Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie si vous souhaitez son retour) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.
par internet : rferreol@club-internet.fr

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n⁰ 111 de Abderrakim Ouardini (Nice)

Contexte et démonstration de l'identité de Liouville :

$$\sum_{0<k<\sqrt{x}} \left[\sqrt{x-k^2}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x}{2k+1}\right].$$

Avis de recherche n⁰ 112 de Robert Vidal (Narbonne)

La structure algébrique dénommée en français CORPS (en allemand KÖRPER) est dénommée en anglais FIELD (Champ) ; d'où vient cette différence de dénomination ? Y a-t-il un lien entre le corps humain et la structure de corps ? De manière plus générale, je suis intéressé par les rapports entre le corps humain et les mathématiques (références d'articles, d'ouvrages.).

Avis de recherche n⁰ 113 de Michel Lafond (Dijon)

Je n'arrive pas à démontrer la conjecture suivante :

Dans **N***, l'équation diophantienne d'inconnues x, y, z :

$$n = x{\cdot}y + y{\cdot}z + z{\cdot}x$$

possède au moins une solution sauf pour

$$n \in \{1,2,4,6,10,18,22,30,42,58,70,78,102,130,190,210,330,462\}.$$

Pour $k \geq 1$ et $n = 2k + 1$, on a la solution $(1,1,k)$.

Pour $k \geq 1$ et $n = 3k + 2$, on a la solution $(1,2,k)$, etc.

Ce qui précède prouve que les entiers n pour lesquels $n = x{\cdot}y + y{\cdot}z + z{\cdot}x$ n'a pas de solution sont nécessairement parmi 1, 2 ou les entiers de la forme $6k$ ou $6k + 4$, mais je n'en sais guère plus. J'ai vérifié par ordinateur la conjecture jusqu'à $n = 200\,000$.

Avis de recherche n° 114 d'Alain Corre (Moulins)

Existe-t-il un nombre tétraédrique $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ égal à un nombre pyramidal $\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$?

RÉPONSES AUX AVIS DE RECHERCHE PRÉCÉDENTS

Avis de recherche n° 97 sur les phrases auto-descriptives

Un article de la revue Pour la Science du mois de juin 99 (p. 104) répond en détail à cette question et donne deux phrases autoréférentes complètes en français.

1) Cette phrase contient exactement huit a, un b, six c, cinq d, vingt-trois e, deux f, trois g, quatre h, dix-sept i, un j, un k, deux l, trois m, seize n, huit o, cinq p, sept q, dix r, onze s, vingt-quatre t, quatorze u, trois v, un w, sept x, un y et, finalement, quatre z.

2) Il est facile de voir que cette phrase contient six a, un b, sept c, quatre d, dix-huit e, quatre f, cinq g, cinq h, vingt-deux i, un j, un k, trois l, un m, vingt et un n, cinq o, quatre p, huit q, neuf r, huit s, vingt et un t, vingt u, six v, un w, six x, un y et pour finir un z.

On peut télécharger sur le site de Jacques Pitrat,

http://wwwappa.lip6.fr/META/pitratpublication.html,

le listing du programme C qui a créé ces phrases réflexives ainsi que beaucoup d'informations sur le sujet.

Voici encore une phrase auto-descriptive complète, de 125 lettres, plus courte que celle ci-dessus qui en a 187, envoyée par Michel Lafond (Dijon) :
J'ai noté quatre a, un b, un c, six d, onze e, un f, un g, trois h, douze i, deux j, un k, un l, un m, treize n, six o, deux p, trois q, six r, sept s, dix t, dix-huit u, un v, un w, huit x, un y, quatre z.

Avis de recherche n° 104 de Daniel Delaplace (Foix)

Existe-t-il un coin de cube dont les arêtes ont toutes des longueurs entières ?

En d'autres termes peut-on trouver trois triplets pythagoriciens « imbriqués » (a,b,u), (a,c,v) et (b,c,w) ?

Synthèse des envois de Jean Moreau de saint Martin (Paris), Pierre Barnouin (Cabris) et J.P. Roux (jean.p.roux@wanadoo.fr), par Daniel Delaplace.

« Ce problème est celui des briques (ou pavés, ou encore cuboïdes) de Pythagore que l'on peut reformuler ainsi : existe-t-il des parallélépipèdes rectangles dont les cotés ont des longueurs entières ainsi que celles des diagonales des faces ?

La réponse est oui, comme le confirment MM. Roux, Perruchaud, Baboud et Barnouin.

La plus petite brique est (44,117,240) qui est par ailleurs indiquée (avec une erreur) dans le « Dictionnaire Penguin des nombres curieux » (Eyrolles). On la trouve dans le livre « Les nombres remarquables » de F. Le Lionnais à 44.

P. Barnouin s'est intéressé de près à ces briques et affirme avoir démontré que le produit des longueurs des trois côtés est nécessairement un multiple de 95 040 , ce qui lui a permis de lister facilement toutes les solutions dont les cotés sont inférieurs à 20 000. Il donne par ailleurs en cadeau six briques de même base 12 658 464 par 13 813 800 et de hauteurs : 1 153 152, 10 097 920, 12 055 680, 14 504 490, 17 316 585 et 151 637 850.

Il n'y a pas (encore ?) de solution paramétrique générale connue ; ce fait est mentionné dans la « bible » : Unsolved Problems in Number Theory de Richard K. Guy (Springer-Verlag).

Un prolongement intéressant est de savoir s'il existe des briques avec la grande diagonale entière elle aussi : le problème est ouvert mais H. Brocard a démontré qu'il n'en existait pas avec des cotés premiers entre eux. »

J'ai reçu également des contributions de Pierre Renfer (Ostwald), C. Fenoglio (Lyon), qui a écrit un article sur le sujet dans la revue de l'APMEP-LYON « Polygone » de janvier 1999 et François Perruchaud (francois.perruchaud @wanadoo.fr) qui précise : il n'existe pas de solution avec des triplets tous primitifs (sans facteurs communs). Dans la brique (44,117,240), seul le premier l'est. Cela implique que ces triplets ne peuvent pas forcément être trouvés par la paramétrisation classique ($x = a^2 - b^2$; $y = 2ab$; $z = a^2 + b^2$).

Avis de recherche n° 106 de André Duhoux (famille.duhoux@wanadoo.fr)

Un problème de chèvre (un de plus). Une chèvre est attachée par une corde à l'un des sommets d'un pré carré de côté a. Sa corde lui permet de brouter à une distance au plus égale à $a/2$, et, bien sûr, l'herbe ne repousse pas derrière elle. Lorsqu'elle n'a plus d'herbe à brouter, on déplace son point d'attache dans le pré pour lui permettre de s'adonner à son activité favorite, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle ait tout rasé.

Quelle est la longueur minimale de la ligne brisée ainsi créée entre le premier et le dernier point d'attache (ou à défaut trouver des valeurs aussi petites que possible) ?

Réponse de Jean Moreau de Saint Martin (Paris).

Le problème se prête à une solution complète (ramenant à une équation algébrique) mais je n'en donne ici qu'un schéma.

Soit ABCD le carré, O son centre, A le premier point d'attache, L la ligne reliant les points d'attache.

L touche nécessairement les cercles de rayon $a/2$ et de centres B, C et D respectivement, pour permettre à la chèvre de brouter jusqu'en ces sommets.

Première étape : deux changements de direction suffisent

Soit b un point commun à L et au cercle de centre B. Alors tout point du trapèze OBAM (M milieu de AD) est à une distance inférieure ou égale à $a/2$ d'au moins un point du segment Ab.

Soit c un point commun à L et au cercle de centre C. Tout point du triangle OBC est à une distance inférieure ou égale à $a/2$ d'au moins un point du segment bc.

Soit d un point commun à L et au cercle de centre D. Tout point du triangle OCD est à une distance inférieure ou égale à $a/2$ d'au moins un point du segment cd.

Si, de plus, le triangle ODM est inclus dans le cercle de centre d et de rayon $a/2$, on peut prendre pour L la ligne polygonale Abcd : tout le carré sera brouté, quitte à compléter les sommets A, b, c, d par des positions intermédiaires du point d'attache.

On en conclut que si le trajet est de la forme Abcd, il suffira de trouver les positions optimales des points b, c et d.

Deuxième étape : appel au mécanicien

Reste à trouver les positions de b, c, d satisfaisant ces conditions et donnant à L la plus petite longueur possible. Un moyen mécanique d'y parvenir est le suivant :

– fixer un anneau en A ;

– attacher par des fils de longueur $a/2$ un anneau b et un anneau c à B et C respectivement ;

– passer un fil dans les anneaux A, b, c et attacher son extrémité d (côté c) à

D et M par deux fils de longueur $a/2$;
– tirer sur le fil par l'extrémité côté A jusqu'à ce qu'il soit bien tendu.

Le fil glissant dans les anneaux b et c, sa tension est la même sur les segments Ab, bc et cd. L'équilibre statique des anneaux b et c exige que Bb soit bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{A}bc}$, et Cc bissectrice de l'angle $\widehat{bcd}$.

On obtiendrait les mêmes conditions dans une approche plus géométrique, à partir du principe que, dans une optimisation à plusieurs paramètres, chaque paramètre prend la valeur qu'il prendrait si l'optimisation portait seulement sur lui, les autres paramètres étant donnés. Ainsi, b à l'optimum global est tel qu'il minimise Ab + bc en supposant A et c fixés. De ce fait, le cercle de centre B ne doit pas pénétrer à l'intérieur de l'ellipse de foyers A et c passant par b. Ces deux courbes sont tangentes en B et on retrouve la condition sur Bb bissectrice.

Troisième étape : discussion qualitative

Si Md n'est pas tendu, l'équilibre statique du nœud d exige que c, d et D soient alignés. La configuration des fils tendus est celle qui minimise la longueur AbcD. J'admets que, par symétrie, bc est parallèle à BC (il faudrait, en toute rigueur, s'assurer que ce n'est pas un minimum local).

Les propriétés angulaires de la figure donnent alors

$$\sin(\widehat{\mathrm{BC}c}) + 2\cos(\widehat{\mathrm{BC}c}) = 0,$$

puis

$$\sin(\widehat{\mathrm{BC}c}) = \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \cos(\widehat{d\mathrm{DM}}) = \frac{1+\sqrt{33}}{16} < \frac{1}{2}.$$

Cela entraîne dM > $a/2$ et cette solution ne convient pas.

Le fil Md est donc tendu ; si Dd ne l'était pas, c, d et M seraient alignés, mais d serait alors assez proche de CD pour que Cc ne puisse être bissectrice de $\widehat{bcd}$. Donc les fils Dd et Md sont tendus, ce qui fixe la position de d.

On peut en tirer un encadrement de la longueur cherchée.

On obtient une valeur trop faible si on fait abstraction de la condition M$d \leq a/2$. En effet, si on admet que l'optimum est unique, on peut y arriver en appliquant les autres contraintes, puis en tirant sur le fil Md jusqu'à satisfaire cette condition ; il est intuitif que cela allongera L.

Cette valeur par défaut est $a\dfrac{4+4\sqrt{18-2\sqrt{33}}-\sqrt{30-2\sqrt{33}}}{8} \approx 1{,}238\,017.$

On obtient une valeur trop forte si on laisse b et c dans la position précédemment déterminée en mettant d à sa vraie position. En effet, si on fixe ainsi b et c avant de tendre le fil côté A, puis si on libère b et c sur leurs cercles respectifs, ils se déplaceront dans le sens raccourcissant L.

Cette valeur par excès est

$$\frac{a}{8}\left(8-\sqrt{30-2\sqrt{33}}+2\sqrt{18-2\sqrt{33}}\right.$$

$$\left.+\sqrt{88-8\sqrt{33}-30\sqrt{3}+6\sqrt{11}-2\sqrt{30-2\sqrt{33}}}\right)=1,246782.$$

D'où la fourchette a (1,242 4 ± 0,004 4) pour la longueur cherchée.

Quatrième étape : mise en équation exacte

Nous pouvons mettre le problème en équation en prenant pour inconnues les angles caractérisant les positions de b et de c : $\beta = \widehat{b\mathrm{BC}}$, $\gamma = \widehat{\mathrm{BC}c}$. Les pentes des droites Ab, bc, cd s'expriment en fonction de ces angles, de même que les conditions de bissectrices en b et c. D'où deux équations trigonométriques :

$$\frac{\sin 2\gamma - 2\sin\gamma - (4-\sqrt{3})\cos 2\gamma}{\cos 2\gamma - 2\cos\gamma + (4-\sqrt{3})\sin 2\gamma} = \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{2-\cos\beta-\cos\gamma} = \frac{\sin\beta + 2\cos 2\beta}{\cos\beta - 2\sin 2\beta}.$$

On se ramène à des équations algébriques en utilisant les tangentes des demi-angles. Les calculs étant lourds, je préfère les laisser faire à ceux qui disposent d'un logiciel de calcul symbolique.

Cinquième étape

Compte tenu de la symétrie, B et D peuvent être échangés dans ces raisonnements sans changer le résultat. On pourrait donc avoir un trajet Adcb de même longueur. Pourrait-on faire mieux avec un trajet Acbd ou Acdb ? Des conditions supplémentaires seraient à prévoir pour couvrir toute la surface du carré, par exemple sur CD si c est proche de b dans le trajet Acbd.

En outre on a toujours $\mathrm{Ac}+\mathrm{bd} \geq a(2\sqrt{2}-1,5) \approx 1,328a$, ce qui montre que ces trajets ne sont pas compétitifs.

Remarque : des fils aux caustiques

Passons de la mécanique à l'optique. Les conditions en b et c correspondent aux lois de la réflexion sur des miroirs cylindriques axés en B et C. La caustique de A dans le miroir (B) est l'enveloppe des rayons issus de A après réflexion en b. La caustique de d dans le miroir (C) est l'enveloppe des rayons issus de d après réflexion en c. La position cherchée pour bc est la tangente commune aux deux caustiques.