Les quarantièmes olympiades internationales(*)

Roumanie, 10-22 juillet 1999

PREMIER JOUR

Bucarest, 16 juillet 1999

Temps accordé : 4 heures 30 minutes. Chaque problème vaut 7 points.

Problème 1.

Dans le plan, déterminer tous les ensembles finis S, constitués d'au moins trois points, qui vérifient la propriété suivante : pour tout couple de points distincts A et B de S, la médiatrice du segment AB est un axe de symétrie de S.

Problème 2.

Soit n un entier fixé, supérieur ou égal à 2.

(a) Déterminer la plus petite constante C telle que, pour tout ensemble $x_1, \ldots, x_n$ de réels positifs ou nuls on ait l'inégalité :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4 .$$

(b) Pour cette constante C, déterminer les cas d'égalité.

Problème 3.

On considère un tableau carré de côté n, où n est un entier pair, strictement positif, fixé. Le tableau est divisé en n^2 carrés unité. On dit que deux carrés distincts du tableau sont *adjacents* si et seulement s'ils ont un côté en commun.

On marque N carrés unités de ce tableau de telle sorte que chaque carré unité de ce tableau (marqué ou non marqué) soit adjacent à au moins un carré marqué.

Déterminer la plus petite valeur possible de N.

(*) Cf. p. 815.

DEUXIÈME JOUR

Bucarest, 17 juillet 1999

Temps accordé : 4 heures 30 minutes. Chaque problème vaut 7 points.

Problème 4.

Déterminer tous les couples (n,p) d'entiers strictement positifs tels que :
p est un nombre premier,
$n \leq 2p$,
et $(p-1)^n + 1$ est divisible par n^{p-1}.

Problème 5.

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont intérieurs au cercle Γ, et sont tangents à Γ respectivement en les points distincts M et N. Le cercle Γ_1 passe par le centre de Γ_2. La droite contenant les deux points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 rencontre Γ en A et B. Les droites MA et MB coupent Γ_1 respectivement en C et D. Montrer que la droite CD est tangente au cercle Γ_2.

Problème 6.

Déterminer toutes les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

PANORAMATH

– (coédition APMEP - CIJM - ACL) –

« De l'école élémentaire au supérieur »

Deux brochures en A5 :

PANORAMATH 2 (MAI 1999) **63 F**

8 compétitions internationales, 5 nationales, 15 régionales

288 pages – 319 exercices ou problèmes.

Mais avec la possibilité d'obtenir alors

PANORAMATH 96

288 pages – 319 exercices ou problèmes.

pour 19 F seulement (au lieu de 56 F)