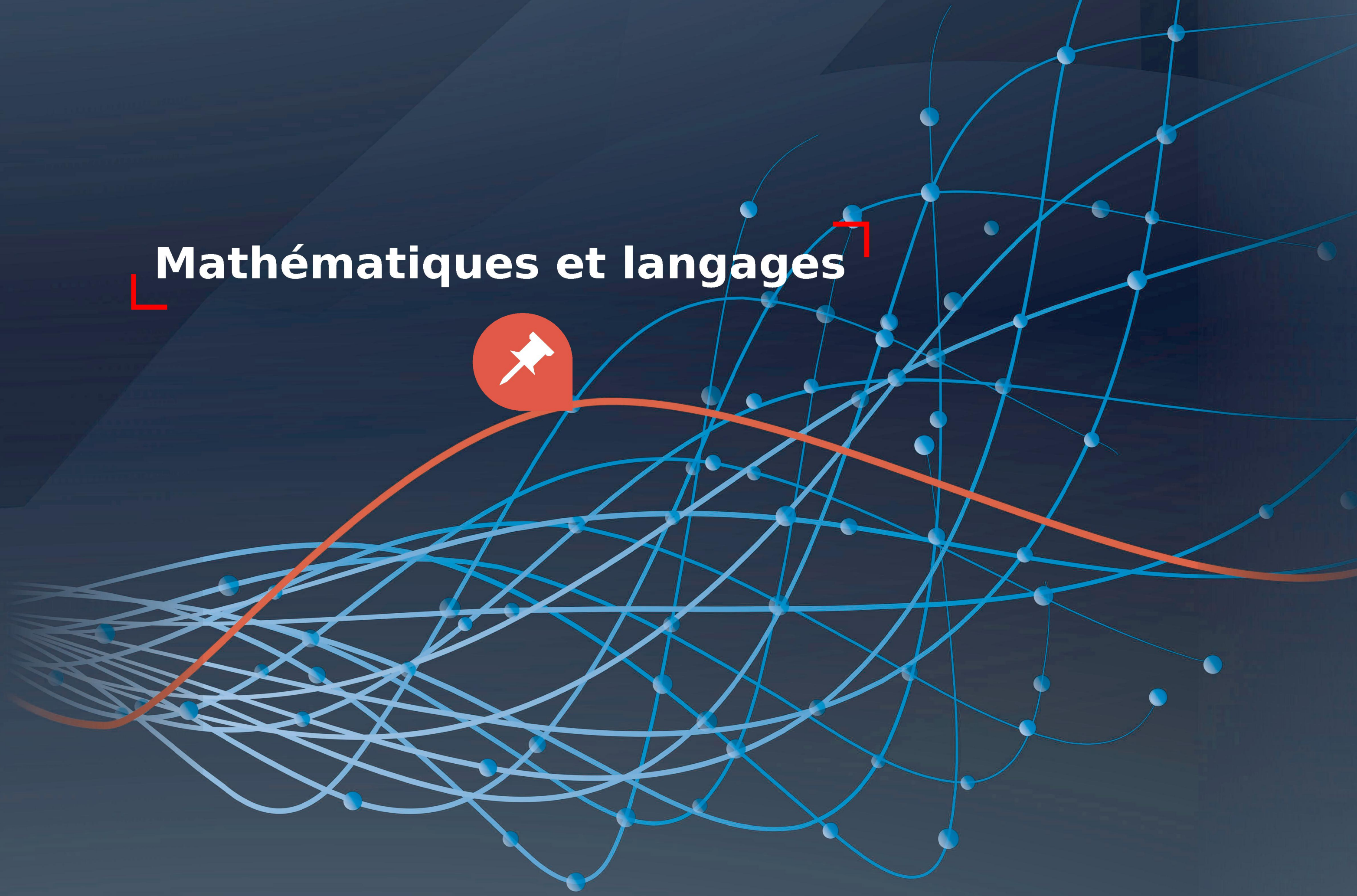
Le bulletin de l'APMEP - N° 528

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Avril, Mai, Juin 2018

Mathématiques et langages



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Valérie LAROSE vali.larose@gmail.com

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX
Dépôt légal : Juin 2018
Impression : Imprimerie Horizon P.A. de la plaine de Jouques 200 avenue de Coulin
13420 GEMENOS
ISSN : 2608-9297

Vrai ou faux ? Parlons-en !

En mathématiques, nous avons des usages langagiers. Les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques et la façon dont on en parle. Quelle compréhension ont-ils des implicites de nos formulations ? Comment travailler ces questions ? Étude d'un cas : la quantification implicite de l'implication.

Emmanuelle Forgeoux & Christophe Hache

Comme tout groupe social constitué, les mathématiciens ont des pratiques langagières qui leurs sont propres. Les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques (en général par un travail explicite avec l'enseignant) et la façon dont on en parle, sans que soit généralement interrogée explicitement et collectivement cette façon de dire les mathématiques (pourtant indissociable de la façon dont on les pense).

L'expérimentation présentée ici a eu lieu dans le cadre de la commission inter-IREM « Lycée » : nous avons choisi de nous centrer sur la notion complexe d'implication.

> Nous avons encore restreint le champ d'investigation en travaillant sur un des constats souvent effectué au sujet de l'implication : le fait qu'une implication formulée par un mathématicien est toujours quantifiée universellement.

Il est bien sûr possible d'écrire une implication non quantifiée (par exemple « 2 pair $\Rightarrow$ 3 impair »), mais les implications qui sont travaillées en mathématiques sont, de façon très générale, quantifiées universellement implicitement (par exemple « n pair $\Rightarrow n + 1$ impair » ou « p premier $\Rightarrow p$ impair »[1]).

Cet implicite[2] extrêmement fort se retrouve dans les pratiques langagières des enseignants en classe ou dans les manuels. Exemple (figure 1) dans cet extrait du manuel Transmath 3ᵉ (édition 2009, p. 72) :

- **Si** l'un au moins des facteurs d'un produit est nul, **alors** le produit est nul.
Autrement dit : **si** A = 0 ou B = 0, **alors** A × B = 0.
- **Si** un produit est nul, **alors** l'un au moins de ses facteurs est nul.
Autrement dit : **si** A × B = 0, **alors** A = 0 ou B = 0.

Figure 1. *Manuel Transmath 3ᵉ.*

Deux des formulations d'implication évoquent des variables (A et B), elles ne sont pas quantifiées explicitement. Les autres formulations utilisent la langue courante, les quantifications sont exprimées par ce biais (en français, l'expression « Si un [quelque chose vérifie telle propriété], alors il [vérifie telle autre propriété] » donne une connotation universelle au « un »). Indiquer explicitement les quantifications n'est pas impossible. Voir par exemple (figure 2) un extrait du manuel Sésamath cycle 4 (édition 2016, p. 116) avec quantification (la quantification est ici mise « en facteur » de quatre implications non quantifiées, on peut lire par contre une conjonction implicite entre les quatre implications).

1. Une fois la quantification implicite prise en compte, la première implication est vraie, la seconde est fausse.
2. Toutes les implications sont quantifiées universellement, elles le sont rarement explicitement.

Propriétés

	Pour tous nombres a, b et c :
Une égalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres.	si $a = b$ alors $a + c = b + c$ si $a = b$ alors $a - c = b - c$
Une égalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul**.	si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$ si $a = b$ alors $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$ (où $c \neq 0$)

Figure 2. *Manuel Sésamath cycle 4.*

Si la quantification universelle d'une implication est souvent non dite, elle apparaît cependant nécessairement quand on cherche à en exprimer la négation ou quand on cherche à prouver qu'elle est fausse. On voit ainsi apparaître l'idée de contre-exemple.

Voir par exemple (figure 3) cet extrait[3] du manuel Phare 4ᵉ (édition 2007, p. 13).

On considère* une proposition* du type :

« Si **partie 1**, alors **partie 2** »

➜ Pour prouver* qu'une proposition est vraie, il faut **faire une démonstration***.

➜ Pour prouver qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver **un exemple*** pour lequel elle est fausse.

exemple est appelé **contre-exemple**.

Figure 3. *Manuel Phare 4ᵉ.*

Dans cet extrait on voit que l'implication entre guillemets ne fait dans un premier temps pas apparaître de variable ou de quantification. Il est pourtant question de variable dans le second commentaire : « il suffit de trouver un exemple pour lequel elle est fausse ». De façon générale, on ne manipule de contre-exemple qu'à propos de propositions universellement quantifiées : pour prouver qu'une proposition $\forall x \;\; P(x)$ est fausse il faut prouver que $\exists x$ NON $P(x)$ est vraie[4] (un x qui rend vraie NON $P(x)$ s'appelle un contre-exemple de la proposition $\forall x \; P(x)$). En affirmant qu'il suffit d'un contre-exemple pour prouver que la proposition est fausse, les auteurs disent donc (entre les lignes) que la proposition considérée est quantifiée (implicitement) universellement.

Nous pensons qu'il semblerait plus simple ici pour les élèves d'expliciter les choses.

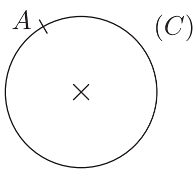
Nous nous sommes posé la question de la façon dont les élèves entendaient effectivement (ou non) ce type d'implicite des usages courants de la langue en mathématiques.

En revanche, nous n'abordons pas d'autres difficultés liées à l'implication : les différents sens du « si » en français, les sens spécifiques aux mathématiques, les distinctions entre implications et déductions, etc.

Expérimentation en 1ʳᵉ S

Une expérimentation a été menée pour tester l'hypothèse selon laquelle les implicites évoqués ici peuvent poser problème aux élèves, et pour expérimenter une façon, parmi d'autres, d'y travailler avec les élèves en abordant explicitement la question. Elle est basée sur un questionnaire repris d'une brochure de l'IREM de Rennes[5] :

3. On peut regretter ici que, pour les auteurs, le fait de trouver un exemple ne semble pas être une démonstration. C'est pourtant ce que l'on fait pour prouver qu'une proposition universellement quantifiée est fausse (on appelle alors l'exemple « contre-exemple », c'est ce qui est évoqué), c'est aussi une démonstration possible pour une proposition quantifiée existentiellement (exemple : « 1 038 et 8 301 ont un diviseur commun » ou « le carré d'un nombre pair est pair »).
4. $\exists x$ NON $P(x)$ n'est autre que la proposition NON $(\forall x \; P(X))$.
5. Nous soulignons que des recherches et d'autres expériences menées sur les difficultés des élèves liés à cet implicite (voir par exemple : « L'élève, le professeur et le labyrinthe » de Viviane Durand-Guerrier dans Petit x nº 50, 1999).

		VRAI	FAUX	AUTRE
1)	Si $(x-1)(x-2)=0$ alors $x=1$	❒	❒	❒
2)	Si $x=1$ alors $(x-1)(x-2)=0$	❒	❒	❒
3)	Si la droite (D) a pour équation $y=2x-7$ alors (D) passe par le point $A(5\,;\,3)$	❒	❒	❒
4)	Si la droite (D) passe par le point $A(5\,;\,3)$ alors (D) a pour équation $y=2x-7$	❒	❒	❒
5)	La condition $x^2=4$ entraîne $x=2$	❒	❒	❒
6)	Si $x=2$ alors $x^2=4$	❒	❒	❒
7)	Si $x<2$ alors $x^2<4$	❒	❒	❒
8)	La condition $x^2<4$ entraîne la condition $x<2$	❒	❒	❒
9)	$MA=MB$ entraîne que M est le milieu de $[AB]$	❒	❒	❒
10)	Si A, B et C sont alignés, alors $AC+CB=AB$	❒	❒	❒
	On considère la figure suivante où A est un point du cercle (C) de rayon r. 			
11)	Si $AM=2r$ alors M appartient au cercle (C)	❒	❒	❒
12)	Si $AM=2r$ alors M n'appartient pas au cercle (C)	❒	❒	❒

Pour les auteurs de la brochure de l'IREM de Rennes, l'expérimentation a mis en évidence et a permis de travailler :

1. La liaison, forte pour les élèves, entre la véracité de la proposition d'une part, et la manière dont l'enseignant évaluerait l'affirmation si elle était faite par un élève dans une copie d'autre part : ça ne peut pas être simplement « faux » puisque l'élève aurait vraisemblablement la moitié des points, ce n'est pas non plus « vrai ». Bien sûr d'autres colorations, d'autres usages des mots « vrai » et « faux » peuvent encore se superposer à celui-là dans cette discussion, même si elle a lieu dans un cours de mathématiques (opinions, jugements moraux, justice, etc.). La case « autre » (surprenante dans ce contexte) permettait de faire des nuances : sans cette case les élèves annotaient la plupart du temps leurs réponses dans la marge.
2. Le sens du vrai et du faux en mathématiques. L'usage des contre-exemples est travaillé, une approche ensembliste est aussi proposée (inclusions et intersections).

Nous avons mené une séance proche de celle décrite dans la brochure. Nous avons animé la séance à deux, nous avons proposé ce questionnaire à des élèves de 1re S (environ dix minutes) et nous avons fait suivre ce travail d'un débat. Le débat autour des réponses de la classe a duré un peu plus de trente minutes, ce débat a été enregistré et retranscrit, nous en présentons quelques extraits ci-dessous.

Le questionnaire est distribué et un temps est donné aux élèves pour le compléter. Une fois les réponses récoltées (trente copies au total), un dépouillement rapide est effectué (pendant lequel les élèves sont occupés sur une autre activité). Les réponses des élèves au questionnaire sont enfin notées au tableau de la façon suivante[6,7] :

Question	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)
VRAI	11	**20**	**24**	5	13	**29**	16	**21**	14	12	17	10
FAUX	**6**	8	3	**14**	**7**	1	**13**	9	**16**	**16**	**10**	**14**
AUTRE	19	2	3	15	12	0	1	2	3	3	15	15
Total	36	30	30	34	32	30	30	32	33	31	42	39

Nous n'avons fait aucune analyse de ces données pendant la séance. Les items du questionnaire sont abordées au fil de la discussion à notre initiative ou à celle des élèves. Nous choisissons ici de reproduire certains échanges autour de la question 5.

Premier extrait[8] (10ᵉ minute du débat, à propos de la question 5) du questionnaire, « La condition $x^2 = 4$ entraîne $x = 2$ ») :

E1 : Ben c'est « vrai », « faux » et « autre »
E2 (rire moqueur) : Ben oui.
P1 : Pourquoi ?
E1 : Ben **c'est vrai parce que, ben, c'est vrai. C'est faux parce que ça peut être faux, mais ce n'est pas que ça.** Et puis il y a aussi autre chose.
. . .
E3 : C'est que pour x égale deux alors x carré égale quatre, mais il y a d'autres solutions.
P1 : Tu dis que ça c'est vrai [question 6)], mais tu dis il y a d'autres solutions.
E3 : Ben x carré égale quatre entraîne pas forcément x égale deux. **Enfin. C'est vrai, mais il y a d'autres solutions.**
P1 : Qu'est-ce qui est vrai ? x carré égale quatre.
E3 : x égale deux, mais aussi d'autres solutions.
P1 : Je marque ça.
E3 : Non, ça ne se dit pas comme ça.
E4 : x égale deux ou x égale moins deux, il n'y a pas d'autre solution.
. . .
E5 : **Vu que c'est vrai, mais qu'il y en a d'autres, c'est faux.**
. . .
E6 : Il faut faire attention à la phrase, c'est pas x carré égale quatre donc x égale deux, c'est x carré égale quatre entraîne x égale deux. Donc c'est faux.
rires
E6 (répète puis poursuit) : **En gros c'est si x carré égal quatre alors, obligé, c'est deux. C'est pas vrai. Puisque x peut être égal à moins deux.**
E7 : **Oui, mais en même temps c'est vrai des fois.**
. . . brouhaha, point d'ordre
E4 : Moi mon problème ce n'est pas que ce soit vrai ou faux, parce que j'ai mis que c'était faux. Mon problème c'était de savoir si je mettais aussi « autre ». Parce que les termes **« faux » ça veut dire que c'est toujours faux. Et c'est pas toujours faux. Donc je mettrais plutôt « autre ».**

On voit bien ici que les élèves perçoivent qu'il y a différents cas, que « c'est » parfois vrai et « c'est » parfois faux. Il n'est pas dit grand-chose sur ce que désigne le « c' » dans toutes ces phrases, les élèves parlent sans doute de choses différentes : la conclusion quand la prémisse est supposée vérifiée, mais aussi l'implication, ou certains cas

6. Pour faciliter la lecture nous avons colorié dans cette présentation la réponse attendue, ce n'était pas fait en classe
7. Le nombre total de réponses dépasse le nombre de copies puisqu'un élève pouvait cocher plusieurs réponses. Notons par ailleurs que certains élèves n'ont pas coché de réponse pour certaines questions.
8. « E1 », « E2 », etc. sont des élèves. Nous sommes désignés par « P1 » et « P2 ».

particuliers de valeurs de variables etc. Les déictiques « ça », « ce » permettent classiquement, dans un échange, de parler d'un objet (ou d'objets) non encore bien discernés, bien caractérisés. Le fait de pouvoir en parler ainsi fait avancer dans la compréhension de ce dont il est question collectivement.

On perçoit aussi dans le discours des élèves des allusions à une certaine variété de situations : « mais ce n'est pas que ça », « mais il y a d'autres solutions », « il y en a d'autres », « c'est vrai dès fois », « c'est pas toujours faux ». Les choses ne sont pas dites comme ça, mais on peut penser qu'ils perçoivent que l'on doit considérer ces implications pour plusieurs valeurs de la variable (toutes les valeurs pour E4). . . Le lien n'est pas fait avec un indice de la façon de décider si les propositions sont vraies ou fausses.

Deuxième extrait (29e minute, à propos de la même question) :

E7 : Oui mais ça montre quand-même que c'est pas vrai ou faux, c'est pas blanc ou noir. C'est un peu entre les deux. Il manque quelque chose mais dans le fond **c'est un peu vrai. C'est pas complètement faux** (. . .)
E8 : En fait, moi ça me fait penser : qu'est-ce que c'est que ce soit vrai, qu'est-ce que c'est que ce soit faux ? **Est-ce que c'est vrai parce que c'est pas faux ? ou est-ce que c'est faux parce que c'est pas vrai ?** ou **est ce que c'est vrai parce que y'a rien où c'est faux ?**
Élèves : Oh là là ! . . .
E8 : Parce que ceux qui disent que c'est vrai parce que c'est pas toujours faux, ben j'suis désolé mais là, euh. . . ça marche pas parce que **y'a quelque chose qu'est faux donc c'est pas toujours vrai.** Je sais pas(. . .)

Les élèves parlent toujours de « ça » et « c' », mais ça ne les empêche pas d'avancer. Les questions sont plus précises : E7 dit que les propositions ne sont pas toujours fausses, et pas toujours vraies, E8 pose des questions, ses alternatives font avancer : vrai *versus* jamais faux ? Faux *versus* jamais vrai ? Vrai *versus* pas toujours faux ? Mais elles montrent aussi que l'implicite de la quantification universelle (pour reprendre les termes de E8 : « c'est vrai parce que y'a rien où c'est faux ») n'est pas perçu de façon évidente, on perçoit bien au contraire qu'il y aurait quelque chose de l'ordre de l'arbitraire pour les élèves, quelque chose de non intuitif.

Nous finissons par apporter les éléments nécessaires à la conclusion. Troisième extrait (32e minute, débat général en fin de séance) :

P2 à E8 : Il y a quelque chose qui a été dit tout à l'heure, il suffisait d'un contre-exemple pour montrer que quelque chose était faux, c'est que. . .
E8 : Donc **c'est faux parce que c'est pas toujours vrai. Est-ce que cette phrase c'est vrai ?**
P1 : Si je vous dis (. . .) que tout rectangle est un carré, vous me dites quoi ?
Élèves :] Non. Faux (. . .)
P1 : Tout nombre réel est positif
Élèves : Faux / C'est vrai / des fois mais c'est faux /
P2 / P1 : Pourtant il y a des nombres réels qui sont positifs / il faut bien décider / C'est faux
Jeanne : **Vous dites tout, alors que eux à aucun moment ils ont dit tout.**
P2 : Ça c'est vrai
E7 : Vous avez dit (. . .) Vous dites tous, enfin, vous dites clairement que c'est tous, tous les réels, du coup c'est faux parce que tous les réels ne sont pas positifs, mais eux ils disent jamais. . .
E8 : mais **en maths on sait bien que ça veut dire tout**
E7 : mais là, ils disent pas tous tout le temps, c'est pas clair.
Xxx : il manque des conditions (. . .)
P1 : D'où l'importance d'écrire si c'est pour tout machin ou pas, c'est ça ?
P2 : et si on écrivait pour tout devant les phrases (. . .)
Xxx : Mais du coup si on met pour tous ça va être faux.
P2 : Si on dit pour tout x la condition x au carré égale quatre entraîne x égale deux
Élèves : C'est faux !
E7 : Du coup ce sera faux mais c'est parce qu'on a mis pour tout, si on ne met pas le pour tout c'est pas faux
P2 : Et pour tout point M, MA égale MB entraîne que M milieu de $[AB]$
Élèves : C'est faux / là c'est faux
E1 : Parce que là, voilà, c'est une certitude

Globalement, on voit que les élèves n'ont pas conscience des implicites des usages classiques de la langue en mathématiques.

Sur ce cas précis chacun tente d'expliciter des règles rationnelles de fonctionnement (c'est le fait qu'ils n'ont pas tous les mêmes qui permet d'avancer dans la discussion), les choses ne sont pas simples car ils n'ont pas les mots pour le dire. La notion de variable pourrait par exemple être utilisée ici… celle de quantification aussi bien sûr. Le fait que ces implicites ne soient pas spontanément partagés peut être source de gros quiproquos.

Deux remarques pour terminer :

1. Les programmes de lycée parlent de « proposition conditionnelle » au lieu d'« implication ». L'introduction d'une autre désignation permettrait de distinguer les allusions aux propositions (avec quantification, appelées alors « propositions conditionnelles »), des propositions plus formelles, logiques (deux propositions reliées par le connecteur « $\Rightarrow$ », sans quantification, appelées alors « implications »).
2. Même si on connaît l'implicite de la quantification universelle, le domaine auquel sont astreintes les variables reste souvent à préciser (important dans certains des exemples du questionnaire). Il serait bon par exemple de préciser dans la question 7) si x est réel, ou, par exemple, réel positif : les deux propositions « Quel que soit x réel positif, si $x < 2$ alors $x^2 < 4$ » et « Quel que soit x réel, si $x < 2$ alors $x^2 < 4$ » n'ont pas la même valeur de vérité. Ce point est rapidement évoqué dans la discussion. Il ne peut l'être confortablement que si la quantification universelle sous-jacente est explicitement évoquée.

Il paraît important dans nos classes de lever ce type d'ambiguïtés, ou, au moins, d'en avoir conscience, et si besoin de les expliciter aux élèves (ou de réagir avec ce filtre à certaines de leurs incompréhensions).

Dans ce cas particulier, il a été possible d'en parler explicitement et, sans doute, de faire prendre conscience aux élèves de certains de ces implicites (cette séance a eu lieu début octobre, pendant tout le reste de l'année cette classe a développé une grande sensibilité aux implicites : élèves se reprenant entre eux, élèves reprenant l'enseignante dans certaines formulations du cours, etc. [9]).

De façon générale le travail explicite, réflexif et collectif sur nos pratiques langagières en mathématiques en général et en classe de mathématiques en particulier est porteur de sens et permet une compréhension plus fine de ce qui se joue en cours de mathématiques.

Les expérimentations sont nombreuses : figure téléphonée, narration de recherches, formulation et reformulation individuelles puis collectives du cours (définition, propositions, preuves), écritures en groupe de preuves en réponse à un exercice, réécritures individuelles ou en groupe, dictées géométriques ou arithmétiques [10], débats comme celui présenté ici sur des points précis problématiques, etc. sont autant d'occasion de décortiquer l'usage complexe de la langue en mathématiques, le formalisme sous-jacent, les non-dits.

L'expérimentation présentée dans cet article se place dans le cadre de la préparation d'un atelier aux journées de l'APMEP en 2012. On trouvera dans la version en ligne d'*Au fil des maths* une première annexe intitulée « Quantification et implication » donnant un éclairage de la logique mathématique sur la quantification universelle implicite de l'implication en mathématique, une seconde annexe « Vrai / Faux / Autre … autres données » avec les réponses obtenues pendant les expérimentations (six classes de 1re S) présentées dans la brochure de l'IREM de Rennes, et enfin une troisième annexe donnant quelques pistes pour la mise en place d'une telle activité.

Emmanuelle Forgeoux enseigne au lycée Victor et Hélène Basch dans l'académie de Rennes, et travaille à l'IREM de Rennes.
Christophe Hache est directeur de l'IREM de Paris, membre du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz) de l'Université Paris Diderot.
Cet article a été écrit en collaboration avec la commission inter-IREM « Lycée ».
emmanuelle.forgeoux@ac-rennes.fr
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

9. Une autre séance de cette classe plus tard dans l'année est présentée dans l'article de Christophe Hache « Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec "avec" » (dans la revue Petit x nº 97, pp. 27-43).
10. Ces derniers points font allusions aux travaux du groupe Léo de l'IREM de Paris.

Sommaire du nº 528

Mathématiques et langages

CRAP-Cahiers pédagogiques

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr