$** , qui convient manifestement.
- Supposons maintenant $N = 3$. Alors $\overline{O} = 7$, $I = 6$, $U = 4$. Il vient **$373 + 373 = 746$** , qui convient aussi. On a donc ici deux solutions.

Revirement : $\overline{OUI} + \overline{OUI} = \overline{NON}$

On démarre de la même façon : $\overline{OUI} < 500$, donc $\overline{O} \leq 4$. $\overline{NON}$ est forcément pair, donc aussi N .

Si l'addition des dizaines donnait lieu à retenue, la considération des centaines donnerait $N = 2 \times \overline{O} + 1$ et N serait impair. Il n'y a donc pas de retenue dans l'addition des dizaines et l'on peut séparer le problème en deux : $2 \times \overline{O} = N$ et $\overline{UI} + \overline{UI} = \overline{ON}$.

De $N = 2 \times \overline{O}$ résulte $\overline{ON} = 12 \times \overline{O}$, d'où $\overline{UI} = 6 \times \overline{O}$.

Il y a quatre valeurs à essayer :

- $\overline{O} = 1$ donne $N = 2$, $U = 0$, $I = 6$ ce qui amène à **$106 + 106 = 212$** , qui convient.
- $\overline{O} = 2$ donne $\overline{UI} = 12$, donc $I = \overline{O}$, qui est à exclure.
- $\overline{O} = 3$ donne $\overline{UI} = 18$, d'où **$318 + 318 = 636$** , qui convient.
- $\overline{O} = 4$ donne $\overline{UI} = 24$, donc $I = \overline{O}$, qui est à exclure.

On a là encore deux solutions.

Imbuvable : $\overline{COCA} + \overline{COLA} = \overline{OASIS}$

$\overline{COCA} < 10\,000$ et $\overline{COLA} < 10\,000$, donc $\overline{OASIS} < 20\,000$ et $\overline{O} = 1$. A n'est donc pas 1.

Si A était nul, le chiffre des unités montre que S serait nul aussi. Donc $A \geq 2$.

On a $\overline{COCA} + \overline{COLA} > 12\,000$. Si on avait $C \leq 5$, on aurait $\overline{COCA} + \overline{COLA} < 2 \times 6\,000$. Donc $C \geq 6$. En regardant le chiffre des unités, on voit que S vaut $A + A$ ou $A + A - 10$, donc S est pair.

- Le chiffre S des centaines d' $\overline{OASIS}$, lu sur le membre de gauche de l'égalité, est $\overline{O} + \overline{O} + \varepsilon$, avec ε valant 1 ou 0 selon que l'addition des dizaines a donné lieu à retenue ou non; donc $S = 2 + \varepsilon$. Et comme S est pair, on arrive à $S = 2$ (et $\varepsilon = 0$).
- Considérons à nouveau le chiffre des unités. On obtient $S = A + A$ ou $S = A + A - 10$; le premier cas donnerait $A = 1$, qui a été exclu; S vaut donc $A + A - 10$, d'où $A = 6$.





- Comme l'addition des dizaines n'a pas donné lieu à retenue (on a vu que $\varepsilon = 0$), le problème se sépare en deux : $\overline{CO} + \overline{CO} = \overline{OAS}$ et $\overline{CA} + \overline{LA} = \overline{IS}$.

La première égalité se ramène à $\overline{C1} + \overline{C1} = 162$, qui donne $C = 8$. La seconde s'écrit alors $86 + 10 \times L + 6 = 10 \times I + 2$; après réduction et division par 10, on obtient $9 + L = I$, qui impose $L = 0$ et $I = 9$.

La réponse est donc **$8186 + 8106 = 16292$** , dont on vérifie qu'elle convient.

Une somme de trois termes :

$$\overline{UN} + \overline{UN} + \overline{NEUF} = \overline{ONZE}$$

- $\overline{ONZE} > \overline{NEUF}$ donne $\overline{O} \geq N$;
comme $\overline{O} \neq N$, on a $\overline{O} \geq N + 1$; si on avait $\overline{O} \geq N + 2$, on aurait $\overline{ONZE} - \overline{NEUF} > 1\,000$, alors que $\overline{UN} + \overline{UN} < 200$; donc $\overline{O} = N + 1$.
- Le problème se ramène alors à :

$$\overline{UN} + \overline{UN} + \overline{EUF} = 1\,000 + \overline{NZE} ;$$

le second membre est supérieur à 1 100, donc $\overline{EUF} > 900$, ce qui donne $E = 9$; on arrive ainsi à : $\overline{UN} + \overline{UN} + \overline{UF} = 100 + \overline{NZE}$.

- $\overline{UN} + \overline{UN} + \overline{UF} < 300$, donc $\overline{NZE} < 200$ et $N = 1$; mais $\overline{O} = N + 1$, donc $\overline{O} = 2$.
- Reportons maintenant les valeurs de N et E dans $\overline{UN} + \overline{UN} + \overline{UF} = 100 + \overline{NZE}$. On obtient : $30 \times U + 2 + F = 200 + 10 \times Z + 9$.
Le chiffre des unités donne $F = 7$. Après réduction et simplification par 10, il nous reste alors $3 \times U = 20 + Z$. Donc $U \geq 7$; mais U ne peut valoir 7, qui est F , ni 9, qui est E . Ainsi $U = 8$ et $Z = 4$.

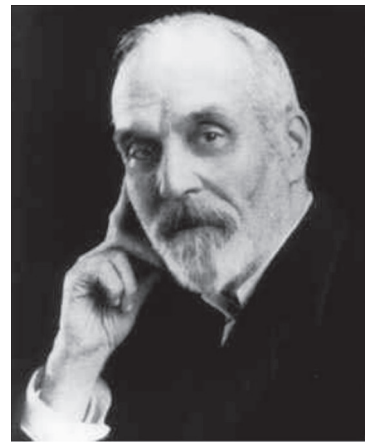
La seule possibilité reste **$81 + 81 + 1987 = 2149$** , qui convient bien.

Un problème espagnol :

$$\overline{DOS} + \overline{DOS} + \overline{TRES} = \overline{SIETE}$$

La recherche est laissée aux soins du lecteur. La réponse est **$581 + 581 + 9231 = 10393$** ; les premiers résultats accessibles sont $S = 1$, $I = 0$, $E = 3$.

Le problème fondateur



La mode des additions cryptées et plus généralement des cryptarithmes fut lancée en juillet 1924 par un casse-tête d'Henry Dudeney sorti dans le Strand Magazine, la revue mensuelle qui publiait les aventures de Sherlock Holmes.

L'auteur (ci-dessus) raconte l'histoire d'un jeune homme qui, à court d'argent, télégraphie à son père « SEND MORE MONEY ». Il s'agit en fait d'une addition, où chaque lettre représente un chiffre différent : $\overline{SEND} + \overline{MORE} = \overline{MONEY}$

Première étape :

$\overline{SEND} + \overline{MORE} < 10\,000 + 10\,000$, donc $\overline{MONEY} < 20\,000$, et $M = 1$; mais alors $\overline{MORE} < 2\,000$ et $\overline{SEND} + \overline{MORE} < 12\,000$, donc $\overline{O}$ vaut 0 ou 1 et, comme $M = 1$, on a $\overline{O} = 0$; de $\overline{MONEY} \geq 10\,234$ et $\overline{MORE} \leq 1\,098$ on tire : $\overline{SEND} \geq 10\,234 - 1\,098$, soit $\overline{SEND} \geq 9\,136$, donc $S = 9$.

Deuxième étape :

on a donc :

$$9\,000 + \overline{END} + 1\,000 + \overline{RE} = 10\,000 + \overline{NEY},$$



ce qui ramène à un problème de taille plus modeste où, puisque $\overline{O} = 0$, $M = 1$ et $S = 9$, les chiffres représentés par les lettres restantes sont à prendre dans $\llbracket 2; 8 \rrbracket$: $\overline{END} + \overline{RE} = \overline{NEY}$.

$\overline{NEY}$ s'obtient en ajoutant à $\overline{END}$ un nombre inférieur à 100, donc $N = E + 1$. Il vient alors $\overline{ND} + \overline{RE} = \overline{EY} + 100$ puis $\overline{ED} + \overline{RE} = \overline{EY} + 90$, d'où : $D + \overline{RE} = Y + 90$.

Troisième étape : de $D + \overline{RE} > 90$ et $R \neq 9$, on tire $R = 8$. $D + \overline{RE} = Y + 90$ devient alors $D + E = Y + 10$, les chiffres D , E , Y étant à prendre dans $\llbracket 2; 7 \rrbracket$.

On a $D + E \leq 7 + 6$, donc Y vaut 2 ou 3. Si on avait $Y = 3$, on aurait : soit ($D = 7$, $E = 6$), ce qui est exclu car on aurait $D = E + 1$, donc $D = N$; soit ($D = 6$, $E = 7$), ce qui donnerait $N = 8$, donc $N = R$.

La seule possibilité est donc $Y = 2$, qui donne $D = 7$, $E = 5$ ou $D = 5$, $E = 7$; mais la seconde éventualité est exclue, car menant à $N = 8 = R$.

Reste à voir que l'unique possibilité restante convient bien.

On vérifie : $9567 + 1085 = 10652$.

Multiplications cryptées ou lacunaires

Les problèmes de multiplication cryptée ou lacunaire concernent le plus souvent des opérations « posées » faites à la main. Le nombre élevé de symboles mis en jeu rend ces énigmes plus difficiles que les problèmes d'addition. Elles amènent à utiliser abondamment la divisibilité et/ou les congruences modulo une puissance de 10.

Très simple : une puissance quatrième

$$\overline{ABC} = C^4$$

On a $100 < C^4 < 1\,000$, donc $\sqrt[4]{100} < C < \sqrt[4]{1000}$, ce qui donne $3,16 < C < 5,63$. C vaut donc 4 ou 5, mais le chiffre des unités de C^4 étant C , on a $C = 5$. On a bien $625 = 5^4$.

Assez simple

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & A & C \end{array} \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & A & \\ * & * & * & B \\ \hline * & * & * & * & * & * \end{array}$$

- La ligne donnant $\overline{ABC} \times A = \overline{**A}$ est plus courte que les deux autres. A est donc strictement inférieur à B et C (qui sont donc au moins égaux à 2).
- De $\overline{ABC} \times A = \overline{**A}$ on déduit que le chiffre des unités de $C \times A$ est A ; autrement dit $C \times A - A$ est multiple de 10. *A fortiori*, 5 divise $(C-1) \times A$, donc il divise A ou C , donc ou bien $A = 5$ ou bien $C = 6$.

Le même raisonnement appliqué à l'égalité $\overline{ABC} \times B = \overline{***B}$ prouve que $B = 5$ ou $C = 6$. $C \neq 6$ donnerait $A = B = 5$. Finalement $C = 6$.

- Nous savons que 10 divise $(C-1) \times A$ et $(C-1) \times B$, soit $5 \times A$ et $5 \times B$; A et B sont donc pairs : ils valent 2, 4 ou 8; comme $A < B$, A vaut 2 ou 4; si A valait 4, $\overline{ABC} \times A$ vaudrait au moins 400×4 et aurait donc quatre chiffres; on en conclut que $A = 2$.
- B vaut donc 4 ou 8. Mais $B = 4$ impliquerait $\overline{ABC} \times B = 246 \times 4 = 984$, alors que ce produit est censé avoir quatre chiffres. Finalement on arrive au résultat : $286 \times 826 = 236\,236$, dont on vérifie qu'il convient bien.



Un exemple historique



La revue belge **Sphinx**, entièrement consacrée aux récréations mathématiques et logiques, fut fondée en 1931 par Maurice Kraitchik, spécialiste notoire de théorie des nombres. Elle connut un certain succès international jusqu'en 1939, mais périt victime de la guerre³. C'est dans **Sphinx** que fut publié en mai 1931 le premier exemple de multiplication cryptée, qui est donné ci-dessous.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ & D & E \\ \hline F & E & C \end{array} \\ \begin{array}{ccc} D & E & C \\ \hline H & G & B & C \end{array} \end{array}$$

- $D \times \overline{ABC}$ et $E \times \overline{ABC}$ finissent tous deux par $\overline{EC}$, donc 100 divise $(D - E) \times \overline{BC}$; il en résulte que 25 divise $\overline{BC}$ ou 5 divise à la fois $\overline{BC}$ et $D - E$; dans les deux cas cela donne $C = 5$ ou $C = 0$.
- En regardant l'addition des dizaines dans le détail de l'opération, on voit que $E + C = B$; donc $C = 0$ entraînerait $E = B$, d'où $C = 5$.
- 4 divise $(D - E) \times \overline{BC}$ et est premier avec $\overline{BC}$ puisque $C = 5$, donc 4 divise $(D - E)$, qui vaut ainsi 4, -4, 8 ou -8.

- 25 divise $(D - E) \times \overline{BC}$ et est premier avec $D - E$ donc il divise $\overline{BC}$, qui se termine par 5; les multiples impairs de 25 se terminent par 25 ou 75, donc B vaut 2 ou 7.
- $\overline{ABC}$ est multiple de 25, donc il en est de même pour $\overline{FEC} = \overline{ABC} \times E$ et $\overline{FEC}$ est impair puisque se terminant par un 5. $\overline{EC}$ vaut donc 25 ou 75; mais si on avait $E = 2$ le produit $E \times \overline{ABC}$ serait pair alors que c'est l'impair $\overline{FEC}$.
- On a donc : $\overline{EC} = 75$, $\overline{BC} = 25$ soit $B = 2$, $C = 5$, $E = 7$; on a vu en outre que $D - E$ est ± 4 ou ± 8 ; comme $E = 7$, la seule possibilité est $D = 3$.
- De $\overline{ABC} \times D = \overline{DEC}$ on tire $\overline{ABC} \times 3 = 375$, donc $\overline{ABC} = 125$. Comme $\overline{DE} = 37$, la solution est bien déterminée. Mais on a procédé par conditions nécessaires; il reste à vérifier que cette solution convient bien :

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ & 3 & 7 \\ \hline 8 & 7 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 3 & 7 & 5 \\ \hline 4 & 6 & 2 & 5 \end{array} \end{array}$$

Un autre exemple tiré de Sphinx

L'exemple ci-après (de janvier 1934) est assez curieux, car à la multiplication présentée est adjointe une mention qui à première vue semble anodine : « Tous les 3 sont indiqués », mais qui en fait doit être utilisée à deux reprises.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} * & * & 3 & * \\ & * & * & 3 \\ \hline 3 & * & * & * \end{array} \\ \begin{array}{cccc} * & * & * & 3 & 3 \\ * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * & * \end{array} \end{array}$$

3. Kraitchik, qui était juif, émigra en 1939 pour des raisons évidentes et passa la guerre aux États-Unis.



Explicitons par des lettres (qui ici représentent des chiffres *a priori* non forcément distincts) les deux nombres dont on fait le produit :

$$\overline{AB3C} \times \overline{PQ3}.$$

- De $\overline{AB3C} \times 3 = \overline{3***}$ on tire $A = 1$ et $B \leq 3$; B n'étant pas 3 (exclu par l'énoncé) vaut donc 0, 1 ou 2.
- De la seconde ligne de produits partiels, $\overline{1B3C} \times Q = \overline{***33}$, on déduit immédiatement que $Q \geq \frac{10\,033}{1\,239} \approx 8,09$; donc $Q = 9$; le chiffre des unités dans $\overline{1B3C} \times 9 = \overline{***33}$ montre que $C = 7$.
- Si on avait $B = 0$, on aurait $\overline{1037} \times 9 = 9\,333$, alors que ce produit devrait avoir cinq chiffres (et a un 3 de trop); donc $B = 1$ ou $B = 2$.
- Le produit $\overline{1B37} \times \overline{P93}$ a sept chiffres, donc est au moins égal à 1 000 000; on a donc : $\overline{P93} \geq \frac{1\,000\,000}{1\,237}$, d'où $\overline{P93} \geq 808$; P vaut donc 8 ou 9; mais si P valait 9, on aurait : $\overline{1B37} \times 9 \geq 1\,137 \times 9 = 10\,233$ et $\overline{1B37} \times P$ aurait cinq chiffres alors qu'il en a quatre; on a donc $P = 8$.
- Il reste donc à essayer $1\,137 \times 893$ et $1\,237 \times 893$. On voit ci-dessous que la première éventualité ne convient pas, à cause du 3 figurant dans 1 015 341 :

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 3\ 7 \\ 8\ 9\ 3 \\ \hline 3\ 4\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 2\ 3\ 3 \\ 9\ 0\ 9\ 6 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 5\ 3\ 4\ 1 \end{array}$$

En revanche, $1\,237 \times 893$ répond à toutes les conditions imposées :

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 7 \\ 8\ 9\ 3 \\ \hline 3\ 7\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 3\ 3 \\ 9\ 8\ 9\ 6 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 4\ 6\ 4\ 1 \end{array}$$

Un problème⁴ de congruences

$$\overline{MATH} \times \overline{MATH} = \overline{****MATH}$$

Posons $x = \overline{MATH}$. La principale information que nous ayons est $x^2 \equiv x \pmod{10\,000}$: 10^4 divise donc $x(x-1)$; x et $x-1$ sont premiers entre eux, donc chacun des deux nombres 2^4 et 5^4 divise x ou $x-1$. Ils ne peuvent diviser le même, car x serait supérieur ou égal à 10 000, alors qu'il n'a que quatre chiffres.

Donc : ou 625 divise x et 16 divise $x-1$, ou 625 divise $x-1$ et 16 divise x .

Premier cas : 625 divise x et 16 divise $x-1$.

Posons $x = 625h$; de $625 \equiv 1 \pmod{16}$ on tire $x \equiv h \pmod{16}$. On veut que $x-1$ soit multiple de 16, donc que h soit de la forme $16u+1$ et $x = 625 \times (16u+1)$. La plus petite valeur est 625, qui n'a pas assez de chiffres, la suivante est 625×17 , soit 10 625, qui a trop de chiffres.

Second cas : 625 divise $x-1$ et 16 divise x .

Posons $x = 625k+1$; de $625 \equiv 1 \pmod{16}$ on déduit $k+1 \equiv 0 \pmod{16}$. Pour $k = 15$ on a $x = 625 \times 15 + 1 = 9\,376$. Les autres valeurs de k fournissent pour x des écritures à au moins cinq chiffres, donc exclues. Reste donc à examiner si $\overline{MATH} = 9\,376$ convient. La seule condition à vérifier est que le carré de $\overline{MATH}$ ait huit chiffres. Or $9\,376^2 = 87\,909\,376$, ce qui règle la question.

Pour finir : hommage à une gloire nationale

$$\begin{array}{r} S\ E\ X \\ S\ E\ X \\ \hline B\ * \ * \ * \\ B\ * \ * \ * \\ * \ * \ * \ * \\ \hline B\ A\ R\ D\ O\ T \end{array}$$

Cette énigme, plus difficile que les précédentes, date des alentours de 1960. Signalons qu'elle repose en partie sur la preuve par 9.

Chacune des lettres représente un chiffre différent, autre que zéro.

4. Une généralisation de ce problème a été publiée dans le Bulletin n° 484, pages 584-588, sous le titre « Nombres rimant avec leur carré » .



La résolution en est laissée à la bonne volonté de chacun. Le lecteur fatigué pourra trouver une solution entièrement tricotée main sur le site de l'APMEP sous le titre : « Hommage à Brigitte Bardot »⁵.

Conclusion

Ces exemples⁶ l'ont, je pense, montré : les méthodes utilisées pour résoudre ces problèmes demandent de la patience et une certaine ingéniosité, mais elles sont assez peu variées. En outre un informaticien objectera que, dans chacune de ces énigmes, le nombre d'éventualités à examiner est fini. On en connaît même une borne : si l'opération à reconstituer contient n chiffres inconnus, il y a au plus 10^n possibilités. Un petit programme doit donc pouvoir régler aisément la question.

C'est irréfutable. Mais on peut aussi se poser une question du même genre : pourquoi se fatiguer à faire des randonnées à pied alors qu'il existe des véhicules automobiles ?

Sitographie

- [1] *Récréomath*. Ce site donne cent cryptarithmes additifs faciles. Un seul défaut : la plupart des problèmes ont plusieurs solutions.
- [2] *Cryptarithms Online*. Les réponses sont données tout à la fin, sans justification. De bons problèmes additifs et multiplicatifs, classés par ordre de difficulté. Éviter les problèmes de division : les notations anglo-saxonnes de la division sont déroutantes.
- [3] *Truman Collins' Index Page*. Donne plusieurs centaines de cryptarithmes additifs, avec une indication sur la difficulté (note de 1 à 5 dans le sens croissant). Les réponses sont données par un *puzzle solver*, mais pas le raisonnement. Se limiter aux notes 1 ou 2, exceptionnellement 3. Le lecteur sceptique quant à cette restriction pourra se faire les dents sur l'exemple ci-après, de difficulté 4 :
DEGAS + INGRES + MANET + MATISSE = ARTISTS.
- [4] *Site de Nicolas Graner*. Site français qui donne une soixantaine de cryptarithmes additifs assez difficiles. Les réponses sont données.

.....◆.....

Pierre Legrand a depuis longtemps un rôle actif au sein de l'APMEP. Il a écrit de nombreux articles dans le Bulletin Vert.

p.m.legrand@sfr.fr

© APMEP Septembre 2018

5. Adresse : <https://afdm.apmep.fr/rubriques/sommaire/n529-la-differenciation>.

6. Je remercie vivement Catherine Combelles, qui a vérifié les solutions de ces exercices et a rectifié plusieurs erreurs.

Sommaire du n° 529

La différenciation

Éditorial

Opinions

Le rapport Villani-Torossian : un rendez-vous à ne pas manquer — Alice Ernoult

Tous aux JN ! — Arnaud Durand et Olivier Longuet

Comment j'ai choisi l'écriture inclusive — François Sauvageot

Courrier des lecteurs. Les paquets de sucre. — Olivier Le Dantec

Avec les élèves

★ La table d'appui, un dispositif à découvrir — Claire Lommé

★ WIMS, une réponse à PISA et à Mission maths — Jean-Pierre Gerbal

Tac Tic Maths — Anne Bouchard, Agnès Veyron

★ Des couleurs pour un parcours — Lise Malrieu

1 ★ Différencier avec les « intelligences multiples » — Claudine Chevalier 38

3 **Ouvertures** 45

3 ★ Différencier en début de cycle 2 — Serge Petit 45

6 Polynômes tordus — Xavier Caruso 52

9 **Récréations** 61

Les cryptarithmes — Pierre Legrand 61

11 Un problème de Papy Michel — Michel Soufflet 69

15 Plancher pour « Bulles au carré » — Anne-France Acciari 72

Au fil du temps 74

Matériaux pour une documentation 74

19 Anniversaires — Dominique Cambrésy 76

25 Fourier : une équation, un inconnu — Alain Juhel 78



Culture**MATH**

