Concours Général des Lycées(*)

SESSION DE 1999

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice I

Quel est le volume maximum d'un cylindre, ayant même axe de révolution qu'un cône donné et intérieur à ce cône ?

Quel est le volume maximum d'une boule, centrée sur cet axe et intérieure au cône ?

Comparer les deux maximums trouvés.

Exercice II

Résoudre dans **N** l'équation en n :

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

Exercice III

Pour quels triangles aux angles tous aigus le quotient du plus petit côté par le rayon du cercle inscrit est-il maximum ?

Exercice IV

Sur une table trônent 1 999 bonbons rouges et 6 661 bonbons jaunes rendus indiscernables par des emballages uniformes. Un gourmand applique

(*) Comme pour les Olympiades qui suivent, les lecteurs sont invités à proposer leurs solutions à François Lo Jacomo (adresse, p. 805). Un prochain Bulletin en indiquera les idées-clés.

jusqu'à épuisement du stock l'algorithme ci-dessous :
a. s'il reste des bonbons, il en tire un au hasard, note sa couleur, le mange et va en b. ;
b. s'il reste des bonbons, il en tire un au hasard et note sa couleur :
- si elle est la même que celle du dernier bonbon avalé, il le mange et retourne en b.,
- sinon, il le remmaillote, le pose et retourne en a.

Montrer que tous les bonbons seront mangés et donner la probabilité pour que le dernier bonbon mangé soit rouge.

Exercice V

Montrer que les symétriques de chaque sommet d'un triangle par rapport au côté opposé sont alignés si, et seulement si, la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit est égale à son diamètre.

Courrier des lecteurs

Stefan Turnau (Pologne), fidèle lecteur de notre Bulletin, simplifie ainsi **la démonstration du théorème de Ménalaüs parue dans le n° 420, p. 23-25 :**

« • On constate que h est une homothétie :
– comme telle, elle est l'application identique si et seulement si son rapport est égal à 1 ;
– d'autre part, elle est l'application identique si et seulement si un point autre que son centre est envoyé sur lui-même.

• Considérons le point I. Il est envoyé sur lui-même par h, alors aussi par $h_K \circ h_J$ si et seulement si I est sur la droite JK.

La démonstration est complète. »

Stefan Turnau souhaiterait étendre cette méthode au théorème de Céva. Un lecteur du Bulletin trouverait-il une piste ?

(*) Voir note de la page précédente