Lemniscatomie,
ou comment découper une lemniscate en parties égales, à la règle et au compas[1]

Jean-Pierre Friedelmeyer

Résumé. Le problème de la division de la lemniscate est un lieu insolite, mais concret et stratégique, pour pénétrer par la petite porte dans quelques-unes des théories marquantes du XIX^e siècle, et par là d'en saisir l'origine :
• celle de la résolution des équations algébriques comme moteur de l'émergence du concept de groupe,
• celle des fonctions elliptiques au centre de l'élaboration des fonctions de variable complexe,
• celle des intégrales abéliennes.

C'est un bel exemple pour voir fonctionner la liaison de plus en plus étroite au XIX^e siècle entre les domaines de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie et même de l'arithmétique.

Nous nous baserons principalement sur le texte d'Abel *Recherches sur les fonctions elliptiques* (1826) que nous avons adapté, et nous apprendrons à diviser la lemniscate à la règle et au compas en 2, 3, 5 et 17 parties égales.

1. Introduction.

Dans ses *Recherches arithmétiques*, section VII, intitulée *Des équations qui déterminent les sections circulaires*[2], Gauss fait la remarque que :

« *les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici ; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple à celles qui*

(1) Publié une première fois dans L'Ouvert, revue de la régionale de l'APMEP d'Alsace, n° 92, sept. 1998. Le découpage en 5 et 17 parties égales n'est pas reproduit ici.

(2) Voir *L'Ouvert*, n° 46 et 47, mars et juin 1987.

dépendent de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ».[3]

Cette remarque n'échappe pas à Abel qui dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* annonce :

« *entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci : On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m parties égales* <u>*par la règle et le compas seuls*</u>, *si m est de la forme* 2^n *ou* 2^{n+1}, *ce dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle* ».[4]

Dans l'article qui suit, nous nous proposons de dégager les idées principales d'Abel pour réaliser cette « lemniscatomie », de façon suffisamment élémentaire pour ne pas avoir à mettre en place l'immense arsenal de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous appuierons sur le texte d'Abel cité ci-dessus, principalement les paragraphes I à V et le paragraphe VIII, mais limités et adaptés à ce qui concerne la lemniscate. Cette adaptation nous obligera quelquefois à faire appel à d'autres auteurs lorsque les méthodes développées par Abel sont trop compliquées ou générales. Les textes utilisés seront précisés au moment opportun.

2. La lemniscate

La lemniscate se rencontre pour la première fois dans un article célèbre des *Acta eruditorum* de septembre 1694[5], sous la dénomination de « *curva quatuor dimensionum quæ hac aequatione exprimitur* $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$ *quaeque circum axe* GG [2a] *constitua formam refert jacentis notae octonarii* ∞ *seu complicitae in nodum fasciae, sive lemnisci, d'un noeud de ruban Gallis* ». [du grec ληµνισκοζ qui signifie bandelette ou ruban]. Nous renvoyons au livre de Loria : *Spezielle ebene algebraische Kurven*[6], dont ces informations sont extraites, pour une étude détaillée des propriétés

(3) C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris 1807.

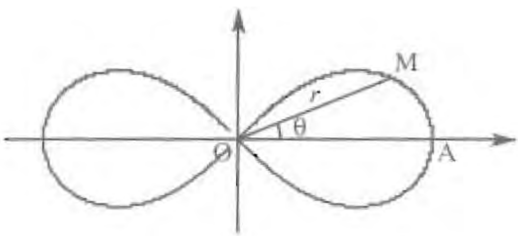
(4) N. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, p. 314. Voir aussi la correspondance d'Abel citée dans le numéro 92 de *L'Ouvert*, dans l'article *L'histoire des mathématiques par correspondance*.

(5) Jacobi Bernoulli, *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenta nuperae solutionis mensis Junii*.

(6) G. Loria, *Spezielle algebraische und transcentente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner p. 199.

géométriques de cette courbe. Nous nous limiterons ici à celles qui concernent directement sa division en n parties égales, à la règle et au compas.

La lemniscate est donc la courbe d'équation cartésienne : $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2$ ou d'équation polaire : $r^2 = \cos 2\theta$, que l'on peut également paramétrer, en posant $x^2 + y^2 = t^2$, $x^2 - y^2 = t^4$, donc :



$x = \pm t\sqrt{\dfrac{1+t^2}{2}}$, $y = t\sqrt{\dfrac{1-t^2}{2}}$ pour $t \in [-1;+1]$.

Le fait essentiel qui nous intéresse ici est que la longueur s d'un arc $\overset{\frown}{OM}$ tel que le segment OM mesure r est donnée par $s = \displaystyle\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, comme le montre le calcul de $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

Pour bien mettre en place l'analogie existant entre la « cyclotomie » et la « lemniscatomie », et pour prendre la mesure exacte des méthodes et des articulations liées à ce problème, il peut être utile de faire un détour afin de montrer comment on peut définir les fonctions circulaires et leurs propriétés principales uniquement à partir de l'intégrale $\displaystyle\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Remarquons en effet que l'équation polaire du cercle de diamètre [OA], (O origine, A de coordonnées (0;1)) est $r = \cos\theta$, et la longueur s d'un arc $\overset{\frown}{OM}$ tel que OM mesure r est donnée par cette intégrale.

3. Définition purement analytique des fonctions circulaires

L'intégrale $\alpha = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ définit une fonction réelle continue de la variable réelle x, impaire, strictement croissante, de $[-1;+1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$, en posant par définition $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Il existe donc une fonction réciproque continue, impaire, strictement croissante que nous appellerons sinus, définie par l'équivalence :

$$x = \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

pour $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$ et $x \in [-1;+1]$. De même on peut définir une fonction cosinus continue, strictement décroissante, par l'équivalence :

$$y = \cos \beta \Leftrightarrow \beta = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

pour $\beta \in [0;\pi]$ et $y \in [-1;+1]$.

Le changement de variable $u = \sqrt{1-t^2}$ dans l'intégrale $\alpha = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ donne $\alpha = \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$; autrement dit : si $x = \sin \alpha$, alors

$$\sqrt{1-x^2} = \cos \alpha = \sqrt{1-\sin^2 \alpha}.$$

D'où la relation $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ permettant de prolonger la définition de $\sin \alpha$ et de $\cos \alpha$ à l'intervalle $[-\pi;+\pi]$.

La fonction sinus est dérivable en tant que réciproque d'une fonction dérivable, à dérivée non nulle $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $|x| \neq 1$; donc

$$(\sin \alpha)' = \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \cos \alpha,$$

relation que nous pouvons étendre à l'intervalle fermé $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$, puis à $[-\pi;+\pi]$. De même, on démontre que $(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$.

Il reste à mettre en place les formules d'addition, c'est-à-dire les formules
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha.$$
Un moyen simple consiste à effectuer le développement en série de Taylor de $\sin(\alpha+\beta)$ sous la forme
$$\sin(\alpha+\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta^n}{n!}(\sin\alpha)^{(n)},$$
où $(\sin\alpha)^{(n)}$ désigne la dérivée n^e de $\sin\alpha$ par rapport à α. On a : $(\sin\alpha)^{(2n)} = (-1)^n \sin\alpha$ et $(\sin\alpha)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos\alpha$ pour tout entier naturel n. De sorte que $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot V_1 + \cos\alpha \cdot V_2$, où V_1 et V_2 sont des fonctions de β seul. En dérivant cette relation par rapport à α, puis en faisant $\alpha = 0$, on trouve bien $V_1 = \cos\beta$ et $V_2 = \sin\beta$. Malheureusement cette méthode s'applique difficilement à d'autres cas tels que les fonctions elliptiques, par exemple. C'est pourquoi nous donnons également une autre démonstration, que nous pourrons adapter plus facilement.

Si nous posons $u = \sin\alpha$, $v = \sin\beta$, $r = \sin\gamma$, il faut déterminer la fonction $r(u,v)$ telle que :
$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$
ce qui équivaut à $\alpha + \beta = \gamma$. Considérant là aussi α comme variable et β comme constant, on a :
$$\frac{du}{d\alpha} = \cos\alpha, \quad \frac{d^2u}{d\alpha^2} = -\sin\alpha,$$
$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dr}{d\gamma} = \cos\gamma, \quad \frac{d^2r}{d\alpha^2} = -\sin\gamma,$$
de sorte que :
$$\frac{d}{d\alpha}\left[r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha}\right] = \sin\gamma\cdot(-\sin\alpha) - \sin\alpha\cdot(-\sin\gamma) = 0.$$
Donc $r\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dr}{d\alpha} = \sin\gamma\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\gamma$ est constant, égal à k. Avec $\alpha = 0$, on trouve $k = \sin\beta$; d'où la relation :

$$\sin\beta = \sin(\gamma - \alpha) = \sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma \Leftrightarrow v = r\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-r^2},$$

puis

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \Leftrightarrow r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}.$$

En appliquant ces formules avec $\beta = \frac{\pi}{2}$, nous pouvons étendre de proche en proche la définition des fonctions sinus et cosinus à l'ensemble des réels, et mettre en évidence la période 2π pour chacune d'elles.

Nous sommes maintenant en mesure de comprendre la démarche d'Abel pour définir la fonction elliptique utilisée pour la division de la lemniscate.

4. Fonction sinus lemniscatique[7]

Soit s la fonction : $x \mapsto s(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ donnant la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OM}$ sur la lemniscate, pour une distance OM $= x$ donnée. Posons $s(1) = \frac{\varpi}{2}$ (longueur du quart de lemniscate : $s(1) \approx 1{,}31$). Cette fonction est continue, impaire, strictement croissante de $[-1;+1]$ sur $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right]$, ce qui permet de définir la fonction réciproque φ continue, impaire, strictement croissante, de $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right]$ sur $[-1;+1]$. En remarquant que le changement formel $u = -\mathrm{i}t$ dans $\int_0^{\mathrm{i}x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{\mathrm{i}du}{\sqrt{1-u^4}}$ donne la relation $s(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\, s(x)$, Abel définit φ également sur $\left[-\frac{\mathrm{i}\varpi}{2};+\frac{\mathrm{i}\varpi}{2}\right]$[8] en posant $\varphi(\mathrm{i}s) = \mathrm{i}\,\varphi(s)$ et introduit par

(7) Terme utilisé par Gauss dans des papiers qu'il a laissés à sa mort : Gauss Nachlass, Werke III, p. 404. Nous n'utiliserons pas ce terme dans la suite.

(8) C'est-à-dire les nombres imaginaires purs de la forme $\mathrm{i}x$ où x appartient à $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right]$.

ailleurs les fonctions f et F définies par $f(s)=\sqrt{1-\varphi^2(s)}$ et $F(s)=\sqrt{1+\varphi^2(s)}$. Le principal problème est alors de mettre en place les formules d'addition :

$$\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta)+\varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)}=\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2} \quad (1)$$

où $u=\varphi(\alpha)$ et $v=\varphi(\beta)$,

$$f(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-uv\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}{1+u^2v^2},$$

$$F(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}+uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{1+u^2v^2}.$$

5. Démonstration[9]

On a $\dfrac{du}{d\alpha}=\sqrt{1-u^4}$; $\dfrac{d^2u}{d\alpha^2}=-2u^3$. De même, si $r=\varphi(\gamma)$ avec $\gamma=\alpha+\beta$ et en considérant β comme fixé, $\dfrac{dr}{d\alpha}=\sqrt{1-r^4}$, $\dfrac{d^2r}{d\alpha^2}=-2r^3$; donc

$$\frac{d}{d\alpha}\left(r\frac{du}{d\alpha}-u\frac{dr}{d\alpha}\right)=2ru\left(r^2-u^2\right)$$

et

$$\left(r\frac{du}{d\alpha}\right)^2-\left(u\frac{dr}{d\alpha}\right)^2=\left(r^2-u^2\right)\left(1+r^2u^2\right).$$

De sorte que

$$\frac{\dfrac{d}{d\alpha}\left(r\dfrac{du}{d\alpha}-u\dfrac{dr}{d\alpha}\right)}{\left(r\dfrac{du}{d\alpha}\right)^2-\left(u\dfrac{dr}{d\alpha}\right)^2}=\frac{2ru}{1+r^2u^2},$$

(9) Méthode proposée par Darboux in *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, t. IV, p. 85, Paris 1867. Cf A. Enneper, *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, p. 140.

ou encore

$$\frac{\dfrac{d}{d\alpha}\left(r\dfrac{du}{d\alpha}-u\dfrac{dr}{d\alpha}\right)}{r\dfrac{du}{d\alpha}-u\dfrac{dr}{d\alpha}}=\left(\frac{2ru}{1+r^2u^2}\right)\frac{d}{d\alpha}(ru)$$

En conséquence

$$r\frac{du}{d\alpha}-u\frac{dr}{d\alpha}=k\left(1+r^2u^2\right)$$

où k est une constante, ce qui s'écrit également :

$$\frac{\varphi(\alpha+\beta)\varphi'(\alpha)-\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha+\beta)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\alpha+\beta)}=k$$

Prenons $\alpha=0$; alors $\varphi'(\alpha)=1$, ce qui donne $k=\varphi(\beta)$. Finalement :

$$v=\frac{r\sqrt{1-u^4}-u\sqrt{1-r^4}}{1+u^2r^2},$$

et par permutation et changement de signe :

$$r=\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}.$$

Les égalités pour $f(\alpha+\beta)$ et $\mathrm{F}(\alpha+\beta)$ s'en déduiront à partir de leurs définitions.

Ces relations permettent de définir la fonction φ sur le carré $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right]\times\left[-\frac{\mathrm{i}\varpi}{2};+\frac{\mathrm{i}\varpi}{2}\right]$ par

$$\varphi(\alpha+\mathrm{i}\beta)=\frac{u\sqrt{1-v^4}+\mathrm{i}v\sqrt{1-u^4}}{1-u^2v^2} \qquad (2)$$

avec $u=\varphi(\alpha)$; $\varphi(\mathrm{i}\beta)=\mathrm{i}\ \varphi(\beta)=\mathrm{i}v$, sauf pour $uv=\pm 1$. D'autre part, on a également $f(\mathrm{i}\beta)=\mathrm{F}(\beta)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{i}\beta)=f(\beta)$.

6. Un peu d'histoire : le grand théorème d'Abel

La formule d'addition (1) a été découverte, un peu par tâtonnement, par Euler en 1752 et généralisée un peu plus tard sous une forme que nous pouvons écrire :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

pour un polynôme $P(t) = A + Bt^2 + Ct^4$, avec

$$r = A\,\frac{x\sqrt{P(y)} + y\sqrt{P(x)}}{A - Cx^2y^2}.$$

Cette formule d'addition sera le point de départ d'une des plus fécondes théories initiée par Abel qui a tenté de traiter le cas plus général des intégrales que l'on appelle aujourd'hui *Intégrales abéliennes* dans un grand mémoire composé en 1826 pour être soumis à l'Académie des Sciences de Paris. Il y énonce un théorème qui généralise le résultat d'Euler ci-dessus :

« *Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une même équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations algébriques.* »

Abel avait beaucoup misé sur ce mémoire intitulé : *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*, dont il parle à plusieurs reprises dans ses lettres[10] : « *J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut. Cela aura lieu lundi. Je l'ai montré à Cauchy ; mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.* » L'Institut avait désigné Cauchy et Legendre comme juges, et le premier également comme rapporteur, mais apparemment le mémoire a été mis de côté et oublié ! On imagine Abel attendant la réponse de l'Institut à un ouvrage qu'il jugeait excellent d'abord avec patience et confiance, sachant bien que son mémoire nécessitait un travail important de lecture et d'appropriation ; puis avec une anxiété croissante lorsqu'il dut quitter Paris sans avoir aucune nouvelle, après Noël 1826. En fait Abel mourra le 6 avril 1829 sans avoir reçu de réponse. Jacobi qualifiera ce théorème de « *peut-être la plus importante découverte de ce qu'a fait dans les mathématiques le siècle dans lequel nous vivons* ». Quant à Legendre, il l'appellera « *monumentum aere perennius* ». Il ne sera publié qu'en 1841[11].

(10) Voir l'article *Histoire des mathématiques par correspondance* dans le numéro 92 de l'Ouvert.

(11) Houzel Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in Abrégé d'histoire des mathématiques, t. II, p. 74.

7. Périodes

Comme $f\left(\frac{\varpi}{2}\right)=F\left(\frac{\varpi}{2}\right)=0$, la fonction φ n'est pas définie pour $uv=\pm 1$, c'est-à-dire pour $\pm\frac{\varpi}{2}(1\pm i)$. Par contre, on obtient

$$\varphi\left(\alpha+\frac{\varpi}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\varphi\left(-\alpha+\frac{\varpi}{2}\right)$$

par les relations (1). Ce qui donne : $\varphi(\varpi+\alpha)=\varphi(-\alpha)=-\varphi(\alpha)$ et $\varphi(2\varpi+\alpha)=\varphi(\alpha)$.

La fonction φ ainsi prolongée au moyen des relations (1) est périodique de période 2ϖ. On met de même en évidence la période imaginaire $2i\varpi$ et, plus généralement, les périodes $2(m\varpi+in\varpi)$, $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$. L'outil principal de la division de la lemniscate est maintenant en place.

8. Bissection d'un arc de lemniscate

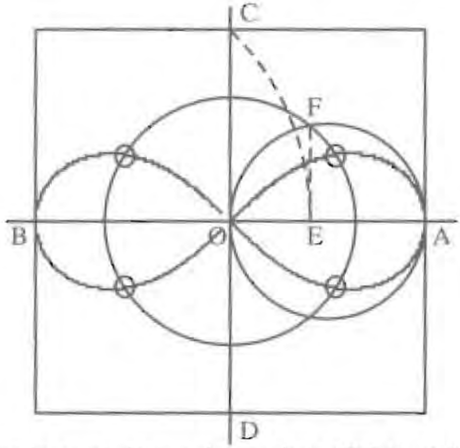
Soient $\alpha=\beta=\frac{s}{2}$, $v=u=\varphi\left(\frac{s}{2}\right)$; alors par les relations (1) et en posant $x=\varphi\left(\frac{s}{2}\right)$, $y=f\left(\frac{s}{2}\right)$, $z=F\left(\frac{s}{2}\right)$, nous avons :

$$f(s)=\frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4},\quad F(s)=\frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

D'où l'on tire $x^2=\frac{F(s)-1}{f(s)+1}=\frac{1-f(s)}{1+F(s)}$ et comme $y^2=1-x^2$ et $z^2=1+x^2$, on a aussi :

$$y^2=\frac{F(s)+f(s)}{1+F(s)}\quad\text{et}\quad z^2=\frac{F(s)+f(s)}{1+f(s)}.$$

En particulier pour $s=\frac{\varpi}{2}$, le quart de lemniscate est partagé en deux. Dans ce cas : $f(s)=0$, $F(s)=\sqrt{2}$, donc $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Cette longueur est constructible à la règle et au compas, de la manière suivante : la lemniscate



étant inscrite dans le carré d'axes de symétrie (BOA) et (COD), tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon BC = $\sqrt{2}$, qui coupe (OA) en E. La perpendiculaire en E à (OA) coupe le cercle de diamètre [OA] en F. OF est la longueur $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ cherchée. (Rappelons que OA = 1).

D'une manière plus générale, pour s fixé, l'arc moitié, d'origine O est obtenu en construisant

$$x = \sqrt{\frac{\mathrm{F}(s)-1}{f(s)+1}} = \sqrt{\frac{1-f(s)}{1+\mathrm{F}(s)}}$$

avec $\mathrm{F}(s) = \sqrt{1+\varphi^2(s)}$ et $f(s) = \sqrt{1-\varphi^2(s)}$.

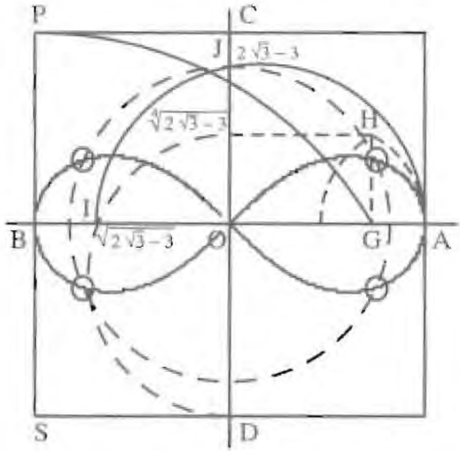
9. Trisection d'une demi-lemniscate

En appliquant (1) à $\alpha = 2s$ et $\beta = s$, on obtient : $\varphi(3s) = \dfrac{u(3-6u^4-u^8)}{1+6u^4-3u^8}$

avec $u = \varphi(s)$. Prenant $3s = \varpi$, on obtient $u = \varphi(s) = \varphi\left(\dfrac{\varpi}{3}\right)$ comme racine de l'équation

$$u^8 + 6u^4 - 3 = 0, \qquad (3)$$

soit $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$, constructible comme suit : le cercle de centre S de rayon



SP = 2 coupe [BA] en G tel que AG = $2-\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}-3$ = GH est la hauteur d'un triangle équilatéral de demi-base AG. Il est alors facile de construire successivement les longueurs OI = $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, puis $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$ = OJ.

Remarquons que les huit solutions de l'équation (3) correspondent aux huit valeurs de $\varphi\left[\frac{\varpi}{3}(1+2m+2in)\right]$ déterminées par les solutions de $3s = \varpi + 2\varpi\,(m+in)$ avec m et n entiers, $0 \le m \le 2$, $0 \le n \le 2$; le couple (1,0) correspondant à la solution $u = 0$ étant laissé de côté, donc : $(m,n) \in \{(0,1),(0,2),(0,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2;2)\}$.

Nous laissons au lecteur le soin de calculer $\varphi\left(\frac{\varpi}{6}\right)$ pour la division de la demi-lemniscate en six.

Indication :

$$x = \varphi\left(\frac{\varpi}{6}\right) = \varphi\left(\frac{1}{3}\frac{\varpi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(3s) = 1 \text{ avec } s = \frac{\varpi}{2}$$
$$\Leftrightarrow u(3 - 6u^4 - u^8) = 1 + 6u^4 - 3u^8$$