Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes...

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire,
75019 Paris.

NOUVEAUX ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 285 (Charles NOTARI, 31-Montaut)

a étant un réel strictement positif, on considère la suite : $u_n = a^n + \dfrac{1}{a^n}$.

Montrer que, si cette suite prend deux valeurs entières consécutives u_k et u_{k+1}, tous les u_n sont entiers.

ÉNONCÉ N° 286 (Georges LION, Nouméa, Nouvelle-Calédonie)

Soient H et F deux points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$). Soit ($\mathcal{P}$) une parabole de foyer F et dont la directrice passe par H. Soit A un point de ($\mathcal{H}$) d'où l'on peut mener deux tangentes à ($\mathcal{P}$), distinctes, non perpendiculaires et recoupant ($\mathcal{H}$) respectivement en deux points B et C, distincts de A. Montrer que (BC) est tangente à ($\mathcal{P}$).

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 267 (Roger CUCULIÈRE, 94-Marne la Vallée)

Soit f une fonction *convexe* de classe C^1 sur un intervalle $I = [a,b]$ (avec $a < b$), soit g une fonction de classe C^1 sur $I = [a,b]$, telle que $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ et $\forall\, x \in\,]a,b[\; g(x) \leq f(x)$.

Démontrer que $\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \le \int_a^b \sqrt{1+g'(t)^2}\,dt$ et que l'égalité n'est vérifiée que si les deux fonctions sont égales pour tout $x \in [a,b]$.

SOLUTION de B. HÉRON, 91-Orsay

Il est intuitif que le graphe d'une fonction convexe $f \in C^1[a,b]$ a une longueur strictement inférieure à celui de toute fonction $g \in C^1[a,b]$ distincte de f qui vérifie $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ et $f \le g$ sur $[a,b]$. On va le démontrer.

La fonction (indéfiniment dérivable) ϕ : $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est strictement convexe sur $\mathbf{R}$ car ϕ' est strictement croissante (on a $\phi'(t) = t\,(1+t^2)^{-1/2}$ et $\phi''(t) = (1+t^2)^{-3/2} > 0$). Il s'ensuit que

(1) $\forall s \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}, \phi(t) \ge \phi(s) + (t-s)\,\phi'(s)$,

cette inégalité étant stricte si $t \neq s$ (ceci exprime que la tangente au graphe de ϕ au point $(s,\phi(s))$ est située en dessous du graphe et n'a que ce point en commun avec lui).

En particulier, on a

(2) $$\forall x \in [a,b],\quad \sqrt{1+g'(x)^2} \ge \sqrt{1+f'(x)^2} + [g'(x) - f'(x)]\phi'(f'(x)),$$

d'où

(3) $$\int_a^b \sqrt{1+g'(x)^2}\,dx \ge \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx + \int_a^b [g'(x) - f'(x)]\phi'(f'(x))\,dx.$$

Les deux membres de l'inégalité (2) étant des fonctions continues de x, on a l'égalité dans (3) seulement si (2) est une égalité pour tout $x \in [a,b]$, c'est-à-dire, compte tenu de (1), si les fonctions f' et g' sont égales sur $[a,b]$. Mais alors les fonctions f et g sont égales puisque $f(a) = g(a)$.

Ainsi, la propriété annoncée sera établie si on justifie que

(4) $$\int_a^b [g'(x) - f'(x)]\phi'(f'(x))\,dx \ge 0 \;.$$

Or, ϕ et f étant convexes, ϕ' et f' sont croissantes ainsi que $\phi' \circ f'$. Si f est de classe C^2, alors $\phi' \circ f'$ est de classe C^1 et (4) découle d'une simple intégration par parties puisque

$$\Big[[g(x) - f(x)]\phi'(f'(x))\Big]_a^b = 0\,,$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)](\phi' \circ f')'(x)\,dx \ge 0\,.$$

Si f n'est que de classe C^1, alors $\phi' \circ f'$ est seulement croissante (et continue), mais cela suffit pour appliquer le second théorème de la moyenne (cf. Arnaudiès-Fraysse, Analyse, Chap. VII, § 7) : il indique qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b [g'(x)-f'(x)]\phi'(f'(x))\,dx$$
$$= \phi'(f'(a))\int_a^{\xi}[g'-f'](x)\,dx + \phi'(f'(b))\int_{\xi}^{b}[g'-f'](x)\,dx.$$

Comme $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$, on obtient :

$$\int_a^b [g'(x)-f'(x)]\phi'(f'(x))\,dx = [f(\xi)-g(\xi)][\phi'(f'(b))-\phi'(f'(a))],$$

d'où (4) puisque $f \geq g$ et que $\phi' \circ f'$ est croissante. Finalement, on a donc

$$\int_a^b \sqrt{1+g'(x)^2}\,dx \geq \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

pour toute fonction $g \in C^1[a,b]$ telle que $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$ et $g \leq f$ sur $[a,b]$, avec égalité seulement pour $g=f$.

AUTRES SOLUTIONS

Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), René MANZONI (76-Le Havre), Marguerite PONCHAUX (59-Lille), et une solution incomplète.

ÉNONCÉ 268 (François LO JACOMO, 75 - Paris)

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit. Le cercle inscrit dans ABC, de centre I, touche les côtés [BC], [CA], [AB] en D, E, F respectivement. Soit K l'orthocentre du triangle DEF. Montrer que O, I, K sont alignés.

SOLUTION

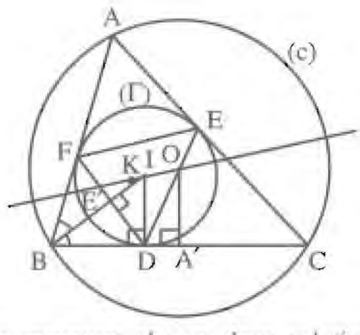
C'est la diversité des solutions possibles qui m'a encouragé à poser ce problème, pas très original puisqu'on le trouve, paraît-il, dans *La géométrie du triangle* de Lalesco (Éd. J. Gabay, 1987), p. 20, dans *La géométrie du triangle* d'Yvonne et René Sortais, p. 86, sans parler de l'énoncé 233 de la présente rubrique qui s'en rapproche. Et les trente solutions proposées par 26 lecteurs de trois continents (Michel BATAILLE, 76-Rouen, Jacques BOROWCZYK, 37-Tours, Gaston BOUEZ, 75-Paris, Jacques BOUTELOUP, 76-Rouen, Marie-Laure CHAILLOUT, 95-Sarcelles, Jacques DAUTREVAUX, 06-St André, Hector DEAMBROSI, Montevideo - Uruguay, Philippe DELEHAM, 97-Ouangani (Mayotte), Edgard DELPLANCHE, 95-Créteil, Christine FENOGLIO, 69-Lyon, Jacques FORT, 86-Poitiers, Alain LARROCHE, 06-Nice, Jean-Yves LE CADRE, 56-Vannes, René MANZONI, 76-Le Havre, Annette MOLARD, 67-Strasbourg, J.N. MOULIGNEAU, 39-Lons le Saunier, Charles NOTARI, 31-Montaut, Maurice PERROT, 75-Paris, Marguerite PONCHAUX, 59-Lille, G. PRIGENT, 93-Dugny, Anne-Marie RAUCH, 67-

Strasbourg, Raymond RAYNAUD, 04-Digne, RENEVIER, ..., Pierre RENFER, 67-Ostwald, Martine SALMON, 92-Rueil Malmaison, et Isabelle VOLTAIRE, 77-Fouju) ne m'ont pas déçu. Je présenterai donc cinq méthodes : barycentres, nombres complexes, inversion, produit scalaire et homothétie, plus des compléments.

Plus de 20% des solutions utilisent le calcul trigonométrique pour prouver, moyennant quelques variantes, que les **coordonnées barycentriques** des trois points ne sont pas indépendantes. De fait, comme $\mathrm{BD} = \mathrm{ID} \cdot \cot\left(\frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \frac{r\,(1+\cos \mathrm{B})}{\sin \mathrm{B}}$, les coordonnées barycentriques de D sont, à proportionnalité près : $(0, \sin \mathrm{B} \cdot (1+\cos \mathrm{C}), \sin \mathrm{C} \cdot (1+\cos \mathrm{B}))$, et de même pour E et F. Or dans les trois cas, la somme de ces coordonnées est la même : $\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}$. On en déduit que le centre de gravité du triangle DEF a pour coordonnées barycentriques :

$$(\sin \mathrm{A} \cdot (2+\cos \mathrm{B}+\cos \mathrm{C}), \sin \mathrm{B} \cdot (2+\cos \mathrm{C}+\cos \mathrm{A}), \sin \mathrm{C} \cdot (2+\cos \mathrm{A}+\cos \mathrm{B}))$$
$$= (2+\cos \mathrm{A}+\cos \mathrm{B}+\cos \mathrm{C}) \cdot (\sin \mathrm{A}, \sin \mathrm{B}, \sin \mathrm{C}) - \frac{1}{2}(\sin 2\mathrm{A}, \sin 2\mathrm{B}, \sin 2\mathrm{C}).$$

Il appartient donc à la droite (OI) puisque O et I ont pour coordonnées respectives : $(\sin 2\mathrm{A}, \sin 2\mathrm{B}, \sin 2\mathrm{C})$ et $(\sin \mathrm{A}, \sin \mathrm{B}, \sin \mathrm{C})$). Puisque la droite d'Euler du triangle DEF passe aussi par I, la droite (OI) est cette droite d'Euler et contient donc l'orthocentre K. Un petit effort supplémentaire permettrait de calculer le rapport IK/IO, plusieurs lecteurs l'ont fait.



Jacques Borowczyk et Gaston Bouez proposent chacun deux solutions dont une utilisant les **nombres complexes**. Dans un plan complexe centré en I où D, E, F ont pour affixes d, e, f, de module 1 $(\bar{d} = \frac{1}{d}, \ldots)$, une parallèle à la droite (ID) a pour équation, $\frac{z}{d} - \frac{\bar{z}}{\bar{d}} = \text{cte}$ et une perpendiculaire, $\frac{z}{d} + \frac{\bar{z}}{\bar{d}} = \text{cte}$. Donc (BC) a pour équation : $\frac{z}{d^2} + \bar{z} = \frac{2}{d}$, de même pour (CA) et (AB), on en déduit l'affixe de B : $\dfrac{2fd}{f+d}$, de C : $\dfrac{2de}{d+e}$, de A : $\dfrac{2ef}{e+f}$,

donc des milieux de BC : $\dfrac{fd}{f+d}+\dfrac{de}{d+e}$, etc..., l'équation des médiatrices et

finalement l'affixe de O : $\dfrac{2def}{(e+f)(f+d)(d+e)}\cdot(d+e+f)$. On vérifie sans

difficulté que $\dfrac{2def}{(e+f)(f+d)(d+e)}$ est égal à son conjugué, donc réel, ce qui achève la démonstration vu que $d+e+f$ est l'affixe de K (le centre de gravité de DEF est au tiers de [IK]).

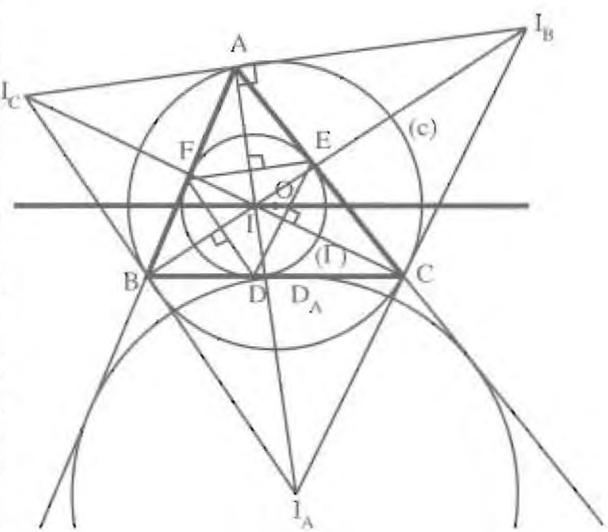
Mais même si les méthodes calculatoires, souvent plus sûres (encore qu'on puisse se perdre dans un calcul), ne doivent pas être écartées trop vite (pour l'énoncé 5 des Olympiades Internationales de cette année, peu de gens ont trouvé une démonstration vraiment géométrique), les solutions géométriques sont généralement plus élégantes. À commencer, pour ceux qui s'en souviennent, par l'**inversion**, qui a offert à Gaston Bouez, Annette Molard et Raymond Raynaud la démonstration suivante : si l'on nomme D′, E′ et F′ les milieux de EF, FD, DE respectivement, le triangle BFD étant isocèle, DE′ est la hauteur du triangle rectangle BDI, donc IE′ · IB = ID² = r^2. Dès lors, l'inversion de pôle I et de puissance r^2 transforme A, B, C en respectivement D′, E′, F′, et le cercle (C) circonscrit à ABC en le cercle d'Euler (passant par les milieux des côtés) du triangle DEF : le centre de ce cercle (milieu de [IK]), le centre O de (C) et le pôle d'inversion I sont donc alignés : K appartient bien à (OI).

Cette méthode permet même de recalculer la distance d = OI. La droite (OI) recoupe (C) en P et Q tels que : IP = R + d, IQ = R − d. Leurs inverses P′ et Q′ vérifient : $\mathrm{IP}'=\dfrac{r^2}{\mathrm{R}+d}$ et $\mathrm{IQ}'=\dfrac{r^2}{\mathrm{R}-d}$. Or P′ et Q′ sont sur le cercle d'Euler de DEF, de rayon $\dfrac{r}{2}$, et ils sont diamétralement opposés sur ce cercle, donc : $\dfrac{r^2}{\mathrm{R}+d}+\dfrac{r^2}{\mathrm{R}-d}=r$, ce qui entraîne : $d^2=\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}r$. On en déduit même le rapport IK/IO.

Mais si l'on connaît la distance OI, on peut aussi utiliser une méthode pas vraiment géométrique, mais pas trop calculatoire quand même : le **produit scalaire**. $\overrightarrow{\mathrm{IK}}=\overrightarrow{\mathrm{ID}}+\overrightarrow{\mathrm{IE}}+\overrightarrow{\mathrm{IF}}$. Or en projetant orthogonalement O sur (ID), on voit aisément que : $\overrightarrow{\mathrm{ID}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IO}} = r\,(r - \mathrm{R}\cos\mathrm{A})$. Par ailleurs, dans le quadrilatère IEAF, l'angle $\widehat{\mathrm{FIE}}$ vaut $\pi - \mathrm{A}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{IE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IF}} = -r^2\cos\mathrm{A}$. Il suffit donc de savoir que(1) :

$$\cos\mathrm{A} + \cos\mathrm{B} + \cos\mathrm{C} = 1 + \frac{r}{\mathrm{R}}$$

pour prouver que $\mathrm{IK}^2 = r^2\left(1 - \frac{2r}{\mathrm{R}}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{IK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IO}} = r(2r - R) = -\mathrm{IK}\cdot\mathrm{IO}$, vu que $\mathrm{IO}^2 = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r$. Rappelons que c'est par un pénible calcul de distances qu'Euler a démontré l'alignement qui porte son nom. Et l'on a une fois de plus (mais cette fois-ci, je vais au bout du calcul) : $\mathrm{IK} = \frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{IO}$, plus précisément : $\mathrm{R}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IK}} + r\cdot\overrightarrow{\mathrm{IO}} = \vec{\mathrm{O}}$.



Cela étant, la méthode la plus utilisée, par plus de 60% des lecteurs, est l'**homothétie**. Un peu plus de la moitié d'entre eux font intervenir les centres I_A, I_B et I_C des cercles exinscrits (Γ_A), (Γ_B), (Γ_C). AI_A, BI_B et CI_C passent toutes trois par I et sont perpendiculaires respectivement à I_BI_C, I_CI_A, I_AI_B : ce sont les trois hauteurs du triangle $I_AI_BI_C$, dont I est l'orthocentre et O le centre du cercle d'Euler (passant par

(1) On peut le retrouver grâce à la formule très générale : pour tout (u,v,w)

$$\sin(u+v+w) = \sin u + \sin v + \sin w - 4\sin\left(\frac{v+w}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{w+u}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

les pieds A, B, C des hauteurs), donc (OI) la droite d'Euler. Or (EF) est lui aussi perpendiculaire à (AI) (vu que AEF est isocèle), donc parallèle à (I_BI_C), tout comme (FD) à (I_CI_A) et (DE) à (I_AI_B) : les deux triangles $I_AI_BI_C$ et DEF sont homothétiques (ou translatés, pour répondre à une objection soulevée dans l'énoncé 233, bulletin 401 p. 952, ici cela n'a aucune importance). En définitive, les droites d'Euler de ces triangles sont parallèles, donc confondues car toutes deux contiennent I, centre du cercle (Γ) circonscrit à DEF et orthocentre de $I_AI_BI_C$.

Dans l'homothétie de centre I (orthocentre de $I_AI_BI_C$) et de rapport $\frac{1}{2}$ qui, au cercle circonscrit à $I_AI_BI_C$, associe son cercle d'Euler (C) (circonscrit à ABC), les images A′, B′, C′ de I_A, I_B, I_C sont les milieux de II_A, II_B, II_C et les milieux des arcs BC, CA, AB (car ils appartiennent aux bissectrices des angles inscrits). On pouvait établir directement, sans utiliser $I_AI_BI_C$, l'homothétie de A′B′C′ avec DEF, ou même l'homothétie du triangle orthique de DEF avec ABC, triangle orthique de $I_AI_BI_C$ (cf énoncé 233).

Mais je préfère conclure par les différents compléments que j'ai reçus. Il est clair, certains l'ont précisé, que si le triangle ABC est équilatéral, tous ces points O, I, K, etc… sont confondus. Edgard Delplanche rappelle qu'il existe une infinité de triangles ayant même cercle inscrit (Γ) et même cercle circonscrit (C) que ABC. Les triangles formés par les points de contact à (Γ) admettent tous K pour orthocentre : c'est le seul point tel que $R \cdot \overrightarrow{IK} + r \cdot \overrightarrow{IO} = \vec{O}$.

G. Prigent généralise ce résultat aux cercles exinscrits : pratiquement tous les résultats valables pour le cercle inscrit (Γ) se généralisent, moyennant les changements de signes nécessaires, aux cercles exinscrits (Γ_A), (Γ_B), (Γ_C). Philippe Deleham attire notre attention sur l'aire du triangle DEF. On a :

$$\frac{\text{aire de DEF}}{\text{aire de ABC}} = \frac{\text{aire de ABC}}{\text{aire de } I_AI_BI_C} = \frac{r}{2R}$$

relation intéressante compte tenu que les triangles I_ABC, AI_BC, ABI_C sont tous trois semblables à $I_AI_BI_C$. En outre, cela prouve que :

$$\frac{\text{aire de DEF}}{\text{aire du cercle circonscrit à DEF}} \geq \frac{\text{aire de ABC}}{\text{aire du cercle circonscrit à ABC}},$$

et l'inégalité est stricte dès lors que ABC n'est pas équilatéral. On en déduit que le triangle de plus grande aire inscrit dans un cercle donné est équilatéral, DEF étant « plus proche » du triangle équilatéral que ABC.

Je garde pour la fin l'idée particulièrement intéressante de Jacques Bouteloup, de faire intervenir les points de Gergonne J et de Nagel N du triangle ABC. Appelons D_A, E_B et F_C les points de contact de (Γ_A), (Γ_B), (Γ_C) avec (BC), (CA), (AB) respectivement : N est par définition l'intersection de (AD_A), (BE_B), (CF_C), et J, de (AD), (BE), (CF). Or non seulement les isogonaux de N et J sont les centres des homothéties (positive et négative) transformant (C) en (Γ), ce qui prouve qu'ils appartiennent à (OI) et sont conjugués harmoniques par rapport à O et I (cf avis de recherche 77, bulletin 413, p. 779), mais en outre, l'orthocentre K du triangle DEF appartient à la droite (JN).

Jacques Bouteloup démontre géométriquement ces deux résultats : appelons (Δ_A) la seconde tangente commune (autre que (BC)) à (Γ) et (Γ_A), T et T_A ses points de contact avec les deux cercles. La symétrie par rapport à la bissectrice (AI) transforme, c'est bien connu, (AH) en (AO), et (BC), perpendiculaire à (AH), en (Δ_A), perpendiculaire à (AO) donc parallèle à la tangente en A à (C). Donc dans l'une des homothéties transformant (C) en (Γ) (il est bon de voir que c'est l'homothétie de rapport négatif), T est l'image de A (puisque les tangentes en T à (Γ) et en A à (C) sont parallèles), et le centre de cette homothétie est sur (AT), isogonale de (AD). Pour la même raison, il est sur l'isogonale de (BE), sur l'isogonale de (CF), c'est donc l'isogonal de J, point de Gergonne de ABC. De manière analogue, l'homothétie de rapport positif transformant (C) en (Γ_A) transforme A en T_A, son centre est donc sur AT_A, et si je la compose avec l'homothétie positive, de centre A, transformant (Γ_A) en (Γ), je prouve que l'homothétie positive transformant (C) en (Γ) a elle aussi son centre sur AT_A, isogonale de AD_A, ainsi que, par le même raisonnement, sur l'isogonale de BE_B et sur l'isogonale de CE_C, c'est donc l'isogonal de N.

Quant à l'alignement de notre orthocentre K avec J et N, je me contenterai d'un calcul de barycentres. Avec les notations traditionnelles, les coordonnées barycentriques de N et J sont respectivement $(p-a,p-b,p-c)$ et (r_A,r_B,r_C). Or comme $r+r_A=2R(\cos B+\cos C)$, celles de K peuvent s'écrire $(a\,(r+r_A),b\,(r+r_B),c\,(r+r_C)) = p\,(r_A,r_B,r_C) - r\,(p-a,p-b,p-c)$, d'où l'alignement et on a même plus : $4R\cdot\overrightarrow{JK}+r\cdot\overrightarrow{JN}=\vec{0}$; il reste à justifier géométriquement ce résultat étonnant, je confie ce soin à nos éminents lecteurs.