Le bulletin de l'APMEP - N° 528

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Avril, Mai, Juin 2018

Mathématiques et langages

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Valérie LAROSE vali.larose@gmail.com

AU FIL DES MATHS

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : Olivier REBOUX
Dépôt légal : Juin 2018
Impression : Imprimerie Horizon P.A. de la plaine de Jouques 200 avenue de Coulin 13420 GEMENOS
ISSN : 2608-9297

APMEP

Résolution de problèmes et apprentissage de la langue à l'école élémentaire

Comprendre un énoncé de problème en mathématiques n'est pas toujours simple pour des élèves, mais c'est déterminant pour la réussite... Annie Camenisch et Serge Petit nous proposent ici quelques pistes pour travailler sur la langue en mathématiques en cycle 2.

Annie Camenisch & Serge Petit

Le langage oral et écrit a une place prépondérante dans toutes les étapes liées à la résolution de problèmes mathématiques : en amont pour comprendre les énoncés sous forme textuelle, voire non textuelle, pendant la résolution pour garder trace de son raisonnement, en aval pour communiquer le résultat. Parce qu'elle est inégalement maîtrisée par les élèves, la langue peut s'ériger en obstacle à la résolution de problèmes. La tentation est alors forte de simplifier à outrance l'énoncé ou la réponse attendue afin d'éviter toute difficulté liée à la langue, remettant à plus tard (ou à jamais) l'autonomie de certains élèves. Nous avons adopté la posture inverse, à savoir, dès la classe de CP, de permettre aux élèves de réaliser des apprentissages explicites portant sur la langue. En effet, en nous appuyant sur des constats tirés des classes, nous proposons de développer des stratégies de lecture et des activités écrites de reformulation, propositions dont certains effets peuvent être mesurables.

Le problème

La question suivante a été proposée à des enseignants de cycle 3 lors d'une conférence en février 2018 : « *Quelle est la principale difficulté que vos élèves rencontrent en résolution de problèmes ?* ». Parmi les réponses fournies par les enseignants, ressort comme problème principal la non compréhension des énoncés de problèmes, difficulté soulignée par ailleurs dans des évaluations internationales comme PISA ou TIMSS.

Voici trois exemples de réponses :

Enseignant 1 : « Lors de résolution de problèmes, les principales difficultés observées se trouvent dans la lecture et la compréhension de l'énoncé ; c'est là que l'on retrouve certaines difficultés rencontrées lors des apprentissages de la langue française, [. . .] »

Enseignant 2 : « La principale difficulté se situe au niveau de la lecture et de la compréhension. Il faut d'abord expliquer ce dont il s'agit ; les faire réagir par rapport à des situations de la vie courante »

Enseignant 3 : « Les principales difficultés rencontrées par mes élèves en résolution de problèmes sont, d'une part la compréhension de l'énoncé [. . .] ».

Un autre enseignant fournit un exemple tiré d'une classe de CE2 :

> « La maman de Sophie n'a que des billets de 5 € dans son porte-monnaie.
> Au total, elle a 35 €.
> Combien a-t-elle de billets ?
> Voici le raisonnement et la réponse de l'élève :
> $5+5+5+5+5+5+5=35$
> Elle a 35 €. »

L'enseignant précise : « Les élèves rencontrent des difficultés pour interpréter leur calcul. Le calcul est exact. En revanche, la réponse n'est pas juste. »

L'erreur portant sur la réponse qui ne correspond pas à la question posée, alors que le calcul est exact, donne un indice sur une certaine incompréhension de l'élève. Quelles hypothèses peut-on émettre sur ses causes ?

- Étourderie ? Peut-être.
- Non compréhension de la question posée ? Peut-être pas puisque la décomposition de 35 correspond bien à cette question.
- Incapacité à relier une représentation dans le registre des écritures symboliques mathématiques ($5+5+5+5+5+5+5=35$) à la représentation correspondante en langue naturelle (chaque 5 écrit représente un billet de 5 €) ? Peut-être.
- Perte de vue de l'objectif ? Peut-être aussi.

Comment dès lors est-il possible de permettre à cet élève et à bien d'autres de cadrer leur travail, de se forger par eux-mêmes les rails de sécurité nécessaires ?

Un travail explicite portant sur la langue française peut développer cet autoguidage nécessaire vers la rédaction d'une phrase réponse correcte.

Une stratégie possible de lecture d'un énoncé de problème

Si l'élève doit parvenir *in fine* à comprendre l'énoncé en autonomie, il appartient à l'enseignant de donner des outils permettant aux élèves d'avoir accès à cette compréhension. Cela se traduit souvent en classe par des relectures ou reformulations orales de l'énoncé, à chaque fois recommencées, mais non par le développement d'une stratégie explicite, transposable à tout énoncé.

> On peut ainsi faire porter l'attention des élèves sur certaines difficultés langagières récurrentes apparaissant souvent dans les énoncés. Ces difficultés peuvent être lexicales (mot inconnu qui bloque la représentation) ou grammaticales. Si les premières peuvent se résoudre en convoquant explicitement l'univers de référence, les secondes demandent un travail écrit systématique (au début du cycle 2) ou différencié (en fonction des compétences de lecture des élèves).

C'est souvent le cas lors de l'utilisation de pronoms dans les énoncés où le référent d'un pronom n'est pas toujours clairement identifié, pronom personnel *il* ou *elle* au début des apprentissages, mais surtout les pronoms *en* ou *y*, voire le pronom indéfini *chacun*.

Dans l'énoncé ci-dessus, la présence du pronom *elle* ne semble pas avoir d'incidence sur la compréhension. Si l'on retient l'hypothèse d'une perte de vue de l'objectif du problème, il convient de développer chez l'élève une certaine posture adaptée à ce type d'écrit spécifique aux mathématiques.

Un énoncé de problème étant composé d'une partie informative et d'une partie injonctive, le plus souvent sous forme de question, une stratégie de lecture spécifique à cet écrit consiste à décomposer les deux séquences textuelles. On peut ainsi faire repérer et reformuler ce qu'il faut chercher.

L'élève sera vraisemblablement attiré par une phrase du type : je cherche « Combien a-t-elle de billets ? », souvent spontanément reformulée sous la forme « Je cherche combien elle a de billets ».

Le déterminant interrogatif « Combien ... de » indique ce que l'on cherche : un déterminant numéral. Une reformulation plus appropriée, à faire exprimer aux élèves, est alors « Je cherche le nombre de billets de ... ». Cette reformulation attire l'attention sur la nature de ce qui est cherché, à savoir, dans l'énoncé ci-dessus, un nombre de billets et non une somme d'argent. On peut pour cela demander à l'élève d'anticiper une phrase réponse « en laissant un trou pour le nombre que l'on cherche », par exemple « La maman de Sophie (ou Elle) a ______ billets (dans son porte-monnaie) ». L'élève ayant reformulé la réponse ne perd alors plus sa cible de vue. Il faut remplir la case vide. Une relecture de l'énoncé avec cet objectif fixé facilite aussi le repérage des informations nécessaires à la résolution du problème.

Subsiste alors le problème du sens de l'écriture $5+5+5+5+5+5+5=35$, ou plus simplement de l'écriture $5+5+5+5+5+5+5$ dans le contexte donné. Il s'agit typiquement d'un problème de représentation ou plutôt d'articulation de représentations. L'élève doit comprendre que chaque 5 écrit dans le membre de gauche de l'égalité représente un billet de 5 €. Il suffit donc de dénombrer ces 5 et de conclure en complétant la phrase réponse.

> On saisit ici l'importance d'associer entre elles des représentations et de considérer les articulations de registres comme des objets explicites d'enseignement et d'apprentissage.

La stratégie ici suggérée est donc la suivante :

- repérer les difficultés lexicales de l'énoncé (s'il y en a) ;
- repérer les difficultés grammaticales de l'énoncé (s'il y en a) ;
- repérer la question ;
- reformuler la question afin de rédiger une phrase réponse ;
- rédiger une phrase réponse « à trou », phrase qui servira de guide pour l'activité de recherche ;
- relire l'énoncé à la recherche des informations pertinentes ;
- calculer, représenter, conclure en complétant la phrase réponse « à trou ».

Aussi, il est important d'éviter de donner *a priori* aux élèves les phrases réponses « à trou » comme le font de trop nombreux fichiers en cycle 2. En effet, l'activité langagière qui consiste à écrire par soi-même la phrase réponse « à trou » constitue un guide vers la recherche de la solution.

Reformuler pour mieux comprendre un énoncé et résoudre un problème

Soit l'énoncé suivant donné à des élèves de cycle 2 :

> Étienne a trois billes de moins que Lucie.
> Étienne a six billes.
> Combien de billes a Lucie ?

Un tel problème engendre un nombre important d'échecs encore en CE2, voire en CM1. Certains élèves, comme le dit Olivier Houdé[1] dans le Café pédagogique ▶ ne parviendraient pas à « inhiber l'automatisme implicite » (il y a le mot *moins* alors je soustrais), ce qui conduirait bon nombre d'entre eux à proposer une solution erronée obtenue par soustraction. Olivier Houdé constate, en fin d'article, que « [le cerveau] résiste de mieux en mieux — mais pas toujours ! — aux automatismes de pensée ». L'auteur ne précise cependant pas comment procéder pour permettre au cerveau de résister davantage et permettre à l'élève de manière plus sûre de trouver la solution du problème.

Un travail spécifique sur la langue peut permettre de réussir à davantage d'élèves.

L'énoncé ci-dessus est de fait une représentation en langue naturelle de la comparaison de deux collections de billes, celle d'Étienne et celle de Lucie. Tout est dit dans les deux premières phrases : « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes ». Cette représentation en langue naturelle de la situation exprime de manière explicite qu'*Étienne a six billes* et implicitement que *Lucie a neuf billes*. Le problème consiste à lever l'implicite portant sur le nombre de billes de Lucie, c'est-à-dire à représenter mathématiquement le nombre de billes de Lucie connaissant les deux informations « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes ». Il s'agit donc de convertir la représentation en langue naturelle « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes. » en une représentation dans le système des écritures symboliques mathématiques, soit une égalité résolvante.

L'égalité résolvante experte est la suivante : $6 + 3 = 9$, égalité qui donne le nombre de billes de Lucie. Le membre de gauche « $6 + 3$ » représente la même situation que les deux phrases « Étienne a trois billes de moins que Lucie. Étienne a six billes. ». Ces représentations ne sont pas congruentes car à l'unité signifiante « moins » en langue naturelle correspond l'unité signifiante « + » dans le registre des écritures mathématiques. De plus, l'ordre des unités signifiantes est inversé (six arrive en fin d'énonciation en langue alors qu'il est en début d'énonciation dans l'écriture mathématique). Ce problème est donc difficile du fait de cette forte non congruence entre la représentation en langue et de la représentation fonctionnelle en mathématiques. Demander au cerveau d'être attentif, de ne pas se précipiter sur la première idée venue, n'est peut-être pas suffisant pour garantir la réussite. L'élaboration de stratégies de résolution s'impose donc.

Aussi proposons-nous un dispositif prenant appui sur la langue.

1. J'écris ce que je cherche :
   – *Je cherche le nombre de billes de Lucie.*
2. J'écris la phrase réponse (à trou) :
   – *Lucie a ______ billes.*
3. J'écris ce que je sais :
   – *Étienne a trois billes de moins que Lucie.*
   – *Étienne a six billes.*
4. Je cherche si dans l'énoncé une phrase commence par *Lucie a. . .* La réponse est négative. En revanche, une phrase se termine par *Lucie*.
5. Je reformule cette phrase, ce qui donne : *Lucie a trois billes de plus qu'Étienne.*
6. Je reformule alors ce que je sais :
   – *Lucie a trois billes de plus qu'Étienne.*
   – *Étienne a six billes.*

   J'obtiens une représentation de la situation congruente avec l'écriture mathématique qui me permet facilement de trouver la solution.
7. Je complète la phrase réponse : *Lucie a 9 billes.*

Ce qui vient d'être écrit peut sembler long, mais ce travail, réalisé de manière rituelle à l'oral et à l'écrit, semble conduire à une amélioration des résultats.

Quelques résultats

Nous avons proposé à des élèves de fin CP[2], deux énoncés non congruents, reproduits page suivante. Dans le premier énoncé, la comparaison est représentée par l'expression *de moins*, dans le deuxième, par l'expression *de plus*. Les deux énoncés ont été évalués du point de vue de leur réussite en français (reformulation juste : item F) et en mathématiques (calcul ou résultat juste : item M).

1. Olivier Houdé est directeur du Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Éducation de l'enfant (LaPsyDÉ)
2. Dans le cadre d'évaluations de compétences de fin CP, réalisées dans une vingtaine de classes (273 élèves) au mois de juin 2017.

Premier énoncé

Macha a deux bonbons de moins que Léa. Macha a 5 bonbons. Combien de bonbons a Léa ?

1. Écris autrement : *Macha a 2 bonbons de moins que Léa.* Léa a ____________ que Macha.
2. Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.

Ma phrase réponse : ____________

L'item F porte sur la compréhension de la phrase « Macha a 2 bonbons de moins que Léa. » par l'intermédiaire d'une réécriture en « Léa a 2 bonbons de plus que Macha. », phrase censée aider les élèves dans la résolution du problème (question 1).

Pour ce problème, on obtient les résultats indiqués dans le tableau croisé ci-dessous qui répartit les 273 élèves ayant répondu en quatre classes.

	F = 0	F = 1	
M = 0	115	24	139
M = 1	68	66	134
	183	90	273

Légende $M=0$: échec en maths. $M=1$: réussite en maths.
$F=0$: échec en français. $F=1$: réussite en français.

Statistiquement, tout se passe comme si le score des élèves en maths était le fruit du hasard, environ 50 % de réussite (139 contre 134), les élèves ne faisant qu'additionner ou soustraire les deux nombres en jeu.

Le tableau ci-dessous indique le pourcentage d'échec ou de réussite en maths quand l'élève a échoué ou, au contraire, réussi en français.

	Échec en français	Réussite en français
Échec en maths	63 %	27 %
Réussite en maths	37 %	73 %

Ce tableau est éloquent car il montre que les élèves réussissant à reformuler une donnée (réussite en français) réussissent à 73 % le problème de mathématiques, au contraire de ceux qui ne parviennent pas à reformuler et qui ne réussissent qu'à 37 %. Si ces résultats ne suffisent pas pour inférer l'existence d'une relation de cause à effet, entre la capacité à reformuler et la réussite en mathématiques, ils permettent cependant de formuler l'hypothèse que la réflexion suscitée par la reformulation constitue une aide pour la résolution du problème.

Deuxième énoncé

Billy a 4 cubes de plus que Sami. Billy a 6 cubes. Combien de cubes a Sami ?

1. Écris autrement : *Billy a 4 cubes de plus que Sami.* Sami a ____________ que Billy.
2. Relis le problème et la phrase écrite, puis cherche la réponse.

Ma phrase réponse : ____________

L'item F porte sur la réécriture de la phrase « Billy a 4 cubes de plus que Sami. » en « Sami a 4 cubes de moins que Billy. », phrase censée aider les élèves dans la résolution du problème.

Pour ce problème, on obtient les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous qui répartit les 263 élèves ayant répondu en quatre classes selon leurs résultats conjoints en maths et en français.

	F = 0	F = 1	
M = 0	123	35	158
M = 1	34	71	105
	157	106	263

Il est ici possible d'affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 2,5 % que les résultats des élèves en maths ne sont pas le fruit du hasard, avec environ 40 % de réussite et 60 % d'échec (158 contre 105), mais s'orientent dans le sens de l'échec.

Le tableau ci-dessous reprend en pourcentages le tableau précédent, selon les mêmes règles que précédemment :

	Échec en français	Réussite en français
Échec en maths	78 %	33 %
Réussite en maths	22 %	67 %

Là encore, plus des deux tiers des élèves qui réussissent à reformuler la phrase résolvent correctement le problème, alors que ceux qui échouent dans la reformulation de la phrase ne réussissent qu'à 22 %.

On peut s'interroger sur les causes de la différence des résultats entre ces deux problèmes, qui traduisent la même situation de comparaison. Celle-ci est peut-être liée à la transformation en « moins » d'un « plus », ou, plus vraisemblablement, en classe de CP, à la nature de l'opération attendue qui est une soustraction.

L'impossibilité de conclure à une relation de cause à effet pour ces deux résultats n'empêche cependant pas de se demander si un travail spécifique en langue ne permettrait pas aux élèves de mieux se représenter la situation décrite par l'énoncé et donc de mieux réussir en mathématiques.

Conclusion

La commission Villani-Torrossian ne développe pas explicitement l'importance d'un travail spécifique sur la langue française dans toutes les disciplines et plus spécifiquement en mathématiques, mais elle émet la recommandation suivante : « expliciter les liens entre langue française et les mathématiques dès le plus jeune âge »[3].

Il ne s'agit pas, à nos yeux, « d'expliciter des liens », ce qui relève d'une pédagogie expositive, mais bien d'analyser la langue française, et surtout de la faire fonctionner en situation de compréhension de textes, de production d'écrits, dans toutes les situations d'apprentissages mathématiques et plus particulièrement en résolution de problèmes.

Il semblerait en effet, qu'au vu des résultats précédents, un travail spécifique sur la langue en mathématiques, dès les premiers apprentissages, soit d'une grande importance pour la réussite des élèves.

Annie Camenisch est maître de conférences en sciences du langage à l'ÉSPÉ d'Alsace (Université de Strasbourg). Quant à Serge Petit, il est formateur honoraire en mathématiques à l'IUFM d'Alsace et à l'Université de Strasbourg.

Errata

Trois erreurs ou omissions se sont glissées dans le numéro 527 d'*Au fil des maths* :

- page 32, il fallait lire :

  on peut l'obtenir en faisant rouler un cercle de rayon $\mathbf{1}$ *à l'extérieur d'un cercle de rayon* 1.

- page 53, dans la légende de la figure 8, il fallait lire :

  La somme des termes ***de la*** *suite géométrique de raison* $\frac{3}{4}$ ***et de premier terme*** $\mathbf{\frac{3}{4}}$ *vaut* 3.

- page 56 :

  contrairement à ce qui est écrit, Calc (le tableur de LibreOffice) code les flottants en base 2 sur 64 bits.

Merci aux lecteurs attentifs qui nous les ont signalées.

3. 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. Rapport Villani-Torrossian, 12 février 2018, § 3.5, p. 41

Sommaire du nº 528

Mathématiques et langages

APMEP

www.apmep.fr